Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1964

И. А. БИРЮЛИН

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

На основе инвариантного метода рассмотрен вопрос о распространении электромагнитных волн в однородной гиротропной среде типа ионосферы. Дисперсионной формуле ионосферы придан другой вид, вытекающий из данного метода.

В последнее время в теоретической оптике значительное распространение получили инвариантные методы решения задач. Суть этих методов состоит в отказе от выбора какой-либо частной системы координат, и построение всей теории проводится на основе аппарата векторного и тензорного исчисления и линейной алгебры. При этом путь получения всех соотношений и форма, в которой они выражаются, зачастую оказываются проще и нагляднее, чем при использовании координатного метода. Изложение многих более тонких и сложных вопросов (неоднородные волны, полное отражение, оптика проводящих сред) также существенно упрощается при использовании инвариантных методов.

Область применения инвариантных методов не ограничивается одной лишь кристаллооптикой. Они с успехом могут быть применены и в радиофизике, а именно в вопросах, связанных с распространением электромагнитных волн в неоднородных средах. Дело в том, что при распространении электромагнитных волн в неоднородной среде процессом распространения управляет не локальный тензор диэлектрической проницаемости, а эффективный тензор диэлектрической проницаемости, который определяется интегральными свойствами среды [1]. При этом оказывается, что в локально изотропной неоднородной среде эффективный тензор диэлектрической проницаемости при определенной форме неоднородных образований характеризует однородную анизотропную поглощающую среду [1], причем главные оси вещественного и мнимого тензора не совпадают. При таком тензоре диэлектрической проницаемости для решения задачи о распространении электромагнитных волн в среде исключительно важными оказались инвариантные методы, развитые [2] для неактивных сред.

Общие результаты, полученные В. Д. Гусевым и И. А. Бирюлиным, приводят к необходимости решать аналогичную задачу о распространении электромагнитных волн для локально гиротропной среды типа ионосферы. Как известно, процесс распространения электромагнитных волн в однородной плазме при наличии внешнего магнитного поля во многом сходен с процессом распространения в активных кристаллах, хотя и имеет ряд отличий [3]. Тогда представляется возможным инвариантными методами [4—8] рассмотреть вопрос о распространении электромагнитных волн в однородной гиротропной среде типа земной ионосферы.

В основе инвариантного метода лежит доказанная в [4] возможность инвариантного диадного представления симметричного тензора. Это представление имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = a + b(\vec{C}'\cdot\vec{C}'' + \vec{C}''\cdot\vec{C}'), \tag{1}$$

где ε_{ik} — симметричный тензор, a и b — скаляры, $\vec{C}'$ и $\vec{C}''$ — векторы, образующие диаду $\vec{C}'\cdot\vec{C}''$. (Диада $\vec{C}'\cdot\vec{C}''$ является тензором вида $c_i'c_k''$.)

Наиболее удобно представить в этой форме обратный тензор диэлектрической проницаемости ε_{ik}^{-1}.

Для решения интересующего нас вопроса воспользуемся доказанной в [4] теоремой: несимметричный тензор может быть представлен в инвариантной диадной форме типа (1), если он может быть симметризован путем умножения на вещественную симметричную матрицу α*.

Для простоты рассмотрим случай продольного распространения электромагнитных волн в однородной гиротропной среде типа ионосферы.

Обратный тензор диэлектрической проницаемости имеет в этом случае вид

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{1-u-v}{(1-v)^2-u} & -i\dfrac{\sqrt{u}\,v}{(1-v)^2-u} & 0 \\ i\dfrac{\sqrt{u}\,v}{(1-v)^2-u} & \dfrac{1-u-v}{(1-v)^2-u} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & -ia_{12} & 0 \\ ia_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Здесь $\sqrt{u} = \dfrac{eH}{mc\omega}$, $v = \dfrac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$, H — внешнее магнитное поле, N — электронная концентрация, ω — частота волны.

Как нетрудно убедиться, матрица

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

симметризует тензор ε_{ik}^{-1} и удовлетворяет требованиям упомянутой нами теоремы. Далее, из вида тензора ε_{ik}^{-1} заключаем, что одно из его собственных значений $\lambda = a_{33}$, а соответствующий собственный вектор $\vec{e} = \{0, 0, 1\}$.

Образуя тензор $\beta = \varepsilon_{ik}^{-1} - \lambda$, видим, что β можно согласно общим теоремам представить в виде следующей суммы диад:

$$\beta = A\vec{e}'\cdot\alpha\vec{e}' + B\vec{e}''\cdot\alpha\vec{e}'' + C(\vec{e}'\cdot\alpha\vec{e}'' + \vec{e}''\cdot\alpha\vec{e}') =$$

$$= \frac{A}{2}[(\vec{e}' + x\vec{e}'')\cdot\alpha(\vec{e}' + y\vec{e}'') + (\vec{e}' + y\vec{e}'')\cdot\alpha(\vec{e}' + x\vec{e}'')], \tag{3}$$

---

* Требование положительной определенности матрицы α, выдвигаемое в [5], в данном случае излишне, поскольку оно нигде в дальнейшем не используется.

где $\vec{e}'$ и $\vec{e}''$ выбираются из требования равенства нулю скалярных произведений $\vec{e}'\alpha\vec{e}$, $\vec{e}''\alpha e$, т. е. $\vec{e}' = \{1, 0, 0\}$, $\vec{e}'' = \{0, 1, 0\}$, x и y являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 - \frac{2C}{A} p + \frac{B}{A} = 0.$$

Коэффициенты A, B, C находятся из сравнения:

$$A = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{33} - ia_{12}),$$

$$B = \frac{1}{2} (a_{33} - a_{11} + ia_{12}),$$

$$C = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{33} + ia_{12}).$$

Для дальнейших вычислений заметим, что $xy = -1$, $x + y = 2\frac{A^*}{A}$ (звездочка — знак комплексного сопряжения). Векторы $\vec{C}'$ и $\vec{C}''$ равны соответственно $\vec{e}' + x\vec{e}''$ и $\vec{e}' + y\vec{e}''$.

Таким образом, из (3) следует следующее инвариантное диадное представление для ε_{ik}^{-1}:

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = a_{33} + \frac{A}{2} (\vec{C}' \cdot \alpha\vec{C}'' + \vec{C}'' \cdot \alpha\vec{C}'). \tag{4}$$

Векторы $\vec{C}'$ и $\vec{C}''$ определяются в (4) с точностью до скалярных множителей.

Запишем уравнения Максвелла для плоской волны

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -[\vec{m}\vec{H}],\ H = [\vec{m}\vec{E}], \tag{5}$$

где $\vec{m} = n\vec{N}$, n — показатель преломления, $\vec{N}$ — единичный вектор волновой нормали.

Вводя вместо вектора $\vec{m}$ дуальный ему антисимметричный тензор $m^\times$ и исключая из (5) $\vec{E}$, получим

$$(1 + m^\times \varepsilon^{-1} m^\times)\vec{H} = 0.$$

Подставляя сюда (4), получим

$$\left\{-1 + a_{33}\vec{m}^2 - \frac{A}{2} ([\vec{m}\vec{C}'] \cdot \alpha [\vec{m}\vec{C}''] + [\vec{m}\vec{C}''] \cdot \alpha [\vec{m}\vec{C}'])\right\}\vec{H} = 0. \tag{6}$$

Обозначив $a_{33}\vec{m}^2 - 1 = \varphi$, $[\vec{m}\vec{C}'] = \vec{c}'$, $[\vec{m}\vec{C}''] = \vec{c}''$, видим, что $\vec{H}$ должно быть собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению тензора

$$\varphi - \frac{A}{2} (\vec{c}' \cdot \alpha\vec{c}'' + \vec{c}'' \cdot \alpha\vec{c}'), \tag{7}$$

аналогичного по своей структуре тензору в (4), но с заменой $A \to -A$ мы воспользовались очевидным соотношением $[\vec{m}\,\alpha\vec{C}] = -\alpha[\vec{m}\vec{C}]$, где $\vec{C}$ равен либо $\vec{C}'$, либо $\vec{C}''$).

Нетрудно показать, что собственными векторами тензора (4) будут

$$[\vec{C}'\bar{\alpha}\vec{C}''],\ \sqrt{\vec{C}''\bar{\alpha}\vec{C}''}\,\vec{C}' \pm \sqrt{\vec{C}'\bar{\alpha}\vec{C}'}\,\vec{C}'',$$

а соответствующие собственные значения:

$$a_{33}a_{33} + \frac{A}{2}\left(\vec{C}'\bar{\alpha}\vec{C}'' \pm \sqrt{\vec{C}'\bar{\alpha}\vec{C}'\cdot\vec{C}''\bar{\alpha}\vec{C}''}\right),$$

где $\bar{\alpha}$ — матрица, взаимная к α, т. е. элементы $\bar{\alpha}$ равны соответствующим адъюнктам транспонированной матрицы $\tilde{\alpha}$.

Случай собственного вектора $[\vec{C}'\bar{\alpha}\vec{C}'']$ следует исключить, так как в этом случае из (5) следует, что $\vec{D}=\vec{E}=\vec{H}=0$. Двумя другими решениями будут

$$\vec{H} \parallel \sqrt{[\vec{m}\vec{C}'']\bar{\alpha}[\vec{m}\vec{C}'']}\,[\vec{m}\vec{C}'] \pm \sqrt{[\vec{m}\vec{C}']\bar{\alpha}[\vec{m}\vec{C}']}\,[\vec{m}\vec{C}''], \qquad (8)$$

причем входящий сюда вектор $\vec{m}$ находится из уравнений, получающихся путем приравнивания нулю соответствующих собственных значений

$$a_{33}\vec{m}^2 + \frac{A}{2}\left([\vec{m}\vec{C}']\bar{\alpha}[\vec{m}\vec{C}] \mp \sqrt{[\vec{m}\vec{C}']\bar{\alpha}[\vec{m}\vec{C}']\cdot[\vec{m}\vec{C}'']\bar{\alpha}[\vec{m}\vec{C}'']}\right) = 1,$$

откуда, учитывая, что $\vec{m} = n\vec{N}$, получаем

$$\frac{1}{n_\pm^2} = a_{33} + \frac{A}{2}\left([\vec{N}\vec{C}']\bar{\alpha}[\vec{N}\vec{C}''] \mp \sqrt{[\vec{N}\vec{C}']\bar{\alpha}[\vec{N}\vec{C}']\cdot[\vec{N}\vec{C}'']\bar{\alpha}[\vec{N}\vec{C}'']}\right). \qquad (9)$$

Нетрудно убедиться, что (9) есть не что иное, как дисперсионная формула ионосферы для случая продольного распространения (так как диадное представление тензора ε_{ik}^{-1} было сделано в системе координат с осью z по направлению внешнего магнитного поля).

Что касается (8), то, пользуясь инвариантным критерием круговой поляризации $\vec{H}^2=0$ [2], легко показать, что это уравнение дает круговую поляризацию обеих волн, как это и должно быть в случае продольного распространения.

Для решения задачи о распространении электромагнитных волн в гиротропной однородной среде в случае произвольного направления распространения необходимо аналогичным образом написать тензоры и векторы, входящие в (8) и (9), в нужной системе координат.

Таким образом, пользуясь инвариантными методами, мы получили решение задачи о распространении электромагнитных волн в однородной гиротропной среде в случае продольного распространения.

Заметим, что одним из возможных приложений полученных результатов является решение задачи о распространении среднего поля в гиротропной среде со случайными неоднородностями, причем диэлектрические свойства среды характеризуются эффективным тензором диэлектрической проницаемости.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. Д. Гусеву за внимание к работе и обсуждение полученных результатов, а также проф. П. К. Рашевскому за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюлин И. А. «Изв. высш. уч. зав.», радиофизика, 7, № 2, 273, 1964.
2. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Изд-во АН БССР, Минск, 1958.
3. Ратклифф Дж. А. Магнитно-ионная теория и ее приложения к ионосфере. ИЛ, М., 1962.
4. Федоров Ф. И. «Тр. Ин-та физики и математики», т. 2. Изд-во АН БССР, Минск, 1957, стр. 230.
5. Федоров Ф. И. «Оптика и спектроскопия», 6, 85, 1959.
6. Федоров Ф. И. «Оптика и спектроскопия», 6, 377, 1959.
7. Бокуть Б. В., Федоров Ф. И. «Оптика и спектроскопия», 6, 537, 1959.
8. Бокуть Б. В., Федоров Ф. И. «Оптика и спектроскопия», 15, 797, 1963.

Поступила в редакцию
12. 6 1963 г.

Кафедра
распространения радиоволн