

В. С. УРАЛЬСКАЯ

## ПОЛЯРНЫЕ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

### Введение

Полярные орбиты искусственных небесных тел представляют определенный интерес для практики. Во-первых, по наблюдениям спутников, движущихся по полярным орбитам, можно наиболее точно определить параметры, характеризующие трехосность Земли. Во-вторых, полярные орбиты позволяют миновать радиационные пояса и в этом смысле являются интересными для космических полетов.

Настоящая работа основана на результатах работы [1], в которой задача о движении искусственных спутников Земли интегрируется в квадратурах при условии, если в выражении потенциала земного тяготения отбросить некоторые члены, имеющие второй порядок малости относительно сжатия Земли.

В отличие от работы [2], где предполагается, что Земля является симметричным относительно экватора телом, мы рассматриваем более общий случай, когда учитываются также зональные гармоники нечетного порядка, характеризующие асимметрию Земли относительно экваториальной плоскости. Кроме того, мы не ограничиваемся исследованием лишь тех траекторий, которые лежат в конечной части пространства. С другой стороны, в настоящей работе более подробно изучен спутниковый случай движения: выведены все необходимые формулы для вычисления координат спутника для любого момента времени.

### § 1. Постановка задачи

Возьмем неподвижную систему координат с началом в центре масс Земли так, чтобы оси  $x$  и  $y$  лежали в плоскости экватора, а ось  $z$  была направлена в северный полюс мира. Тогда уравнения движения искусственного спутника Земли запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

где  $V$  — потенциал земного тяготения. Как показано в [1], потенциал  $V$  с точностью до членов порядка квадрата сжатия Земли можно аппроксимировать силовой функцией  $U$  задачи двух неподвижных центров с комплекс-

ными массами  $\frac{M}{2}(1+i\sigma)$  и  $\frac{M}{2}(1-i\sigma)$ , расположенными на мнимом расстоянии  $2ic$  друг от друга. Эта функция имеет вид

$$U = \frac{fM}{2} \left( \frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right),$$

где  $f$  — постоянная тяготения,  $M$  — масса Земли,  $i$  — мнимая единица,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2}.$$

Разлагая функцию  $U$  в ряд по полиномам Лежандра, получим

$$U = \frac{fM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n \left( \frac{z}{r} \right) \right], \quad (1)$$

где коэффициенты  $\gamma_n$  определяются по формуле

$$\gamma_n = \frac{c^n}{2} [(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n].$$

Числовые значения постоянных  $c$  и  $\sigma$ , при которых функция  $U$  наилучшим образом аппроксимирует потенциал земного тяготения, можно вычислить, например, исходя из работы Kozai [3]. Они равны:  $c=209,8$  км,  $\sigma=-0,032$ . Тогда первые три члена разложения (1) будут совпадать с соответствующими первыми членами разложения потенциала притяжения Земли.

Как показано в работе [1], задача о движении спутника в гравитационном поле с потенциалом  $U$  полностью решается в квадратурах.

Общее решение этой задачи дается формулами

$$x = c \sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \sin \omega, \quad (*)$$

$$y = c \sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \cos \omega,$$

$$z - c\sigma = c\lambda\mu,$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\omega$  определяются из квадратур

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \tau + c_3, \quad (2)$$

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}} = \tau + c_4,$$

$$\omega = c_1 \int \frac{(\lambda^2 + \mu^2) d\tau}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} + c_5, \quad (3)$$

причем

$$f(\lambda) = \frac{2h}{c^2} \lambda^4 + \frac{2fM}{c^3} \lambda^3 + \left( \frac{2h}{c^2} + 2c_2 \right) \lambda^2 + \frac{2fM}{c^3} \lambda + 2c_2,$$

а

$$\varphi(\mu) = -\frac{2h}{c^2} \mu^4 + \frac{2fM\sigma}{c^3} \mu^3 + \left( \frac{2h}{c^2} + 2c_2 \right) \mu^2 - \frac{2fM\sigma}{c^3} \mu - 2c_2.$$

Здесь  $h, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  означают произвольные постоянные интегрирования, а переменная  $\tau$  связана со временем  $t$  посредством формулы

$$dt = (\lambda^2 + \mu^2) d\tau.$$

В данной работе будем рассматривать полярные орбиты, т. е. орбиты, лежащие в меридианных плоскостях. Не нарушая общности, можно положить  $y=0$  и рассматривать орбиты, лежащие в плоскости  $hoz$ .

Для таких полярных орбит циклическая координата  $\omega$  должна быть постоянной и равной  $\frac{\pi}{2}$ . Из формулы (3) видно, что при этом постоянная  $c_1$  должна обращаться в нуль, а постоянная  $c_5 = \frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, положение спутника будет полностью определяться двумя координатами  $\lambda$  и  $\mu$ , которые связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = c \sqrt{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)},$$

$$z - c\delta = c\lambda\mu.$$

Новые переменные  $\lambda$  и  $\mu$  имеют следующий геометрический смысл. Из формул (\*) находим

$$\frac{x^2}{c^2(1 + \lambda^2)} + \frac{(z - c\delta)^2}{c^2\lambda^2} = 1, \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{c^2(1 - \mu^2)} - \frac{(z - c\delta)^2}{c^2\mu^2} = 1. \quad (5)$$

Если  $\lambda = \text{const}$ , то уравнение (4) есть уравнение эллипса, центр которого смещен по оси  $z$  на величину  $c\delta$ . Если  $\mu = \text{const}$ , то уравнение (5) дает семейство гипербол.

## § 2. Качественный анализ при $h < 0$

Рассмотрим сначала квадратуру для  $\lambda$ . Поскольку  $f(\lambda)$  входит под знак радикала, то движение возможно в том случае, когда  $f(\lambda) \geq 0$ . Постоянная  $h$  может принимать любые действительные значения. Как и в задаче двух точек, проведем отдельные исследования при  $h < 0$ ,  $h = 0$ ,  $h > 0$ .

Два корня многочлена  $f(\lambda)$  равны  $\pm i$ , а два других корня, которые обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , причем  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , определяются по формуле

$$\lambda_{1,2} = -\frac{fM}{2hc} \pm \sqrt{\frac{f^2M^2}{4h^2c^2} - \frac{c_2c^2}{h}}. \quad (6)$$

В зависимости от знака дискриминанта  $D = \frac{f^2M^2}{4h^2c^2} - \frac{c_2c^2}{h}$  может представиться три случая.

1. Если  $D > 0$ , то корни будут действительными и различными. При этом постоянная  $c_2$  удовлетворяет условию

$$\frac{f^2M^2}{4hc^2} < c_2 < \infty. \quad (7)$$

2. Корни будут равными, если  $D = 0$ .

3. Корни будут комплексными, если  $D < 0$ .

Так как коэффициент при  $\lambda^4$  в многочлене  $f(\lambda)$  отрицательный, то этим трем видам корней будут соответствовать следующие значения  $\lambda$ , при которых  $f(\lambda) \geq 0$ . В первом случае  $\lambda$  изменяется в пределах  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , причем  $c_2$  удовлетворяет условию (7). Во втором случае  $\lambda$  является постоянной и равной  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{fM}{2hc}$ . При этом  $c_2 = \frac{f^2 M^2}{4hc^4}$ . В третьем случае  $\lambda$  не имеет действительных значений, т. е. движение невозможно при  $-\infty < c_2 < \frac{f^2 M^2}{4hc^4}$ .

Рассмотрим аналогичный многочлен  $\varphi(\mu)$  для переменной  $\mu$ . Он также должен удовлетворять условию  $\varphi(\mu) \geq 0$ . Для того чтобы выполнялось это неравенство, необходимо, чтобы  $\mu$  лежало в промежутке между корнями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются из формулы

$$\mu_{1,2} = -\frac{fM\sigma}{2hc} \pm \sqrt{\frac{f^2 M^2 \sigma^2}{4h^2 c^2} + \frac{c_2 c^2}{h}}$$

Остальные два корня многочлена  $\varphi(\mu)$  имеют значения  $\pm 1$ .

Исследуя корни  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , найдем, что неравенство  $\varphi(\mu) \geq 0$  будет иметь место в следующих случаях:

Когда  $-\infty < c_2 < -\frac{f^2 M^2 \sigma^2}{4hc^4}$ , то при  $|h| > \frac{fM\sigma}{2c}$  многочлен  $\varphi(\mu)$  неотрицателен, если  $\mu_1 < \mu < \mu_2$ , причем  $\mu_1$  и  $\mu_2$  меньше единицы.

Когда  $c_2$  изменяется в тех же пределах, корень  $\mu_1$  по абсолютной величине меньше единицы, а  $|\mu_2| > 1$ , неравенство  $\varphi(\mu) \geq 0$  удовлетворяется при всех  $\mu$ , лежащих в интервале  $(\mu_1, 1)$ .

Если корни  $\mu_1$  и  $\mu_2$  по абсолютной величине больше единицы, то многочлен  $\varphi(\mu)$  неотрицателен во всем интервале  $(-1, 1)$ .

Если  $c_2 = -\frac{f^2 M^2 \sigma^2}{4hc^4}$ , то  $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{fM\sigma}{2hc}$ . Многочлен  $\varphi(\mu)$  неотрицателен в точке  $\mu = \mu_1 = \mu_2$ .

При  $c_2 = -\frac{f^2 M^2 \sigma^2}{4hc^4}$  и  $h = -\frac{fM\sigma}{2c}$  корни  $\mu_1$  и  $\mu_2$  равны единице  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . При этом многочлен  $\varphi(\mu)$  неотрицателен только при  $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$ .

Если  $c_2$  изменяется в пределах  $-\frac{f^2 M^2 \sigma^2}{4hc^4} < c_2 < \infty$ , то корни  $\mu_1$  и  $\mu_2$  комплексны и многочлен  $\varphi(\mu)$  будет всюду отрицательным.

Рассматривая случаи, когда многочлены  $f(\lambda)$  и  $\varphi(\mu)$  являются неотрицательными, мы приходим к выводу, что при  $h < 0$  имеет место 6 типов движения.

1. При  $|h| > \frac{fM\sigma}{2c}$  переменные  $\lambda$  и  $\mu$  изменяются в пределах  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  и  $\mu_1 < \mu < \mu_2$ . Это означает, что в этом случае движение происходит в области, ограниченной двумя эллипсами и двумя гиперболами (рис. 1). Эти траектории можно назвать баллистическими, ибо они обязательно приведут к соударению с поверхностью Земли.

2. Движение невозможно через один из полюсов, что происходит от асимметрии Земли относительно плоскости ее экватора.

3. Движение в эллиптическом кольце — спутниковый случай (рис. 2). В этом случае возможны периодические орбиты.

4. Движение по эллипсу.

5. Движение по гиперболе.

6. Движение по вертикали — траектории геофизических ракет.

Таким образом, среди возможных движений есть баллистические траектории (1 и 2-й случаи), когда траектория, как это можно пока-

зять, обязательно пересечется с Землей, и спутниковые, причем как частный случай есть движение по эллипсу. Для каждого типа движения можно обратить эллиптические интегралы и получить рабочие формулы для вычисления координат. Для спутникового типа движения мы это сделаем несколько ниже.

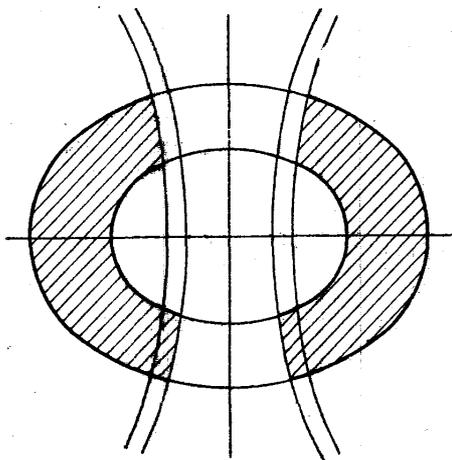


Рис. 1. Движение возможно в области, ограниченной двумя эллипсами и двумя гиперболами (область заштрихована)

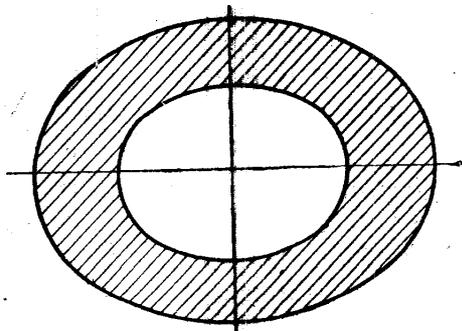


Рис. 2. Движение происходит в области между двумя эллипсами. Траектория движения попеременно касается эллипсов

### § 3. Исследование интегралов при $h > 0$ и $h = 0$

Многочлен  $f(\lambda)$  может удовлетворять условию  $f(\lambda) \geq 0$  при  $h > 0$ , если только  $\lambda$  лежит вне промежутка между корнями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т. е. при  $\lambda > \lambda_2$  и  $\lambda < \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются формулами (6).

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут действительными, если  $-\infty < c_2 < \frac{f^2 M^2}{4hc^4}$ . При этом многочлен  $f(\lambda)$  положителен при  $\lambda > \lambda_2$  и  $\lambda < \lambda_1$ .

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут равными  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{fM}{2hc}$ , если  $c_2 = \frac{f^2 M^2}{4hc^4}$ . При этом многочлен  $f(\lambda)$  везде строго положителен, кроме точки  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , где он обращается в нуль.

Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексны, если  $\frac{f^2 M^2}{4hc^4} < c_2 < \infty$ . В этом случае многочлен  $f(\lambda)$  всюду положителен.

Многочлен  $\varphi(\mu) \geq 0$ , если  $\mu$  меньше меньшего из корней  $\mu_1$  и больше большего  $\mu_2$ , т. е.  $\mu < \mu_1$  и  $\mu > \mu_2$ . Тогда могут представиться случаи, когда:

существуют две области, где движение возможно

$$-1 < \mu < \mu_1, \mu_2 < \mu < 1,$$

область возможного движения одна

$$\mu_2 < \mu < 1,$$

движение возможно везде

$$-1 < \mu < 1.$$

Если комбинировать условия, где многочлены  $f(\lambda)$  и  $\varphi(\mu)$  больше нуля, то получим 4 типа движения.

1. Движение возможно везде вне большого эллипса и внутри малого.

2. Движение по гиперболе.

3. Движение у полюсов.

4. Движение у одного из полюсов из-за асимметрии северного и южного полушарий Земли.

При  $h=0$  многочлен  $f(\lambda)$  понижает свой порядок на единицу и приобретает вид

$$f(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \left( \frac{2fM}{c^3} \lambda - 2c_2 \right).$$

Неравенство  $f(\lambda) \geq 0$  удовлетворяется при  $\lambda > \lambda_3$ , где  $\lambda_3 = \frac{c_2 c^3}{fM}$ .

Многочлен  $\varphi(\mu)$  при  $h=0$  будет иметь корни  $\mu_{1,2} = \pm 1$  и  $\mu_3 = -\frac{c_2 c^3}{fM\sigma}$ . Неравенство  $\varphi(\mu) \geq 0$  удовлетворяется при  $\mu < \mu_3$ .

Тогда при  $h=0$  возможны 2 типа движения.

1. Движение около полюсов.

2. Движение возможно везде.

#### § 4. Полярные орбиты искусственных спутников Земли

Обратим эллиптические интегралы для  $\lambda$  и  $\mu$  в случае спутниковых орбит. Для этого перейдем от постоянных  $c_2$  и  $h$  к новым постоянным  $a$  и  $e$  по формулам

$$c\lambda_1 = a(1 - e), \quad c\lambda_2 = a(1 + e). \quad (8)$$

Кроме того, введем безразмерный параметр  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}.$$

Тогда постоянные интегрирования  $h$  и  $c_2$  можно выразить через эти новые элементы

$$h = -\frac{fM}{2a}, \quad c_2 = -\frac{fM}{2\varepsilon^4 a^3 (1 - e^2)^3}.$$

С помощью таблиц [4] находим выражение для  $\lambda$

$$c\lambda = \frac{\tilde{p}(1 + \kappa \cos v)}{1 + \tilde{e} \cos v},$$

где коэффициенты  $\tilde{p}$ ,  $\kappa$  и  $\tilde{e}$  определяются из формул

$$\tilde{p} = a(1 - e^2)(1 + \varepsilon^2 e^2 - \varepsilon^4 e^2),$$

$$\kappa = -\varepsilon^2 e [1 - \varepsilon^2 (1 + e^2)],$$

$$\tilde{e} = e [1 - \varepsilon^2 (1 - e^2) + \varepsilon^4 (1 - e^2)].$$

Аргумент  $v$  связан с переменной  $\tau$  соотношением

$$v = a\sigma_1 (\tau - \tau_0), \quad (9)$$

где коэффициент  $\sigma_1$  после разложения по степеням  $\varepsilon$  имеет вид

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{fM}}{\varepsilon^2 a^{3/2} (1 - e^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (1 + e^2) - \frac{\varepsilon^4}{8} (1 + 10e^2 + e^4) + \frac{\varepsilon^6}{16} (1 + 27e^2 + 27e^4 + e^6) \right]. \quad (10)$$

В разложении (10) отброшены члены, имеющие порядок выше, чем  $\varepsilon^4$ . Соотношение (9) можно переписать в виде

$$\sigma_1 (\tau - \tau_0) = \int \frac{dv}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 v}}, \quad (11)$$

где модуль интеграла  $k_1$  имеет вид

$$k_1^2 = \varepsilon^2 e^2 [1 - \varepsilon^2 (2 + e^2)].$$

Разложим подынтегральное выражение (11) в ряд по степеням  $k_1^2$  или  $\varepsilon^2$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 (\tau - \tau_0) = v & \left( 1 + \frac{\varepsilon^2 e^2}{4} - \frac{\varepsilon^4 e^2}{2} - \frac{7}{64} \varepsilon^4 e^4 \right) + \\ & + \left( -\frac{\varepsilon^2 e^2}{8} + \frac{\varepsilon^4 e^2}{4} + \frac{\varepsilon^4 e^4}{32} \right) \sin 2v + \frac{3}{256} \varepsilon^4 e^4 \sin 4v. \end{aligned} \quad (12)$$

После обращения интеграла (2) получим следующее выражение для  $\mu$ :

$$\mu = \frac{b + \sin u}{1 + b \sin u},$$

где

$$b = \varepsilon \sigma [1 + \varepsilon^2 (1 - e^2)],$$

$$u = a t \sigma_2 (\tau - \tau_0),$$

или, что то же самое,

$$\sigma_2 (\tau - \tau_0) = \int \frac{du}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 u}}, \quad (13)$$

где  $\sigma_2$  определяется из формулы

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{fM}}{\varepsilon^2 a^{3/2} (1 - e^2)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2} - \frac{3}{4} \varepsilon^4 \sigma^2 (1 - e^2) \right].$$

Модуль интеграла (13) имеет выражение

$$k_2^2 = \varepsilon^2 (1 - e^2 + \sigma^2).$$

Разложим подынтегральное выражение (13) в ряд, тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_2 (\tau - \tau_0) = u & \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} (1 - e^2 + \sigma^2) + \frac{9}{64} \varepsilon^4 (1 - e^2)^2 \right] - \\ & - \left[ \frac{\varepsilon^2}{8} (1 - e^2 + \sigma^2) + \frac{3}{32} \varepsilon^4 (1 - e^2)^2 \right] \sin 2u + \frac{3}{256} \varepsilon^4 (1 - e^2)^2 \sin 4u. \end{aligned} \quad (14)$$

Установим теперь связь между  $u$  и  $v$ . Исключим из соотношений (12) и (14) переменную  $\tau$ . Тогда получим уравнение вида

$$z - a - \varepsilon^2 f(z) = 0, \quad (15)$$

где  $z = u$ ,

$$a = (1 + \nu)v + \omega + B_2 \sin 2v + B_4 \sin 4v,$$

$$f(z) = A_2 \sin 2u - A_4 \sin 4u.$$

Уравнение (15) является уравнением Лагранжа; его решение имеет вид

$$z = a + \varepsilon^2 f(a) + \frac{\varepsilon^4}{2} \cdot \frac{d}{da} [f^2(a)] + \dots$$

Для нашего случая получим

$$u = (1 + \nu)v + \omega + B_2 \sin 2v + B_4 \sin 4v + A_2 \sin 2u_0 + \\ + A_4 \sin 4u_0 + A_{22} \sin 2(u_0 + v) + A_{2,-2} \sin 2(u_0 - v). \quad (16)$$

Здесь через  $u_0$  обозначена величина

$$u_0 = (1 + \nu)v + \omega,$$

где  $\nu$  характеризует вековое движение перигея. Коэффициенты уравнения (16) определяются по формулам

$$1 + \nu = 1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 (1 + \sigma^2) + \varepsilon^4 \left( \frac{27}{64} + \frac{39}{32} e^2 \right),$$

$$B_2 = -\frac{\varepsilon^2 e^2}{8} + \frac{\varepsilon^4 e^2}{32} (11 + 2e^2),$$

$$B_4 = \frac{3}{256} \varepsilon^4 e^4,$$

$$A_2 = -\frac{\varepsilon^2}{8} (1 - e^2 + \sigma^2) - \frac{\varepsilon^4}{16} (1 - e^2)^2,$$

$$A_4 = \frac{\varepsilon^4}{256} (1 - e^2)^2, \quad A_{22} = A_{2,-2} = \frac{\varepsilon^4 e^2}{64} (1 - e^2).$$

Покажем, как радиус-вектор  $r$  и координата  $z$  выражаются через новые величины  $a$ ,  $e$  и  $\varepsilon$ . Для этого радиус-вектор  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  представим в виде

$$r = c\lambda \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{\lambda^2} + \frac{2\sigma\mu}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu^2}}.$$

Разложим это выражение в ряд, учитывая, что  $\frac{1}{\lambda}$  имеет порядок  $\varepsilon$ , а  $\sigma$  одного порядка с  $\varepsilon$ . Тогда для  $r$  получим следующее выражение:

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{e} \cos v} \left[ \sum_{ij} K_{ij} \cos(iu + jv) + \sum_{km} L_{km} \sin(ku + mv) \right], \quad (17)$$

где коэффициенты  $K_{ij}$  и  $L_{km}$  определяются формулами

$$K_{00} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} (2 + e^2) + \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{8} (6 + e^2) - \varepsilon^4 \left( \frac{3}{64} + \frac{41}{64} e^2 + \frac{9}{512} e^4 \right),$$

$$K_{01} = \varepsilon^2 e \left[ -\frac{1}{2} + \sigma^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{9}{16} + \frac{35}{64} e^2 \right) \right],$$

$$K_{02} = \varepsilon^2 e^2 \left[ \frac{1}{8} (1 + \sigma^2) - \varepsilon^2 \left( \frac{9}{64} + \frac{3}{128} e^2 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
K_{03} &= \frac{\varepsilon^4 e^3}{64}, & K_{04} &= -\frac{3}{512} \varepsilon^4 e^4, \\
K_{20} &= \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{8} (2 + e^2) + \frac{\sigma^2}{8} (6 + e^2) - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{16} + \frac{11}{16} e^2 + \frac{3}{128} e^4 \right) \right], \\
K_{21} &= \varepsilon^2 e \left[ \frac{1}{4} + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{e^2}{4} (1 + e^2) \right], \\
K_{22} &= \varepsilon^2 e^2 \left[ \frac{1}{16} (1 + \sigma^2) - \varepsilon^2 \left( \frac{3}{32} + \frac{e^2}{64} \right) \right], \\
K_{23} &= 0, & K_{24} &= -\frac{\varepsilon^4 e^4}{256}, \\
K_{40} &= -\varepsilon^4 \left[ \frac{1}{64} + \frac{3}{64} e^2 + \frac{3}{512} e^4 \right], \\
K_{41} &= -\varepsilon^4 e \left( \frac{1}{32} + \frac{3}{128} e^2 \right), & K_{42} &= -\varepsilon^4 e^2 \left( \frac{3}{128} + \frac{e^2}{256} \right), \\
K_{43} &= -\frac{\varepsilon^4 e^3}{128}, & K_{44} &= -\frac{\varepsilon^4 e^4}{1024}. \\
L_{10} &= \varepsilon \sigma \left[ 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{3}{8} + \frac{21}{16} e^2 \right) \right], & L_{20} &= -\varepsilon^3 \sigma \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{16} e^2 \right), \\
L_{11} &= \varepsilon \sigma e \left[ \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \left( \frac{15}{16} + \frac{3}{64} e^2 \right) \right], & L_{21} &= -\varepsilon^3 \sigma e \left( \frac{7}{16} + \frac{3}{64} e^2 \right), \\
L_{12} &= -\frac{5}{32} \varepsilon^3 \sigma e^2, & L_{22} &= -\frac{5}{32} \varepsilon^3 \sigma e^2, \\
L_{13} &= -\frac{\varepsilon^3 \sigma}{64} e^3, & L_{23} &= -\frac{\varepsilon^3 \sigma}{64} e^3.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем выражение для  $z$

$$z = \frac{\tilde{p}}{1 + \varepsilon \cos v} \left[ \sum_{ij} P_{ij} \cos(iu + jv) + \sum_{km} Q_{km} \sin(ku + mv) \right], \quad (18)$$

где коэффициенты  $P_{ij}$  и  $Q_{km}$  имеют значения

$$\begin{aligned}
P_{00} &= \frac{\varepsilon \sigma}{2} [3 + \varepsilon^2 (1 - 3e^2)], & Q_{10} &= 1 - \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{4}, \\
P_{01} &= \varepsilon \sigma e \left( 1 - \frac{3}{2} e^2 \right), & Q_{30} &= \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{4}, \\
P_{20} &= \frac{\varepsilon \sigma}{2} [1 + \varepsilon^2 (1 - e^2)], & Q_{11} &= Q_{1,-1} = -\frac{\varepsilon^2 e}{2} [1 - \varepsilon^2 (1 + e^2)], \\
P_{21} &= P_{2,-1} = -\frac{\varepsilon^3 \sigma}{4} e.
\end{aligned}$$

Остальные коэффициенты имеют порядок  $\varepsilon^6$  и выше.

Чтобы получить полное решение задачи, надо выразить  $v$  как функцию времени  $t$ . Для времени  $t$  имеем выражение  $t = \int (\lambda^2 + \mu^2) dt$ .

После вычисления этого интеграла получим соотношение, аналогичное уравнению Кеплера

$$n(t - t_0) = E - e \sin E + \gamma v + d_{01} \sin v + d_{02} \sin 2v + \\ + d_{20} \sin 2u_0 + d_{40} \sin 4u_0 + d_{22} \sin 2(u_0 + v) + \\ + d_{2,-2} \sin 2(u_0 - v) + d_{10} \cos u_0 + d_{30} \cos 3u_0, \quad (19)$$

где  $n$  — среднее суточное движение. Величина его равна  $n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}}$ ,  $E$  — величина, аналогичная эксцентрической аномалии. Она определяется равенством

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-\tilde{e}}{1+\tilde{e}}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}.$$

Коэффициенты уравнения (19) имеют значения

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{3}{16} \varepsilon^4 (1 - e^2)^{3/2}, & d_{40} &= -\frac{\varepsilon^4}{64} (1 - e^2)^{5/2}, \\ d_{01} &= \frac{\varepsilon^4 e}{4} (1 - e^2)^{3/2}, & d_{22} &= -d_{2,-2} = \frac{\varepsilon^4 e^2}{32} (1 - e^2)^{3/2}, \\ d_{02} &= \frac{\varepsilon^4 e^2}{32} (1 - e^2)^{3/2}, & d_{10} &= -\frac{\varepsilon^2 \sigma}{2} (1 - e^2)^{3/2}, \\ d_{20} &= -\left[ \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{16} (1 - e^2) \right] (1 - e^2)^{3/2}, & d_{30} &= -\frac{\varepsilon^3 \sigma}{6} (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача интегрирования уравнений движения в случае орбиты, заключенной в эллиптическом кольце, полностью решена. Приведенные формулы (16), (17), (18), (19) дают общее решение задачи в зависимости от 4 произвольных постоянных  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  и  $t_0$ .

Выясним теперь геометрический смысл постоянных  $a$  и  $e$ . Как видно из уравнений (8), движение происходит на плоскости, ограниченной двумя эллипсами. Траектория движения попеременно касается обоих эллипсов. Большая полуось внешнего эллипса равна  $\sqrt{a^2(1+e)^2+c^2}$ , внутреннего  $\sqrt{a^2(1-e)^2+c^2}$ . Малые полуоси внутреннего и внешнего эллипсов соответственно равны  $a(1-e)$  и  $a(1+e)$ . Таким образом, постоянные  $a$  и  $e$  полностью определяют ту область, где происходит движение.

### Выводы

В настоящей работе были исследованы полярные орбиты искусственных небесных тел. Было установлено и качественно исследовано 12 типов орбит. Некоторые орбиты принадлежат к классам баллистических траекторий, которые пересекают поверхность Земли. Другие орбиты являются спутниковыми. Имеются также уходящие траектории, движение по которым является неограниченным в пространстве.

Наиболее подробно исследованы спутниковые орбиты. Для этого случая получены конечные формулы, представляющие координаты спутника как функции некоторой промежуточной переменной, и найдена связь между этой промежуточной переменной и временем. Так как эти формулы содержат эллиптические функции, которые не всегда являются удобными, получены разложения координат спутника в тригономет-

рические ряды. При этом сохранены все члены до квадрата сжатия включительно.

Большой интерес представляет изучение тех неравенств в движении искусственных спутников, которые обусловлены асимметрией Земли относительно плоскости ее экватора. Оказалось, что асимметрия Земли не приводит к появлению вековых членов во всех координатах искусственных спутников. Но, с другой стороны, имеются весьма значительные периодические неравенства, вызванные асимметрией.

В заключение выражаю глубокую благодарность Е. П. Аксенову за ценные советы и замечания, сделанные в процессе выполнения работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 1962.
2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики; астрономии, № 5, 1962.
3. Kozai Y. *Astron J.*, 66, № 1, 1961.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений: Гостехиздат, М. — Л., 1962.

Поступила в редакцию  
18. 7 1963 г.

Кафедра  
небесной механики и гравиметрии