Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1964

В. И. ГРИГОРЬЕВ

К ВОПРОСУ ОБ УШИРЕНИИ И СДВИГЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

Предложенный ранее (см., например, [5, 6]) метод перенормировок используется для получения конечных выражений для сдвига и уширения энергетических уровней при произвольного вида переходах.

Вопрос об уширении и сдвиге энергетических уровней системы, подверженной действию «возмущений», рассматривался уже давно (см., например, [1—3]). Настоящая статья преследует две цели: построение аппарата, удобного при рассмотрении процессов с произвольным числом частиц в начальном и конечном состоянии и это является основным — обсуждение того, как метод перенормировок, предложенный в [5] и [6], может быть использован в данной задаче для исключения расходимостей.

Запишем уравнение для вектора состояния Ψ_s в представлении Шредингера

$$i\,\frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = (H_0^{\mathrm{I}} + H_0^{\mathrm{II}} + H'_{\text{вз}} + H''_{\text{вз}})\,\Psi_s \equiv \Psi_s. \tag{1}$$

Здесь H_0^{I} и H_0^{II} — гамильтонианы свободных полей двух типов (мы ограничимся только теми задачами, где существенно взаимодействие частиц двух «сортов», например, электронов — позитронов и фотонов). $H'_{\text{вз}}$ и $H''_{\text{вз}}$ — гамильтонианы взаимодействия, разделенные на две части с тем, чтобы учесть возможность включения в рассмотрение внешнего (неквантованного) поля.

Переход к представлению взаимодействия проводится обычным способом: разобьем гамильтониан H на две части $H = H_1 + H_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0^{\mathrm{I}} + H_0^{\mathrm{II}} + H'_{\text{вз}} + \Delta\hat{m} + \Delta\hat{\varkappa}^2, \\ H_1 &= H''_{\text{вз}} - \Delta\hat{m} - \Delta\hat{\varkappa}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

В H_1 включены гамильтонианы свободных полей, гамильтонианы взаимодействия с внешним (классическим) полем, а также операторы «полевой энергии» (или массы), участвующих во взаимодействии полей (одно из которых, определенности ради, считается бозонным, а другое — фермионным).

Объединяя в соответствии с идеей перенормировки члены с массой («затравочной») из гамильтонианов H_0^{I} и H_0^{II} с соответствующими «полевыми» частями и принимая, что эти суммарные выражения соответствуют эмпирическим массам, мы должны в дальнейшем сформулировать условия, которые бы гарантировали, что во все конечные результаты войдут только «суммарные» массы, но не их «затравочные» и «полевые» части.

Обозначим через $\widetilde{H}_1$ гамильтониан, получающийся из H_1 путем замены «суммарной» массы на эмпирическую; значение $\widetilde{H}_1$ определяет вид операторов в представлении взаимодействия, поскольку для любого оператора U_J, $i\dfrac{\partial U_J}{\partial t}=[U_J, \widetilde{H}_{1J}]$, индекс J означает запись в представлении взаимодействия *.

Уравнение для S-матрицы имеет вид

$$i\frac{\delta S[\sigma\sigma_0]}{\delta\sigma(x)}=(H''_{\text{вз}_J}-\Delta\widehat{m}_J-\Delta\widehat{\varkappa}_J^2)\,S[\sigma\sigma_0]\equiv\widehat{H}(x)\,S[\sigma\sigma_0]. \tag{3}$$

Разобьем S-матрицу на сумму нормальных произведений, что соответствует разбиению на частные, т. е. относящиеся к различным физическим процессам, матрицы переходов: $S[\sigma\sigma_0]=\sum\limits_{\xi}S^{(\xi)}[\sigma\sigma_0]$.

Здесь $(\xi)=(ij,\ nm,\ kl)$, $i,\ n,\ k$, указывает, сколько в данном нормальном произведении содержится операторов поглощения бозонов, фермионов и антифермионов, а $j,\ m,\ l$ число соответствующих операторов рождения.

Условия для определения перенормировочных постоянных [5, 6] записываются в виде

$$\begin{aligned}&<1\,|\,S^{(110000)}\,|\,1>=0,\\&<\mathrm{I}\,|\,S^{(001100)}\,|\,\mathrm{I}>=0,\end{aligned} \tag{4}$$

при $V\to 0$, т. е. в отсутствие внешнего поля, где $1>$ — однобозонный вектор состояния, $\mathrm{I}>$ — однофермионный вектор состояния.

Все состояния являются «реальными», т. е. частицы «лежат на массовой поверхности».

Перейдем к написанию выражения для сдвига и ширины уровней. Используем обычный прием описания с помощью C-численных амплитуд вероятностей

$$\Psi_J\equiv\Psi[\sigma]=\sum_n\Psi_nC_n[\sigma],$$

где Ψ_n — полный набор векторов состояния (с квантовыми числами, обозначаемыми одной буквой n) в отсутствие «возмущения»

$$\frac{\delta\Psi_n}{\delta\sigma(x)}=0.$$

Используя ортонормированность системы Ψ_n запишем уравнения для C_n

* При наличии внешнего поля часто говорят о представлении Фарри.

$$i\frac{\delta C_n}{\delta\sigma(x)} = \sum_{n\neq n_0}\Psi_n^+\widetilde{H}(x)\Psi_{n'}C_{n'} + \Psi_n^+\widetilde{H}(x)\Psi_{n_0}C_0,$$
$$i\frac{\delta C_0}{\delta\sigma(x)} = \sum_{n'\neq n_0}\Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x)\Psi_{n'}C_{n'} + \Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x)\Psi_{n_0}C_0 \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$C_n[\sigma_0] = \delta_{nn_0}. \qquad (6)$$

Перепишем $C_n[\sigma]$ (при $n\neq n$) в виде

$$C_n[\sigma] = K_n[\sigma]\,C_0[\sigma].$$

Подставляя это в (5), найдем, что формальное (пока не найдено $K[\sigma]$) решение имеет вид

$$C_0[\sigma] = \exp\left\langle -i\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\left\{\sum_{n\neq n_0}\Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x')\Psi_{n'}K_{n'}[\sigma'] + \Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x')\Psi_{n_0}\right\}\right\rangle,$$

где x' — точка четырехмерного пространства-времени, лежащая на гиперповерхности σ', так что фактически в показателе экспоненты стоит T-произведение операторов, входящих в $\widetilde{H}(x')$ и $K_{n'}[\sigma']$.

Учтем, что C_n легко связать с S-матрицей. Действительно, поскольку

$$\Psi[\sigma] = S[\sigma\sigma_0]\,\Psi[\sigma_0]$$

и ввиду того, что в задачах «типа рассеяния» $\Psi[\sigma_0] = \Psi_{n_0}$, легко показать, что

$$C_n[\sigma] = \Psi_n^+ S[\sigma\sigma_0]\,\Psi_{n_0}. \qquad (7)$$

Это позволяет переписать C_0 в удобной для исследования форме*:

$$C_0[\sigma] = \exp\left\langle -i\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x'\,\frac{\Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x')\,S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}{\Psi_{n_0}^+ S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}\right\rangle, \qquad (8)$$

где Δm и $\Delta\varkappa^2$ определяются условием (4).

---

* Выражение (8) можно было бы получить и непосредственно из соотношения $C_0 = \Psi_{n_0}^+ S[\sigma\sigma_0]\Psi_{n_0}$, если учесть, что $i\dfrac{\delta S}{\delta\sigma(x)} = \widetilde{H}xS$. Действительно,

$$C_0[\sigma] = \Psi_{n_0}^+ S[\sigma\sigma_0]\,\Psi_{n_0} = \exp\left\langle\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\delta}{\delta\sigma'(x')}\ln\Psi_{n_0}^+ S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}\,d^4x'\right\rangle =$$
$$= \exp\left\langle\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x'\,\frac{\dfrac{\delta}{\delta\sigma'(x')}\Psi_{n_0}^+ S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}{\Psi_{n_0}^+ S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}\right\rangle =$$
$$= \exp\left\langle -i\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x'\,\frac{\Psi_{n_0}^+\widetilde{H}(x')\,S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}{\Psi_{n_0}^+ S[\sigma'\sigma_0]\,\Psi_{n_0}}\right\rangle.$$

Ширина и сдвиг уровней могут быть найдены соответственно как действительная и мнимая части выражения

$$\lim_{\substack{\sigma\to+\infty\\ \sigma_0\to-\infty}} \frac{1}{C_0[\sigma]} \int d^3x \,\frac{\delta C_0[\sigma]}{\delta\sigma(x)}. \tag{9}$$

Формула (8) на первый взгляд не удовлетворяет основному требованию, которое предъявляется к перенормированной теории, то есть создается впечатление, что выражение для C_0 содержит расходящиеся величины. Действительно, хотя в перенормированной теории S-матрица конечна, величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \,\Psi^+_{n_0} \widetilde{H}(x') S[\sigma'\sigma_0] \Psi_{n_0}$$

может содержать расходимости;
кроме того, расходящимися являются явно выступающие в (8) перенормировочные члены $\widehat{\Delta m}$ и $\widehat{\Delta\varkappa^2}$. Внешне все выглядит так, как будто процедура, позволившая «изгнать» расходящиеся части из S-матрицы, заставила «вынырнуть» эти члены в другом месте, «испортив» опять теорию.

В том, что такое впечатление ошибочно, можно было бы убедиться непосредственно, заменяя (8) равным ему и заведомо конечным — если действительно устранены расходимости в S-матрице — выражением $C_0 = \Psi^+_{n_0} S[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0}$. Однако целесообразно рассмотреть простой пример, который позволил бы более детально проследить, как именно происходит компенсация расходимостей в (8).

Разберем случай, когда в начальном состоянии присутствует один фермион (свободный или связанный) и нет бозонов.
Тогда

$$\Psi^+_{n_0} S[\sigma\sigma_0] = \Psi^+_{n_0} (S^{(000000)}[\sigma\sigma_0] + S^{(001100)}[\sigma\sigma_0]) \Psi_{n_0}$$

(заметим, что при $V\to 0$ член с $S^{(001100)}$ в силу условий перенормировки исчезает). Поскольку $S^{(000000)}[\sigma\sigma_0]$ является C-числом, можно, учитывая нормированность векторов состояния, написать

$$\Psi^+_{n_0} S[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0} = S^{(000000)}[\sigma\sigma_0] + \Psi^+_{n_0} S^{(001100)}[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0}.$$

Рассмотрим выражение

$$\Psi^+_{n_0} \widetilde{H}(x) S[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0}.$$

Рассматривая выражение «типа электродинамического», когда

$$H_{\text{вз}_J} = g\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi,\ (\psi = u + \bar{V},\ \varphi = \varphi^{(-)} + \varphi^{(+)}),$$

получим

$$\Psi^+_{n_0} \widetilde{H}(x) S[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0} = \Psi^+_{n_0}\{g\bar{u}\Gamma u\varphi^{(-)} (S^{(010000)}_{(100)} + S^{(011100)}_{(110)}) +$$
$$+ g\bar{V}\Gamma u\varphi^{(-)} (S^{(010101)}_{(101)} + S^{(010101)}_{(111)} + S^{(011201)}_{(111)}) - \Delta m\bar{u}u (S^{(000000)}_{(000)} + S^{(000101)}_{(010)} -$$
$$- \Delta m\bar{V}u (S^{(000101)}_{(001)} + S^{(000101)}_{(011)})\} \Psi_{n_0}$$

(остальные члены дают нулевые вклады).

Здесь введены нулевые индексы, показывающие количество бозонных a, фермионных b и антифермионных c сверток операторов, входящих в данное $S^{(\xi)}_{(abc)}$ с соответствующими операторами из гамильтониана взаимодействия.

При $V \to 0$ в силу принятых нами условий перенормировки (и с учетом теоремы Фарри) это выражение переходит в

$$\Psi^{+}_{n_0} gV\Gamma u\varphi^{(-)} S^{(010101)}_{(111)} \Psi_{n_0},$$

поскольку

$$\Psi^{+}_{n_0} i \frac{\delta S^{(001100)}}{\delta\sigma(x)} \Psi_{n_0} = 0 = \Psi^{+}_{n_0} \{g\bar{u}\Gamma u\varphi^{(-)} S^{(011100)}_{(110)} +$$
$$+ gV\Gamma u\varphi^{(-)} (S^{(010101)}_{(101)} + S^{(011201)}_{(111)}) - \Delta\bar{u}u S^{(000000)}_{(000)}\} \Psi_{n_0}.$$

Таким образом, для $C_0(\sigma)$ получается простой результат, совпадающий, разумеется, с $S^{(000000)}[\sigma\sigma_0]$

$$C_0 = \exp\left\langle -i \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x' \frac{\Psi^{+}_{n_0} gV(x')\Gamma u(x')\varphi^{(-)}(x') S^{(010101)}_{(111)[\sigma'\sigma_0]} \Psi_{n_0}}{\Psi^{+}_{n_0} S^{(000000)}_{[\sigma'\sigma_0]} \Psi_{n_0}} \right\rangle.$$

Исключая обычным способом вакуумные петли, мы приходим, следовательно, к известному положению: при $V \to 0$ для любого процесса «типа рассеяния» отсутствует как сдвиг, так и уширение уровней.

Перейдем к рассмотрению случая $V \neq 0$. Здесь удобнее отправляться от формулы

$$C_0 = \Psi^{+}_{n_0} S[\sigma\sigma_0] \Psi_{n_0}. \tag{7a}$$

Начальные состояния по-прежнему будем считать однофермионными, но только фермионные операторы теперь должны удовлетворять уравнению *

$$(\hat{\partial} - m)\psi_V = V\psi_V.$$

Если, дабы избежать громоздкой записи, перейти к нерелятивистскому приближению при описании фермионов (что позволит исключить из рассмотрения антифермионы), то уравнения принимают вид

$$i \frac{\delta S^{(ij0000)}_{V}}{\delta\sigma} = 0,$$

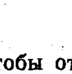
$$i \frac{\delta S^{(001100)}_{V}}{\delta\sigma} = g\bar{u}_V\Gamma u_V\varphi^{(-)} S^{(011100)}_{V(110)} - \Delta m\bar{u}_V u_V (S^{(000000)}_{V(000)} + S^{(01100)}_{(010)} \tag{10}$$

и т. д.

Поскольку антифермионы исключены из рассмотрения, $\Delta\varkappa^2 = 0$, что, впрочем, вытекает из самих уравнений, начальных условий

$$C_n[\sigma_0] = \delta_{nn_0}$$

и условий перенормировки.

Уравнения (10) образуют бесконечную зацепляющуюся цепочку. Простейший путь решения этих уравнений (хотя и не бесспорно лучший) — использование метода возмущений. В низших приближениях уравнения для $S^{(001100)}_{Y}$ графически записываются так (жирные линии относятся к случаю $V \neq 0$)  .

* Индекс V (например, ψ_V) введен, чтобы отличать величины при $V \neq 0$.

Точка соответствует Δm, которое в этом же приближении определяется с помощью графика (рис. 1).

В аналитической записи для $C_0[\sigma]$ имеет место выражение

$$C_0[\sigma] = \Psi^{+}_{n_0}\left\{1 + T\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\, d^4x'\, g^2 \bar{u}_V^{(x)}\, \Gamma u_V^{(x)} \varphi^{(-)}(x)\, \bar{u}_V(x')\, \Gamma u_V(x')\, \varphi^{(+)}(x') - \right.$$

$$\left. - \frac{\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x \bar{u}_V(x)\, u_V(x)\, T\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x_1\, d^4x_2 g^2 \bar{u}(x_1)\, \Gamma u(x_1)\, \varphi^{(-)}(x_1)\, \bar{u}(x_2)\, \Gamma u(x_2)\, \varphi^{(+)}(x_2)}{\int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x'\, \bar{u}(x')\, u(x')}\right\}\Psi_{n_0}.$$

Мы приходим, таким образом, к хорошо известному разностному виду для $C_0[\sigma]$ (а значит, и для сдвигов и ширины). Впервые конечность разностей такого типа (правда, в менее строгой записи) была уже давно замечена Бэте [4], работой которого открывается большой цикл исследований по «вычитательным теориям».

Мы пользовались при получении $C_0[\sigma]$ методом возмущений. Можно было бы провести анализ в другом приближении, например, в рамках

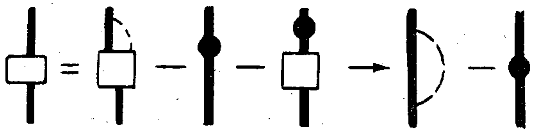


Рис. 1

того или иного «лестничного» приближения и т. д. Примененный выше метод перенормировок не предполагает непременного использования каких-то конкретных приближений. Поэтому он позволяет в принципе получать конечные выражения для сдвига и ширины энергетических уровней в произвольном приближении.

Следует также отметить, что записанные выше формулы (7а) и (8) справедливы как в случае спонтанного, так и вынужденного излучения. Справедливо даже более широкое утверждение: эти формулы могут быть применены для процессов с любым числом частиц в начальном состоянии (по всем конечным состояниям с любым числом частиц должно проводиться суммирование, которое фактически уже учтено в (8)). Ковариантность формулировки может быть полезной в релятивистских задачах. Конкретный выбор вектора начального состояния Ψ_{n_n} и определяет выбор той или иной физической задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. ИЛ, М., 1956.
2. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. Физматгиз, М., 1958.
3. Wilson A. H. Proc. Cambr. Phil. Soc., 37, 301, 1941.
4. Bethe H. A. Phys. Rev., 72, 339, 1947.
5. Вавилов Б. Т., Григорьев В. И. ЖЭТФ, 39, 794, 1960.
6. Вавилов Б. Т., Вердиев И. А., Гончарова Н. Г., Григорьев В. И., Меледин Г. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 46, 1962.

Поступила в редакцию
3. 10 1963 г.

НИИЯФ