Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1964

Ф. А. ЖИВОПИСЦЕВ

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НУКЛОНОВ НА ЯДРАХ И МЕТОД КВАНТОВЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрено неупругое рассеяние нуклонов на ядре типа магическое плюс нуклон (дырка) при малых энергиях. Показано, что задача вычисления S-матрицы связана с нахождением двухчастичной функции Грина. При этом не делается никаких предположений о слабости взаимодействия и механизме ядерного процесса. Получено приближение для T-матрицы, которое позволяет находить сечения ядерных реакций без использования обычной теории возмущения (борновского ряда). В первом приближении неупругое рассеяние нуклонов на ядре с одной частицей вне заполненной оболочки определяется амплитудой рассеяния свободных нуклонов и оптическим потенциалом магического ядра. Проведено сравнение с приближением нулевого радиуса действия ядерных сил.

Введение

Теория взаимодействия нуклонов со сложным ядром относится к задачам многих тел. Новым методом решения задачи многих тел является метод квантовых функций Грина [1, 2]. Преимущество метода функций Грина состоит в том, что он позволяет рассматривать систему взаимодействующих частиц без использования обычной теории возмущения. Это существенно для задачи о взаимодействии нуклона с ядром, так как ее нельзя рассматривать в борновском приближении. Подход к ядерным реакциям, исходящий из функций Грина, позволяет построить теорию, которая объясняет большую группу ядерных реакций при малых энергиях с единой точки зрения.

В данной работе рассматриваются ядерные реакции: (n, n'), (p, p'), (n, p), (p, n) на ядре типа магическое плюс нуклон (дырка) и ядерные реакции (d, n), (d, p), (d, np) на магическом ядре с энергиями падающих частиц ниже порога возбуждения магического ядра-остова. Например, для ядра O^{17} энергия входного канала $E_\alpha \leqslant 6$ *Мэв*,
для ядра Ca^{41}: $E_\alpha \leqslant 3{,}35$ *Мэв*,
для ядра Pb^{209}: $E_\alpha \leqslant 2{,}6$ *Мэв*.

При этих энергиях падающих частиц магическое ядро-остов в конечном состоянии можно считать невозбужденным. Для рассматриваемых реакций ядро-мишень является ядром с одной частицей вне заполненной оболочки или с одной дыркой в заполненной оболочке, либо магическим ядром. Мы предполагаем, что первые возбужденные состояния ядра типа магическое плюс нуклон (дырка) хорошо интерпретируются как одночастичные (дырочные) уровни. Указанные выше предположения являются естественными и единственными при выводе точных выражений для S-матрицы. S-матрица для указанных реакций связывается с двухчастичной функцией Грина, в которой заключена вся информация о физических свойствах взаимодействующих частиц.

Резонансы в сечении рассеяния определяются полюсами аналитического продолжения двухчастичной функции Грина. Матричные элементы T-матрицы рассеяния определяются соответствующими матричными элементами фурье-образа вершинной части. Показано, что задача неупругого рассеяния нуклона на ядре типа магическое плюс нуклон в первом приближении определяется двухчастичной амплитудой рассеяния свободных нуклонов и оптическим потенциалом магического ядра.

S-матрица рассеяния и двухчастичная функция Грина

Рассмотрим ядерную реакцию общего вида

$$A + \alpha \to B + \beta.$$

При столкновении с перераспределением нуклонов система частиц описывается полным гамильтонианом H

$$H = \int \psi^{+}(\vec{x}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right] \psi(\vec{x})\, d\vec{x} +$$
$$+ \frac{1}{2} \iint \psi^{+}(\vec{x})\, \psi^{+}(\vec{x}')\, U(\vec{x} - \vec{x}')\, \psi(\vec{x}')\, \psi(\vec{x})\, d\vec{x}\, d\vec{x}', \quad (1)$$

где $U(\vec{x} - \vec{x}')$ — потенциал парного взаимодействия, $\psi^{+}(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$ — операторы рождения и поглощения нуклонов.

Начальное состояние системы описывается вектором $|\varphi_\alpha >$, удовлетворяющим уравнению

$$H_{0\alpha} | \varphi_\alpha > = E_\alpha | \varphi_\alpha >, \quad H = H_{0\alpha} + H_{I\alpha},$$
$$| \varphi_\alpha > = \int d\vec{x}\, \psi_\alpha^{+}(\vec{x})\, | A > \varphi_\alpha(\vec{x}),$$
$$H | A > = E_A | A >, \quad (2)$$

где $\psi_\alpha^{+}(\vec{x})$ — оператор рождения частицы α. Аналогично для конечного состояния $|\varphi_\beta >$.

Будем обозначать «сходящуюся» и «расходящуюся» волны (собственные векторы H), соответствующие $|\varphi_\alpha >$ и $|\varphi_\beta >$, через $|\alpha^{(+)} >$ и $|\beta^{(-)} >$ соответственно. Эти векторы удовлетворяют уравнению Липпмана-Швингера [3]:

$$|\alpha^{(+)} > = | \varphi_\alpha > + \frac{H_{I\alpha}}{E_\alpha - H_{0\alpha} + i\varepsilon} |\alpha^{(+)} >,$$
$$|\beta^{(-)} > = | \varphi_\beta > + \frac{H_{I\beta}}{E_\beta - H_{0\beta} - i\varepsilon} |\beta^{(-)} >. \quad (3)$$

Векторы состояния $|\alpha^{(+)} >$ и $|\beta^{(-)} >$ можно представить в интегральной форме [4]:

$$|\alpha^{(+)} > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int d\vec{x} \int_{-\infty}^{0} dx\, \psi_\alpha^{+}(t, t)\, | A > \varphi_\alpha(\vec{x}) \exp(-i \epsilon_\alpha t)\, g^{(+)}(\varepsilon, t), \quad (4)$$

$$|\beta^{(-)}> = \lim_{\varepsilon\to 0}\int d\vec{x}\int_0^{\infty} dt\, \psi_\beta^+(\vec{x}, t)\, |B> \varphi_\beta(\vec{x}) \exp(-i\epsilon_\beta t)\, g^{(-)}(\varepsilon, t), \quad (5)$$

где

$$g^{(+)}(\varepsilon, t) = \begin{cases} \varepsilon \exp(\varepsilon t), & t < 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

$$g^{(-)}(\varepsilon, t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \varepsilon \exp(-\varepsilon t), & t > 0, \end{cases}$$

$E_\alpha = \epsilon_\alpha + E_A$, ϵ_α — энергия падающей частицы α, E_A — энергия ядра-мишени A; $E_\beta = \epsilon_\beta + E_B$, ϵ_β — энергия частицы β, E_B — энергия конечного ядра B.

Для простоты изложения ограничимся ядерными реакциями, для которых ядро-мишень A является ядром типа магическое плюс нуклон:

$$|A> = \int \psi^+(\vec{x})\, |A_0> \varphi_\alpha^B(\vec{x})\, d\vec{x}, \quad (6)$$

где $|A_0>$ — вектор состояния магического ядра-остова, играющего роль физического вакуума; $\varphi_\alpha^B(\vec{x})$ — волновая функция надоболочечного нуклона. Конечное ядро B описывается либо вектором состояния, аналогичным $|A>$, либо $|A_0>$, так как для ядерных реакций с падающими частицами, имеющими энергию до нескольких *Мэв*, магическое ядро можно считать в конечном состоянии не возбужденным.

Используя определение S-матрицы в стационарном формализме рассеяния [5]

$$S_{\beta\alpha} = <\beta^{(-)}|\alpha^{(+)}>, \quad (7)$$

получим выражение для $S_{\beta\alpha}$-матрицы через двухчастичную функцию Грина $G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t;\ \vec{x}_3, \vec{x}_4, t')$

$$S_{\beta\alpha} = \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, d\vec{x}_3\, d\vec{x}_4 \int_{-\infty}^{0} dt' \int_0^{\infty} dt \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_\beta t\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_\alpha t'\right) g^{(-)}(\varepsilon, t)\, g^{(+)}(\varepsilon', t')\, \varphi_\beta^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\, G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t;\ \vec{x}_3, \vec{x}_4, t') \times$$

$$\times \varphi_\alpha(\vec{x}_3, \vec{x}_4), \quad (8)$$

где

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t;\ \vec{x}_3, \vec{x}_4, t') = <A_0|\, T\{\psi(\vec{x}_1, t)\, \psi(\vec{x}_2, t)\, \psi^+(\vec{x}_3, t')\, \psi^+(\vec{x}_4, t')\}\, |A_0>,$$

$\varphi_\alpha(\vec{x}_3, \vec{x}_4)$ — волновая фунция входного канала, $\varphi_\beta(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ — волновая функция выходного канала; $E_\alpha = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2}$; $E_\beta = E_{\beta_1} + E_{\beta_2}$; $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — наборы квантовых чисел, описывающих состояния взаимодействующих частиц.

Таким образом, соотношение (8) устанавливает определенную связь $S_{\beta\alpha}$-матрицы с двухчастичной функцией Грина G [2], в которой заключена вся информация о физических свойствах частиц, участвующих в реакции. Для T-матрицы, связанной с S-матрицей известным соотношением [5]

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} - 2\pi i\delta(E_\beta - E_\alpha)\, T_{\beta\alpha}, \quad (9)$$

можно написать выражение через вершинную часть Г. Двухчастичная функция Грина удовлетворяет известному уравнению Дайсона [6]:

$$G[2]=G_1G_2+iG_1G_2\Gamma G_1G_2,$$

где G — одночастичная функция Грина, Г представляет совокупность всех диаграмм с четырьмя концами, не распадающихся на несвязанные части. Г называется вершинной частью. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — полный набор волновых функций, соответствующих некоторому эффективному гамильтониану H_0. Тогда для двухвременной функции Грина в представлении гамильтониана H_0 имеем уравнение

$$G(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta;\ \omega)=G_{\rm II}^0(\alpha,\beta;\ \omega)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+$$

$$+G_{\rm II}^0(\alpha,\beta;\ \omega)\,\Gamma(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta;\ \omega)\,G_{\rm II}^0(\gamma,\delta;\ \omega); \tag{10}$$

$$\Gamma(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta;\ \omega)=I(\alpha,\beta;\ \gamma,\delta;\ \omega)+\sum_{\gamma'\delta'}I(\alpha,\beta;\ \gamma',\delta';\ \omega)\times$$

$$\times G_{\rm II}^0(\gamma',\delta';\ \omega)\,\Gamma(\gamma',\delta';\ \gamma,\delta;\ \omega), \tag{11}$$

где I — эффективный оператор двухчастичного взаимодействия:

$$G_{\rm II}^0(\alpha,\beta;\ \omega)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}de\,G(\alpha,e)\,G(\beta,\omega-e). \tag{12}$$

При написании уравнения (10) существенно использовалось предположение, что одночастичные функции Грина диагональны в представлении H_0. Для задачи о взаимодействии нуклона с ядром такое представление существует. Таким представлением является оптическая модель ядра [7, 8]. Легко показать, что T-матрица для упругого рассеяния нуклона на магическом ядре связана с некомпактным собственно энергетическим оператором Σ соотношением [8].

$$T_{\vec p\,\vec q}(E)=\sum(\vec p,\vec q,E), \tag{13}$$

где

$$\sum=M+MG_0\sum;$$

M — массовый оператор нуклона, G_0 — одночастичная функция Грина свободного нуклона.

Используя связь между массовым оператором M и оптическим потенциалом [8], одночастичную функцию Грина при $t>t'$ можно представить в виде

$$G(\vec x,t;\vec x',t')=-i\sum_\alpha \overline{X}_\alpha^s(\vec x,t)\,X_\alpha^s(\vec x',t')-i\sum_\alpha \overline{X}_\alpha^B(\vec x,t)\,X_\alpha^B(\vec x',t'), \tag{14}$$

где $X_\alpha^s(\vec x,t)$ — амплитуда состояния нуклона, упруго рассеянного магическим ядром; $X_\alpha^B(\vec x,t)$ — амплитуда состояния связанного нуклона над магическим остовом.

Для реакции неупругого рассеяния нуклона ядром, полагая

$$H_{0\alpha}=H_{0\beta}=H_0,$$

после несложных преобразований найдем связь между фурье-компонентом вершинной части Г и T-матрицей:

$$T_{\beta\alpha}(E) = \int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, d\vec{x}_3\, d\vec{x}_4\, \overline{X}^s_{\beta_1}(\vec{x}_1)\, \overline{X}^B_{\beta_2}(\vec{x}_2) \times$$

$$\times\, \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4; E)\; X^s_{\alpha_1}(\vec{x}_3)\, X^B_{\alpha_2}(\vec{x}_4) \qquad (15)$$

для реакций (n, n'), (p, p'); (n, p), (p, n);

$$T_{\beta\alpha}(E) = \int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, d\vec{x}_3\, d\vec{x}_4\, \overline{X}^s_{\beta_1}(\vec{x}_1)\, \overline{X}^s_{\beta_2}(\vec{x}_2) \times$$

$$\times\, \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4, E)\; X^s_{\alpha_1}(\vec{x}_3)\, X^B_{\alpha_2}(\vec{x}_4) \qquad (16)$$

для реакций $(n, 2n)$, $(p, 2p)$, (n, pn), (p, np).

Для реакций (d, n) и (d, p) T-матрица рассеяния определяется выражением

$$T_{\beta\alpha}(E) = \int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, d\vec{x}_3\, d\vec{x}_4\, \overline{X}^s_{\beta_1}(\vec{x}_1)\, \overline{X}^B_{\beta_2}(\vec{x}_2),$$

$$\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4; E)\; \Psi^a_\alpha(\vec{x}_3, \vec{x}_4), \qquad (17)$$

для (d, np):

$$T_{\beta\alpha}(E) = \int d\vec{x}_1\, d\vec{x}_2\, d\vec{x}_3\, d\vec{x}_4\, \overline{X}^s_{\beta_1}(\vec{x}_1)\, \overline{X}^s_{\beta_2}(\vec{x}_2)\, \Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4; E)\; \Psi^a_\alpha(\vec{x}_3, \vec{x}_4),$$

где $\Psi^a_\alpha(\vec{x}_3, \vec{x}_4)$ — точная волновая функция дейтона, упруго рассеянного на магическом ядре.

Аналогичные выражения для T-матрицы (15), (16) получаются для неупругого рассеяния нуклона на ядре с одной дыркой в заполненной оболочке.

Формулы (15), (16) и (17) являются точными, так как мы не делали никаких предположений о слабости взаимодействия и механизме ядерной реакции. Единственным и очевидным предположением, которое существенно использовалось при выводе этих выражений для T-матрицы, является то, что магическое ядро-остов в конечном состоянии невозбуждено.

Исследование особенностей T-матрицы связано с нахождением полюсов вершинной части Г. Полюса вершинной части определяют двухчастичные и коллективные состояния системы взаимодействующих нуклонов. Вершинная часть Г имеет особенности при малой передаче импульса и при малом суммарном импульсе сталкивающихся частиц [6].

Наличие этих полюсов в Г приводит к таким же полюсам в T-матрице. Легко показать, что уравнение для Г (11) можно представить в виде

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_0 (GG - G_0 G_0)\,\Gamma, \qquad (18)$$

где Γ_0 есть T-матрица рассеяния свободных нуклонов

$$\Gamma_0 = V + V G_0 G_0 \Gamma_0, \qquad (19)$$

V — эффективный двухчастичный потенциал взаимодействия. Из экспериментальных данных по рассеянию свободных нуклонов T-матрицу рассеяния при малых энергиях можно считать постоянной в импульсном пространстве. Тогда в первом приближении для Г имеем в координатном представлении

$$\Gamma \approx V_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

где $\vec{r}$, $\vec{r}'$ — относительные координаты

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2,\quad \vec{r}' = \vec{x}_3 - \vec{x}_4. \tag{20}$$

Это приближение по форме совпадает с известным в теории ядра приближением нулевого действия ядерных сил.

Приближение нулевого радиуса взаимодействия не приводит к небольшим неточностям, но оно является одним из слабых мест метода.

По форме указанные приближения совпадают; но имеется и существенное различие:

1) в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил оператор взаимодействия изображается в виде

$$V \approx V_0\, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

2) в первом приближении для Г, T-матрица рассеяния свободных нуклонов считается постоянной в импульсном пространстве для произвольных короткодействующих сил взаимодействия.

Выражения для T-матрицы (15), (16), (17) получены без использования предположения о механизме ядерного процесса. Поэтому они описывают как ядерные реакции через составное ядро, так и прямые процессы. Это особенно важно для исследования влияния резонансных состояний промежуточного ядра на реакции при малых энергиях.

Например, в реакции O^{16} (d, p) O^{17} в диапазоне энергий от 0,8 до 2 *Мэв* [9] с возбуждением O^{17} на уровень $1/2^+$ (энергия возбуждения 0,87 *Мэв*) в угловом распределении протонов за ожидаемым по теории прямых реакций максимумом при 0° появляется другой максимум при 90°.

Этот второй максимум не может быть объяснен теорией прямых ядерных реакций, применение которой к ядерным реакциям при малых энергиях вообще необоснованно. Существование второго максимума связывается с возможностью образования составного ядра F^{18} с энергиями возбуждения между 8,4 и 9,6 *Мэв*.

Если предположить, что магическое ядро-остов в течении всего ядерного процесса остается невозбужденным, из (15), (16) и (17) при $\Gamma \approx V$ получим выражения для T-матрицы, совпадающие с соответствующими формулами в методе искаженных волн, широко распространенного при исследовании прямых ядерных реакций. Качественно успех метода искаженных волн объясняется возможностью аппроксимации вершинной части Г соответствующим двухчастичным взаимодействием V, так как прямые ядерные реакции являются в основном периферическими.

Предположение, что магический остов не возбужден в конечном состоянии, имеет лишь преимущество простоты. Учет возбуждения остова в конечном состоянии приводит к тому, что S-матрица связывается с функциями Грина более высокого порядка, по сравнению с двухчастичной функцией Грина.

Выводы

В данной работе сделана попытка объяснения большой группы ядерных реакций (n, n'), $(n, 2n)$, (d, n), $(d; n, p)$ при малых энергиях с единой точки зрения. Рассмотрена одна из возможностей получения точных выражений для T-матрицы рассеяния без использования предположений о слабости взаимодействия и механизме ядерного процесса.

В заключение выражаю благодарность Ю. М. Широкову за полезную дискуссию и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klein A., Zemach C. Phys. Rev., **108**, 126, 1957.
2. Klein A., Prange R. Phys. Rev., **112**, 994, 1958.
3. Gell-Mann M., Goldbeger M. L. Phys. Rev., **91**, 398, 1953.
4. Namiki M. Progr. Theor. Phys., **23**, 629, 1960.
5. Sunakawa S. Progr. Theor. Phys., **14**, 175, 1955.
6. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, М., 1962.
7. Амусья М. Я. ЖЭТФ, **43**, 319, 942, 1962.
8. Кадменский С. Г. «Изв. АН СССР», сер. физическая, **26**, 1194, 1962.
9. Calvi G., Rubbino A., Zubke D. Nucl. Phys., **38**, 436, 1962.

Поступила в редакцию
21. 6 1963 г.

НИИЯФ