Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1964

Х. Х. АХМАД

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение

В предыдущей работе [1] мы вывели дифференциальные уравнения для оскулирующих гиперболических элементов типа Лагранжа и получили разложение пертурбационной функции для случая гиперболического движения по степеням отношения полуосей в двух вариантах: внутреннем и внешнем.

В данной работе мы даем формулы, определяющие возмущения первого порядка гиперболических элементов для обоих вариантов: внутреннего с точностью до третьей степени отношения полуосей и внешнего с точностью до второй степени отношения полуосей.

При нахождении возмущаемого тела в непосредственной близости от возмущающего элементы первого претерпевают сильные изменения, так что рассчитанные нами возмущения дают недостаточно точное представление о действительных возмущениях. Поэтому нужно произвести дополнительное исследование возмущений элементов при прохождении возмущаемого тела через сферу действия возмущающего.

§ 1. Начальные члены разложения пертурбационной функции

Выпишем начальные члены полученных нами разложений [1] для двух вариантов, ограничиваясь членами второй степени отношения полуосей включительно. Нетрудно убедиться, что формулы для этих разложений имеют следующий окончательный вид.

Для внутреннего варианта

$$a_j R_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_j}\right)^2 \Bigg[\Bigg[\Bigg[\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\cos 2i + \frac{1}{2}\sin^2 i \cos 2\lambda \cos 2\beta N +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin^2 i \sin 2\lambda \sin 2\beta N\Bigg]\left[1 + \frac{e^2}{2} - 2e \operatorname{ch} u + \frac{e^2}{2}\operatorname{ch} 2u\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{4}\cos 2\beta N \left\{(3 + \cos 2i)\cos 2\omega \cos 2\lambda - 4\cos i \sin 2\omega \sin 2\lambda\right\} +\right.$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2\beta N\left\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\sin 2\lambda+4\cos i\sin 2\omega\cos 2\lambda\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2\omega\Bigg]\left[\frac{3e^2}{2}-2e\,\mathrm{ch}\,u+\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\mathrm{ch}\,2u\right]-$$

$$-\sqrt{e^2-1}\left[\frac{1}{4}\cos 2\beta N\,\{(3+\cos 2i)\sin 2\omega\cos 2\lambda+4\cos i\cos 2\omega\sin 2\lambda\}+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2\beta N\,\{(3+\cos 2i)\sin 2\omega\sin 2\lambda-4\cos i\cos 2\omega\cos 2\lambda\}+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin^2 i\sin 2\omega\right][2e\,\mathrm{sh}\,u-\mathrm{sh}\,2u]\Bigg]\Bigg]\Bigg]+\ldots \qquad (1)$$

Для внешнего варианта:

$$aR_1=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\Psi_\nu^{(0,0)}(e)\cdot E^{-\nu u}+\left(\frac{a_j}{a}\right)\sum_{\nu=2}^{\infty}[\cos\Gamma\,\{\cos\omega\Psi_\nu^{(1,1)}(e)-\sin\omega\Phi_\nu^{(1,1)}(e)\}+$$

$$+\cos i\sin\Gamma\,\{\sin\omega\Psi_\nu^{(1,1)}(e)+\cos\omega\Phi_\nu^{(1,1)}(e)\}]\cdot E^{-\nu u}-$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{a_j}{a}\right)^2\sum_{\nu=3}^{\infty}\left[\cos 2\Gamma\left\{\frac{1}{4}(3+\cos 2i)(\Psi_\nu^{(2,2)}(e)\cos 2\omega-\Phi_\nu^{(2,2)}(e)\sin 2\omega)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin^2 i\,\Psi_\nu^{(2,0)}(e)\right\}+\sin 2\Gamma\cos i\,\{\Psi_\nu^{(2,2)}(e)\sin 2\omega+$$

$$+\Phi_\nu^{(2,2)}(e)\cos 2\omega\}+\frac{1}{2}\sin^2 i\,\{\Psi_\nu^{(2,2)}(e)\cos 2\omega-\Phi_\nu^{(2,2)}(e)\sin 2\omega\}+$$

$$\left.+\frac{1}{12}\Psi_\nu^{(2,0)}(e)(1+3\cos 2i)\right]E^{-\nu u}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-$$

$$-\left(\frac{a}{a_j}\right)^2[\{\cos\omega\cos\Gamma+\sin\omega\sin\Gamma\cos i\}(e-\mathrm{ch}\,u)-$$

$$-\sqrt{e^2-1}\,\{\sin\omega\cos\Gamma-\cos\omega\sin\Gamma\cos i\}\,\mathrm{sh}\,u], \qquad (2)$$

где R_1 — функция, связанная с пертурбационной функцией R соотношением

$$R=k^2m_jR_1, \qquad (3)$$

а m_j — масса Юпитера *.

Далее, через a в этих формулах обозначены действительная полуось, e — эксцентриситет и ω — угловое расстояние перицентра от узла, i — взаимная наклонность плоскостей орбит; λ определяется формулой

$$\lambda=\beta N_0+\Omega,$$

где $\beta=\frac{n_j}{n'}$, т. е. отношение среднего движения Юпитера к аналогу среднего движения кометы, N_0 — аналог средней аномалии в эпоху,

* Возмущающее тело называем Юпитером, а возмущаемое — кометой.

Ω — долгота узла кометной орбиты, u, N — аналог эксцентрической и средней аномалий, они связаны аналогом уравнения Кеплера

$$e \operatorname{sh} u - u = N = n'(t - t_0) + N_0,$$

$\Gamma = \theta_j - \Omega$, где θ_j — долгота Юпитера. Наконец, $\Psi_\nu^{(n,s)}(e)$, $\Phi_\nu^{(n,s)}(e)$ некоторые функции от эксцентриситета, определенные в работе [2].

§ 2. Преобразование дифференциальных уравнений для гиперболических оскулирующих элементов

Пертурбационная функция для обоих вариантов — внутреннего и внешнего — имеет, как было указано, форму (3). Заметим, что, принимая массу центрального тела за единицу, получим

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m),$$

где m — масса кометы. Следовательно, можно представить (3) в виде

$$R = \frac{m_j}{1 + m} n^2 a^3 R_1.$$

Следует указать, что e входит в правые части выражений (1) и (2) явно, а также через u; через u входит и N_0. С другой стороны, нужно обратить внимание на то, что $\frac{\sin}{\cos} q\Gamma$ $(\Gamma = \theta_j - \Omega)$ зависит только от Ω из элементов возмущаемой гиперболической орбиты.

Далее, R, как видно из формул (1), (2), выражается через элементы орбиты, $\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} q'u$ и $\frac{\sin}{\cos} q''\beta N$, где q', q'' — целые числа. После некоторых попыток мы решили взять в качестве новой независимой переменной аналог эксцентрической аномалии u вместо t и разложить $\frac{\sin}{\cos} q\beta N$ по произведению $\frac{\sin}{\cos}$ кратных βu на $\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ кратных u. Тогда и только тогда при интегрировании уравнений для оскулирующих элементов получаются табличные интегралы.

Приступим сначала к разложению $\frac{\sin}{\cos} q\beta N$. Имеем

$$\cos q\beta N + j \sin q\beta N = E^{jq\beta N} = E^{jq\beta(e \operatorname{sh} u - u)}, \quad (j = \sqrt{-1}).$$

Обозначая E^u через z и используя разложение производящей функции функций Бесселя, напишем

$$E^{jq\beta e \operatorname{sh} u} = E^{\frac{jq\beta e}{2}(z - z^{-1})} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \tau_\nu (jq\beta e) z^\nu,$$

где через $\tau_\nu(jq\beta e)$ обозначена функция Бесселя индекса ν и чисто мнимого аргумента $(jq\beta e)$.

Используя свойство функции Бесселя, напишем

$$E^{jq\beta e \operatorname{sh} u} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \tau_\nu (jq\beta e) z^\nu + \tau_0 (jq\beta e) + \sum_{\nu=+1}^{+\infty} \tau_\nu (jq\beta e) z^\nu =$$

$$= \tau_0 (jq\beta e) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\tau_\nu (jq\beta e) z^\nu + (-1)^\nu \tau_\nu (jq\beta e) z^{-\nu}] =$$

$$= \tau_0(jq\beta e) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\tau_\nu(jq\beta e)\,\frac{E^{\nu u} + (-1)^\nu E^{-\nu u}}{2}\right] =$$

$$= \tau_0(jq\beta e) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\underset{2\nu}{\tau}(jq\beta e)\operatorname{ch}2\nu u + \underset{2\nu-1}{\tau}(jq\beta e)\operatorname{sh}(2\nu-1)u\right]. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\underset{2\nu}{\tau}(jx) = (-1)^\nu \underset{2\nu}{I}(x), \quad \underset{2\nu-1}{\tau}(jx) = -j(-1)^\nu \underset{2\nu-1}{I}(x),$$

где

$$\underset{\nu}{I}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma!\,(\gamma+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\gamma}.$$

Очевидно, $\underset{\nu}{I}(x)$ — абсолютно сходящийся ряд при всех значениях x, причем для этой функции построены таблицы.

Умножая (4) на $E^{-jq\beta u} = \cos q\beta u - j\sin q\beta u$ и отождествляя действительные и мнимые части, получим

$$\sin q\beta N = -\underset{0}{I}(q\beta e)\sin q\beta u - 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\left[\underset{2\nu}{I}(q\beta e)\operatorname{ch}2\nu u\sin q\beta u + \right.$$

$$\left. + \underset{2\nu-1}{I}(q\beta e)\operatorname{sh}(2\nu-1)u\cos q\beta u\right], \tag{5}$$

$$\cos q\beta N = \underset{0}{I}(q\beta e)\cos q\beta u + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\left[\underset{2\nu}{I}(q\beta e)\operatorname{ch}2\nu u\cos q\beta u - \right.$$

$$\left. - \underset{2\nu-1}{I}(q\beta e)\operatorname{sh}(2\nu-1)u\sin q\beta u\right]. \tag{6}$$

Перейдем теперь к определению дифференциальной зависимости новой независимой переменной u от старой t. Продифференцировав u по t, получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

где $\left(\frac{du}{dt}\right)$ — производная, соответствующая зависимости возмущенного u от времени, но только через посредство оскулирующих элементов.

Применяя основную операцию к формуле $r = a(e\operatorname{ch}u - 1)$ и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{n'}{e\operatorname{ch}u - 1},$$

окончательно получим

$$\frac{du}{dt} = \Lambda\frac{n'}{e\operatorname{ch}u - 1},$$

где

$$\Lambda = 1 + \frac{m_j}{1+m}\,\frac{a(e\operatorname{ch}u - 1)}{e^2\operatorname{sh}u}\left[\{(1+e^2)\operatorname{ch}u - 2e\}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial N_0} - \sqrt{e^2-1}\operatorname{ch}u\cdot\frac{\partial R_1}{\partial\omega}\right].$$

Тогда уравнения для гиперболических оскулирующих элементов преобразуются к следующему виду:

$$\frac{da}{du}=-\frac{1}{\Lambda}\frac{2m_j}{1+m}a^2(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial N_0},$$

$$\frac{de}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}a(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\left\{\frac{e^2-1}{e}\frac{\partial R_1}{\partial N_0}+\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial\omega}\right\},$$

$$\frac{dN_0}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\left\{2a^2\frac{\partial R_1}{\partial a}-\frac{a(e^2-1)}{e}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial e}\right\},$$

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}\frac{a\,\mathrm{cosec}\,i}{\sqrt{e^2-1}}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial i},\tag{7}$$

$$\frac{d\omega}{du}=-\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\left\{\frac{a\sqrt{e^2-1}}{e}\frac{\partial R_1}{\partial e}+\frac{a\,\mathrm{ctg}\,i}{\sqrt{e^2-1}}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial i}\right\},$$

$$\frac{di}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\left\{\frac{a\,\mathrm{ctg}\,i}{\sqrt{e^2-1}}\frac{\partial R_1}{\partial\omega}-\frac{a\,\mathrm{cosec}\,i}{\sqrt{e^2-1}}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial\lambda}\right\}.$$

Вводя вспомогательные величины $L_1, L_2\ldots L_6$, при помощи равенств

$$\frac{dL_1}{du}=-\frac{1}{\Lambda}\frac{2m_j}{1+m}a^2(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial N_0},$$

$$\frac{dL_2}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}\frac{a\sqrt{e^2-1}}{e}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial\omega},$$

$$\frac{dL_3}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{2m_j}{1+m}a^2(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial a},$$

$$\frac{dL_4}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}\frac{a(e^2-1)}{e}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial e},$$

$$\frac{dL_5}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}\frac{a\,\mathrm{cosec}\,i}{\sqrt{e^2-1}}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial i},$$

$$\frac{dL_6}{du}=\frac{1}{\Lambda}\frac{m_j}{1+m}\frac{a\,\mathrm{cosec}\,i}{\sqrt{e^2-1}}(e\,\mathrm{ch}\,u-1)\frac{\partial R_1}{\partial\lambda}\tag{8}$$

уравнениям (7) можно придать следующий вид:

$$\frac{da}{du}=\frac{dL_1}{du},\qquad \frac{de}{du}=-\frac{1}{2a}\frac{e^2-1}{e}\frac{dL_1}{du}+\frac{dL_2}{du},$$

$$\frac{dN_0}{du}=\frac{dL_3}{du}-\frac{dL_4}{du},\qquad \frac{d\Omega}{du}=\frac{dL_5}{du},$$

$$\frac{d\omega}{du}=-\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\,\frac{dL_4}{du}-\cos i\,\frac{dL_5}{du},\qquad \frac{di}{du}=\frac{e\,\mathrm{ctg}\,i}{e^2-1}\frac{dL_2}{du}-\frac{dL_6}{du}.$$

Если хотим определить возмущения гиперболических элементов $\delta^{(1)}a, \delta^{(1)}e, \ldots, \delta_i^{(1)}$ *первого порядка* относительно возмущающей массы, то при интегрировании уравнений (8) нужно, с одной стороны, считать элементы постоянными, с другой стороны, нужно взять $\Lambda=1$. Обозначая $L_1, L_2\ldots L_6$ в этом случае через $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}\ldots L_6^{(1)}$, получим

$$\delta^{(1)}a = L_1^{(1)},\ \delta^{(1)}e = -\frac{1}{2a}\frac{e^2-1}{e}L_1^{(1)} + L_2^{(1)},$$

$$\delta^{(1)}N_0 = L_3^{(1)} - L_4^{(1)}, \quad \delta^{(1)}\Omega = L_5^{(1)},$$

$$\delta\omega^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}L_4^{(1)} - \cos i L_5^{(1)},\ \delta_i^{(1)} = \frac{e}{e^2-1}\operatorname{ctg} i L_2^{(1)} - L_6^{(1)}. \qquad (9)$$

§ 3. Возмущения элементов первого порядка

Нами получены все приближенные выражения $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \ldots, L_6^{(1)}$. Однако здесь считаем возможным привести формулы только для $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_6^{(1)}$, позволяющие, как видно из (9), определить приближенные формулы для $\delta_a^{(1)}, \delta_e^{(1)}, \delta_i^{(1)}$.

С л у ч а й   в н у т р е н н е г о   в а р и а н т а. Прежде чем привести формулы, определяющие $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_6^{(1)}$ в случае внутреннего варианта, введем некоторые обозначения.

Обозначим через $\overset{(i)}{\underset{a,b}{\mathrm{II}}}(u)\ (i = 1, 2, 3, 4)$ интегралы следующего вида:

$$\overset{(1)}{\underset{a,b}{\mathrm{II}}}(u) = \int \operatorname{sh} au \sin bu du, \qquad \overset{(2)}{\underset{a,b}{\mathrm{II}}}(u) = \int \operatorname{sh} au \cos bu du,$$

$$\overset{(3)}{\underset{a,b}{\mathrm{II}}}(u) = \int \operatorname{ch} au \sin bu du, \qquad \overset{(4)}{\underset{a,b}{\mathrm{II}}}(u) = \int \operatorname{ch} au \cos bu du.$$

Обозначим, кроме того, через $\overset{(i)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u)\ \ (i = 1, 2, 3, 4)$ интегралы следующего вида:

$$\overset{(1)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \int \operatorname{sh} \alpha u \sin q\beta N\, du,\ \ \overset{(2)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \int \operatorname{sh} \alpha u \cos q\beta N\, du,$$

$$\overset{(3)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \int \operatorname{ch} du \sin q\beta N\, du,\ \ \overset{(4)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \int \operatorname{ch} \alpha u \cos q\beta N\, du. \qquad (10)$$

Подставляя вместо $\frac{\sin}{\cos} q\beta N$ в (10) их разложения (5), (6) и интегрируя (10), получим

$$\overset{(1)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e)\overset{(1)}{\underset{\alpha,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Big[\underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(1)}{\underset{\alpha+2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \overset{(1)}{\underset{\alpha-2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\} +$$

$$+ \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(4)}{\underset{\alpha+2\nu-1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) - \overset{(4)}{\underset{\alpha-2\nu+1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\}\Big],$$

$$\overset{(2)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e)\overset{(2)}{\underset{\alpha,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Big[\underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(2)}{\underset{\alpha+2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \overset{(2)}{\underset{\alpha-2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\} -$$

$$- \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(3)}{\underset{\alpha+2\nu-1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) - \overset{(3)}{\underset{\alpha-2\nu+1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\}\Big],$$

$$\overset{(3)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u) = \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e)\overset{(3)}{\underset{\alpha,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Big[\underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(3)}{\underset{\alpha+2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) + \overset{(3)}{\underset{\alpha-2\nu,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\} +$$

$$+ \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)\{\overset{(2)}{\underset{\alpha+2\nu-1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u) - \overset{(2)}{\underset{\alpha-2\nu+1,q\beta}{\mathrm{II}}}(u)\}\Big],$$

$$\overset{(4)}{X}_{\alpha,q}(u) = \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e)\,\overset{(4)}{\mathrm{II}}_{\alpha,q\beta}(u) + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Big[\underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e)\,\Big\{\overset{(4)}{\mathrm{II}}_{\alpha+2\nu,q\beta}(u) + \overset{(4)}{\mathrm{II}}_{\alpha-2\nu,q\beta}(u)\Big\} -$$

$$- \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)\,\Big\{\overset{(1)}{\mathrm{II}}_{\alpha+2\nu-1,q\beta}(u) - \overset{(1)}{\mathrm{II}}_{\alpha-2\nu+1,q\beta}(u)\Big\}\Big]. \qquad (11)$$

Заметим, что операция почленного интегрирования, выполненная для получения (11), является законной, поскольку ряды (5) и (6) являются абсолютно сходящимися.

Теперь мы приведем окончательные приближенные формулы для $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$, $L_6^{(1)}$, полученные путем интегрирования уравнений (8). Считаем элементы постоянными и принимаем $\Lambda = 1$.

$$\frac{1}{a}L_1^{(1)} = -\frac{2m_j}{1+m}\frac{a}{a_j}\Big[\Big[\frac{3}{4}\Big(\frac{a}{a_j}\Big)^2\Big[\Big(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\cos 2i\Big)\Big(-2e\,\mathrm{ch}\,u + \frac{e^2}{2}\,\mathrm{ch}\,2u\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2\lambda\,\{-2e\overset{(2)}{X}_{1,2}(u) + e^2\overset{(2)}{X}_{2,2}(u)\} + \frac{1}{2}\sin^2 i\sin 2\lambda\,\{-2e\overset{(1)}{X}_{1,2}(u) + e^2\overset{(1)}{X}_{2,2}(u)\} +$$

$$+\frac{1}{4}\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\cos 2\lambda - 4\cos i\sin 2\omega\sin 2\lambda\}\,\{-2e\overset{(2)}{X}_{1,2}(u) + (2-e^2)\overset{(2)}{X}_{2,2}(u)\} +$$

$$+\frac{1}{4}\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\sin 2\lambda + 4\cos i\sin 2\omega\cos 2\lambda\}\,\{-2e\overset{(1)}{X}_{1,2}(u) + (2-e^2)\overset{(1)}{X}_{2,2}(u)\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 i\cos 2\omega\Big\{-2e\,\mathrm{ch}\,u + \Big(1-\frac{e^2}{2}\Big)\mathrm{ch}\,2u\Big\} - \frac{1}{4}\sqrt{e^2-1}\,\{(3+\cos 2i)\times$$

$$\times\sin 2\omega\cos 2\lambda + 4\cos i\cos 2\omega\sin 2\lambda\}\,\{2e\overset{(4)}{X}_{1,2}(u) - 2\overset{(4)}{X}_{2,2}(u)\} -$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{e^2-1}\,\{3+\cos 2i)\sin 2\omega\sin 2\lambda - 4\cos i\cos 2\omega\cos 2\lambda\}\,\{2e\overset{(3)}{X}_{1,2}(u) - 2\overset{(3)}{X}_{1,2}(u)\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}\,\sin^2 i\sin 2\omega\,\{2e\,\mathrm{sh}\,u - \mathrm{sh}\,2u\}\Big] + \dots\Big]\Big] + \mathrm{const}.$$

$$L_2^{(1)} = \frac{m_j}{1+m}\frac{a}{a_j}\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\Big[\Big[\frac{3}{4}\Big(\frac{a}{a_j}\Big)^2\Big[\frac{1}{2}\{-(3+\cos 2i)\sin 2\omega\cos 2\lambda -$$

$$-4\cos i\cos 2\omega\sin 2\lambda\}\Big\{-\frac{5}{2}e^2\overset{(4)}{X}_{0,2}(u) + \frac{5}{4}e(e^2+2)\overset{(4)}{X}_{1,2}(u) - \frac{1}{2}(e^2+2)\overset{(4)}{X}_{2,2}(u) -$$

$$-\frac{e}{4}(e^2-2)\overset{(4)}{X}_{3,2}(u)\Big\} + \frac{1}{2}\{-(3+\cos 2i)\sin 2\omega\sin 2\lambda + 4\cos i\cos 2\omega\cos 2\lambda\}\times$$

$$\times\Big\{-\frac{5}{2}e^2\overset{(3)}{X}_{0,2}(u) + \frac{5}{4}e(e^2+2)\overset{(3)}{X}_{1,2}(u) - \frac{1}{2}(e^2+2)\overset{(3)}{X}_{2,2}(u) - \frac{e}{4}(e^2-2)\overset{(3)}{X}_{3,2}(u)\Big\} -$$

$$-\sin^2 i\sin 2\omega\Big\{-\frac{5}{2}e^2u + \frac{5}{4}e(e^2+2)\,\mathrm{sh}\,u - \frac{1}{4}(e^2+2)\,\mathrm{sh}\,2u -$$

$$-\frac{e}{12}(e^2-2)\,\mathrm{sh}\,3u\Big\} - \frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}\,\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\cos 2\lambda -$$

$$-4\cos i\sin 2\omega\sin 2\lambda\}\Big\{-\frac{5}{2}e\overset{(2)}{X}_{1,2}(u) + (1+e^2)\overset{(2)}{X}_{2,2}(u) - \frac{e}{2}\overset{(2)}{X}_{3,2}(u)\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}\,\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\sin 2\lambda+4\cos i\sin 2\omega\cos 2\lambda\}\times$$

$$\times\left\{-\frac{5}{2}e\overset{(1)}{\underset{1,2}{X}}(u)+(1+e^2)\overset{(1)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{e}{2}\overset{(1)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}+\sin^2 i\cos 2\omega\left\{-\frac{5}{2}e\operatorname{ch}u+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1+e^2)\operatorname{ch}2u-\frac{e}{6}\operatorname{ch}3u\right\}\Big]+\ldots\Big]\Big]+\text{const},$$

$$\overset{(1)}{\underset{6}{L}}=\frac{m_j}{i+m}\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{e^2-1}}\frac{a}{a_j}\left[\left[\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_j}\right)^2\left[-\sin^2 i\sin 2\lambda\left\{-\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)\overset{(4)}{\underset{0,2}{X}}(u)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}e(e^2+4)\overset{(4)}{\underset{1,2}{X}}(u)-\frac{3e^2}{2}\overset{(4)}{\underset{2,2}{X}}(u)+\frac{e^3}{4}\overset{(4)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}+\sin^2 i\cos 2\lambda\times$$

$$\times\left\{-\left(1+\frac{3e^2}{2}\right)\overset{(3)}{\underset{0,2}{X}}(u)+\frac{3}{4}e(e^2+4)\overset{(3)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{3e^2}{2}\overset{(3)}{\underset{2,2}{X}}(u)+\frac{e^3}{4}\overset{(3)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{-(3+\cos 2i)\cos 2\omega\sin 2\lambda-4\cos i\sin 2\omega\cos 2\lambda\}\left\{-\frac{5}{2}e^2\overset{(4)}{\underset{0,2}{X}}(u)+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{4}e(e^2+2)\overset{(4)}{\underset{1,2}{X}}(u)-\frac{1}{2}(e^2+2)\overset{(4)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{e}{4}(e^2-2)\overset{(4)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{(3+\cos 2i)\cos 2\omega\cos 2\lambda-4\cos i\sin 2\omega\sin 2\lambda\}\left\{-\frac{5e^2}{2}\overset{(3)}{\underset{0,2}{X}}(u)+\right.$$

$$\left.+\frac{5e}{4}(e^2+2)\overset{(3)}{\underset{1,2}{X}}(u)-\frac{1}{2}(e^2+2)\overset{(3)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{e}{4}(e^2-2)\overset{(3)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}\,\{-(3+\cos 2i)\sin 2\omega\sin 2\lambda+4\cos i\cos 2\omega\cos 2\lambda\}\left\{-\frac{5}{2}e\overset{(2)}{\underset{1,2}{X}}(u)+\right.$$

$$\left.+(1+e^2)\overset{(2)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{e}{2}\overset{(2)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}-\frac{1}{2}\sqrt{e^2-1}\times$$

$$\times\{(3+\cos 2i)\sin 2\omega\cos 2\lambda+4\cos i\cos 2\omega\sin 2\lambda\}\left\{-\frac{5}{2}e\overset{(1)}{\underset{1,2}{X}}(u)+\right.$$

$$\left.+(1+e^2)\overset{(1)}{\underset{2,2}{X}}(u)-\frac{e}{2}\overset{(1)}{\underset{3,2}{X}}(u)\right\}\Big]+\ldots\Big]\Big]+\text{const}.$$

Случай внешнего варианта. В этом случае R_1 определяется формулой (2). Как и в случае внутреннего варианта, прежде всего, ради сокращения записи введем обозначения. Через $\overset{(i)}{\underset{a,b,c}{\text{III}}}(u)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ обозначим следующие табличные интегралы:

$$\overset{(1)}{\underset{a,b,c}{\text{III}}}(u)=\int E^{-au}\operatorname{sh}bu\sin cu\,du,\quad \overset{(2)}{\underset{a,b,c}{\text{III}}}(u)=\int E^{-au}\operatorname{sh}bu\cos cu\,du,$$

$$\overset{(3)}{\underset{a,b,c}{\text{III}}}(u)=\int E^{-au}\operatorname{ch}bu\sin cu\,du,\quad \overset{(4)}{\underset{a,b,c}{\text{III}}}(u)=\int E^{-au}\operatorname{ch}bu\cos cu\,du.$$

Обозначим, кроме того, через $\overset{(i)}{\underset{n,q}{Y}}(u)$ $(i=1, 2)$ интегралы следующего вида:

$$\overset{(1)}{\underset{n,q}{Y}}(u) = \int (e\operatorname{ch} u - 1)\, E^{-nu} \cos q\beta N\, du, \quad \overset{(2)}{\underset{n,q}{Y}}(u) = \int (e\operatorname{ch} u - 1)\, E^{-nu} \sin q\beta N\, du, \tag{12}$$

которые с учетом разложений (5), (6) для $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} q\beta N$ выражаются следующими формулами:

$$\overset{(1)}{\underset{n,q}{Y}}(u) = \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e)\, e \overset{(4)}{\underset{n,1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) + e \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [\{ \overset{(4)}{\underset{n,2\nu+1,q\beta}{\mathrm{III}}} + \overset{(4)}{\underset{n,2\nu-1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \} \underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e) -$$

$$- \{ \overset{(1)}{\underset{n,2\nu,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) + \overset{(1)}{\underset{n,2\nu-2,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \} \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)] - \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e) \overset{(4)}{\underset{n,0,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \times$$

$$\times [\overset{(4)}{\underset{n,2\nu,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \cdot \underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e) - \overset{(1)}{\underset{n,2\nu-2,q\beta}{\mathrm{III}}} \cdot \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)],$$

$$\overset{(2)}{\underset{n,q}{Y}}(u) = - \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e) \cdot e \overset{(3)}{\underset{n,1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) - e \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [\{ \overset{(2)}{\underset{n,2\nu+1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) + \overset{(3)}{\underset{n,2\nu-1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \} \underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e) +$$

$$+ \{ \overset{(2)}{\underset{n,2\nu,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) + \overset{(2)}{\underset{n,2\nu-2,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \} \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)] + \underset{0}{\mathrm{I}}(q\beta e) \overset{(2)}{\underset{n,0,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \times$$

$$\times [\overset{(3)}{\underset{n,2\nu,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \cdot \underset{2\nu}{\mathrm{I}}(q\beta e) + \overset{(2)}{\underset{n,2\nu-1,q\beta}{\mathrm{III}}}(u) \cdot \underset{2\nu-1}{\mathrm{I}}(q\beta e)].$$

Ниже приводим окончательные формулы для $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$, $L_6^{(1)}$ в случае внешнего варианта:

$$\frac{1}{a} L_1^{(1)} = - \frac{2m_j}{1+m} \Big[\Big[- \sum_{\nu=1}^{\infty} \overset{(0,0)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \cdot E^{-\nu u} - \left(\frac{a_j}{a}\right) \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu [2 \{\cos\omega \cdot \overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) -$$

$$- \sin\omega \cdot \overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\} \{\cos\lambda \overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Z}}(u) + \sin\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Z}}(u)\} + 2\cos i \{\sin\omega \cdot \overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) + \cos\omega \cdot \overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\} \times$$

$$\times \{\cos\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Z}}(u) - \sin\lambda \cdot \overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Z}}(u)\}] + \frac{3}{4} \left(\frac{a_j}{a}\right)^2 \sum_{\nu=3}^{\infty} \nu \left[\left\{ \frac{1}{2} (3 + \cos 2i) \times \right.\right.$$

$$\times (\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \cos 2\omega - \overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e) \sin 2\omega) + \frac{1}{2} \sin^2 i\, \overset{(2,0)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \Big\} \{\cos 2\lambda \cdot \overset{(2)}{\underset{\nu,2}{Z}}(u) + \sin 2\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Z}}(u)\} +$$

$$+ 2 \cos i \{\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \sin 2\omega + \overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e) \cos 2\omega\} \{\cos 2\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Z}}(u) - \sin 2\lambda \cdot \overset{(2)}{\underset{\nu,2}{Z}}(u)\} -$$

$$- \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 i\, (\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \cos 2\omega - \overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e) \sin 2\omega) + \frac{1 + 3\cos 2i}{12} \cdot \overset{(2,0)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e) \right\} \Big] E^{-\nu u} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot -$$

$$- \left(\frac{a}{a_j}\right)^2 [- \cos\omega \{\cos\lambda \cdot \overset{(2)}{\underset{1,1}{X}}(u) + \sin\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{1,1}{X}}(u)\} -$$

$$- \sin\omega \cos i \{\cos\lambda \cdot \overset{(1)}{\underset{1,1}{X}}(u) - \sin\lambda \cdot \overset{(2)}{\underset{1,1}{X}}(u)\} - \sqrt{e^2 - 1} \sin\omega \{\cos\lambda \cdot \overset{(4)}{\underset{1,1}{X}}(u) +$$

$$+\sin\lambda\cdot\overset{(3)}{\underset{1,1}{X}}(u)\}+\sqrt{e^2-1}\cos\omega\cos i\,\{\cos\lambda\cdot\overset{(3)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\sin\lambda\cdot\overset{(4)}{\underset{1,1}{X}}(u)\}\Big]\Big]+\text{const.}$$

$$\overset{(1)}{\underset{2}{L}}=\frac{m_j}{1+m}\,\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\Big[\Big[\frac{a_j}{a}\sum_{\nu=2}^{\infty}\Big[-\{\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\sin\omega+\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cos\omega\}\times$$

$$\times\{\cos\lambda\overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)+\sin\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)\}+\{\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cos\omega-\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\sin\omega\}\times$$

$$\times\{\cos\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)-\sin\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)\}\cos i\Big]-$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{a_j}{a}\right)^2\sum_{\nu=3}^{\infty}\Big[-\frac{3+\cos 2i}{2}\{\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\sin 2\omega+\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cos 2\omega\}\times$$

$$\times\{\cos 2\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)+\sin 2\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)\}+2\{\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cos 2\omega-\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\sin 2\omega\}\times$$

$$\times\{\cos 2\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)-\sin 2\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)\}\cos i-\sin^2 i\,\{\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\sin 2\omega+\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cos 2\omega\}\times$$

$$\times\left\{e\cdot\overset{(4)}{\underset{\nu,1,0}{\text{III}}}(u)+\frac{E^{-\nu u}}{\nu}\right\}\Big]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-$$

$$-\left(\frac{a}{a_j}\right)^2\Big[-(\sin\omega\cos\lambda+\cos\omega\sin\lambda\cos i)\left\{-\frac{3e}{2}\overset{(4)}{\underset{0,1}{X}}(u)+(1+e^2)\overset{(4)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\right.$$

$$\left.-\frac{e}{2}\overset{(4)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}-(\sin\omega\sin\lambda-\cos\omega\cos\lambda\cos i)\left\{-\frac{3e}{2}\overset{(3)}{\underset{0,1}{X}}(u)+(1+e^2)\overset{(3)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\right.$$

$$\left.-\frac{e}{2}\overset{(3)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}-\sqrt{e^2-1}\,(\cos\omega\cos\lambda-\sin\omega\sin\lambda\cos i)\left\{-\overset{(2)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\frac{e}{2}\overset{(2)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}-$$

$$-\sqrt{e^2-1}\,(\cos\omega\sin\lambda+\sin\omega\cos\lambda\cos i)\left\{-\overset{(1)}{\underset{1,1}{X}}(u)+\frac{e}{2}\overset{(1)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}\Big]\Big]\Big]+\text{const.}$$

$$\overset{(1)}{\underset{6}{L}}=\frac{m_j}{1+m}\,\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{e^2-1}}\Big[\Big[\frac{a_j}{a}\sum_{\nu=2}^{\infty}[\{\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cos\omega-\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\sin\omega\}\{-\cos\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)+$$

$$+\sin\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)\}+\{\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cdot\sin\omega+\overset{(1,1)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cos\omega\}\{\cos\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)+\sin\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,1}{Y}}(u)\}\cos i\Big]-$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{a_j}{a}\right)^2\sum_{\nu=3}^{\infty}\Big[\Big\{\frac{1}{4}(3+\cos 2i)(\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cos 2\omega-\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cdot\sin 2\omega)+$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 i\,\overset{(2,0)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\Big\}\{-\cos 2\lambda\cdot\overset{(2)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)+\sin 2\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)\}+$$

$$+\{\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Psi}}(e)\cdot\sin 2\omega+\overset{(2,2)}{\underset{\nu}{\Phi}}(e)\cos 2\omega\}\{\cos 2\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)+\sin 2\lambda\cdot\overset{(1)}{\underset{\nu,2}{Y}}(u)\}\cos i\Big]+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-$$

$$-\left(\frac{a}{a_j}\right)^2\left[(\cos\omega\sin\lambda+\sin\omega\cos\lambda\cos i)\left\{-\frac{3e}{2}\overset{(4)}{\underset{0,1}{X}}(u)+(1+e^2)\overset{(4)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e}{2}\overset{(4)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}-(\cos\omega\cos\lambda-\sin\omega\sin\lambda\cos i)\left\{-\frac{3e}{2}\overset{(3)}{\underset{0,1}{X}}(u)+(1+e^2)\overset{(3)}{\underset{1,1}{X}}(u)-\right.$$

$$\left.-\frac{e}{2}\overset{(3)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}-\sqrt{e^2-1}\,(\sin\omega\sin\lambda-\cos\omega\cos\lambda\cos i)\left\{-\overset{(2)}{\underset{1,1}{X}}(u)+\frac{e}{2}\overset{(2)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}+$$

$$\left.\left.+\sqrt{e^2-1}\,(\sin\omega\cos\lambda+\cos\omega\sin\lambda\cos i)\left\{-\overset{(1)}{\underset{1,1}{X}}(u)+\frac{e}{2}\overset{(1)}{\underset{2,1}{X}}(u)\right\}\right]\right]+\text{const}.$$

В этих формулах через $\overset{(1)}{\underset{n,q}{Z}}(u)$, $\overset{(2)}{\underset{n,q}{Z}}(u)$ обозначено $\frac{1}{2}\{\overset{(3)}{\underset{n,q}{X}}(u)-\overset{(1)}{\underset{n,q}{X}}(u)\}$, $\frac{1}{2}\{\overset{(4)}{\underset{n,q}{X}}(u)-\overset{(2)}{\underset{n,q}{X}}(u)\}$ соответственно.

В заключение заметим, что если рассматриваются возмущения в области, достаточно близкой к перицентру, то можно получить новые выражения для разложений $\frac{\sin}{\cos} q\beta N$, быстро сходящиеся в этом частном случае. Для этого положим

$$x = 1 - E^{-u}.$$

Тогда разложения $\frac{\sin}{\cos} q\beta N$ по степеням x (ограничиваясь второй степенью x) имеют вид

$$\sin q\beta N = \frac{3}{2}q\beta(e-1) - 2q\beta(e-1)E^{-u} + \frac{1}{2}q\beta(e-1)E^{-2u} - \ldots \quad (13)$$

$$\cos q\beta N = 1 - \frac{1}{2}q^2\beta^2(e-1)^2 + q^2\beta^2(e-1)^2E^{-u} - \frac{1}{2}q^2\beta^2(e-1)^2E^{-2u} + \ldots \quad (14)$$

Подставив (13), (14) в подынтегральные функции (10), (12) и проинтегрировав, получим новые выражения для $\overset{(i)}{\underset{\alpha,q}{X}}(u)$, $\overset{(i)}{\underset{n,q}{Y}}(u)$, которые быстро сходятся для данного частного случая.

§ 4. Возмущения гиперболических элементов в непосредственной близости возмущающих тел

При нахождении возмущаемого тела в непосредственной близости от возмущающего элементы первого могут претерпеть сильное изменение. Именно это обстоятельство побудило Тиссерана [3] выдвинуть известный критерий об идентичности комет. В силу этого приводимые нами формулы для возмущений элементов в случае прохождения комет через сферу действия Юпитера дают недостаточно точное представление о настоящих возмущениях. Поэтому разумно избрать способ, который был развит Лапласом [4] и состоит в том, что Юпитер рассматривают как главное тело, а Солнце — как возмущающее тело.

Чтобы проследить за кометой во время ее пребывания в сфере действия Юпитера, радиус которой в нашем случае $\rho = a_j\sqrt[5]{m_j^2}$, мы ставим задачу — определить ее орбиту по отношению к новому главному телу. Для этого мы рассматриваем момент $t=t_1$, который близок к тому, когда $p=a_j \sqrt[5]{m_j^2}$, и рассчитываем гелиоцентрические координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ кометы. Для этого же момента рассчитываем гелиоцентрические координаты и скорость Юпитера по формулам:

$$x_j = a_j \cos\theta_j, \quad y_j = a_j \sin\theta_j,$$
$$\dot{x}_j = -n_j y_j, \quad \dot{y}_j = n_j x_j.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\xi = x - x_j, \quad \eta = y - y_j, \quad \zeta = z,$$
$$\dot{\xi} = \dot{x} - \dot{x}_j, \quad \dot{\eta} = \dot{y} - \dot{y}_j, \quad \dot{\zeta} = \dot{z}$$

в качестве относительных координат и составляющих скорости кометы по отношению к Юпитеру как центральному телу. По этим шести величинам можно, как известно, рассчитать элементы орбиты, которую комета описывает вокруг Юпитера. Предположим, что имеет место следующее неравенство:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 > \frac{2k\sqrt{m_j + m}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

тогда невозмущенное движение кометы по отношению к Юпитеру будет гиперболическим, и наша задача приводится к изучению возмущений ковацентрических гиперболических элементов под действием возмущения Солнца.

Можно показать, что, производя некоторые изменения в формулах, определяющих возмущения гелиоцентрических элементов, мы получим формулы, дающие возмущения юпицентрических элементов.

Во-первых, m_j и 1, т. е. масса Юпитера и масса Солнца меняются ролями. Во-вторых, обозначая через $\underset{1}{a}$, $\underset{1}{e}$, $\underset{1}{\omega}$, $\underset{1}{i}$, $\underset{1}{N_0}$, $\underset{1}{\Omega}$ юпицентрические элементы вместо гелиоцентрических элементов a, e, ω, i, явно входящих в формулы для $L_i^{(\prime)}$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$, подставим $\underset{1}{a}$, $\underset{1}{e}$, $\underset{1}{\omega}$, $\underset{1}{i}$. Что касается λ, то поскольку координаты Солнца относительно Юпитера в этом случае $\underset{1}{\theta}_j = \theta_j + 180°$, 0 найдем

$$\Gamma_1 = \underset{1}{\theta}_j - \underset{1}{\Omega} = \theta_j + 180° - \underset{1}{\Omega}.$$

Но

$$\theta_j = n_j (t - t_0),$$

то, учитывая, что $N_1 = n_1 (t - t_0) + N_{01}$, получим $\theta_j = \beta_1 (N_1 - N_{01})$, где

$$\beta_1 = \frac{n_j}{n_1}, \quad n_1 = \frac{k\sqrt{m_j + m}}{a_1^{3/2}}.$$

Следовательно, можно написать

$$\Gamma_1 = \beta_1 N_1 - (\lambda_1 - 180°),$$

где

$$\lambda_1 = \beta_1 N_{10} + \Omega_1.$$

Это значит, что вместо $\lambda = \beta N_0 + \Omega$ нужно подставить не просто $\lambda_1 = \beta_1 N_{01} + \Omega_1$, а $\lambda_1 - 180°$.

Итак, чтобы формулы для $L_i^{(')}$ $(i=1, 2, ..., 6)$ были пригодны в случае вычисления возмущений первого порядка юпицентрических элементов, нужно вместо a, ω, e, i, λ, β подставить a_1, ω, $\underset{1}{e}$, $\underset{1}{i}$, $\lambda_1-180°$, β_1 соответственно. С другой стороны, нужно подставить вместо u u_1, определяемый аналогом уравнения Кеплера

$$\underset{1}{e}\,\mathrm{sh}\,u_1-u_1=N_1=n_1\,(t-t_0)+N_{01}.$$

Теперь пусть момент $t=t_2$ близок к моменту выхода кометы из сферы действия Юпитера. Тогда по новым преобразованным формулам можно вычислить $\delta_{a_1}^{(')}$, $\delta_{e_1}^{(')}$, $\delta' N_{01}$ за время t_2-t_1. На этом основании можно определить в момент $t=t_2$ юпицентрические координаты и составляющие скорости кометы, а затем координаты Юпитера. Это дает нам возможность определить гелиоцентрические координаты и составляющие скорости кометы при $t=t_2$. Тогда для этого момента можно определить новые гелиоцентрические элементы кометы. Далее вычисление возмущений производится по старым формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмад Х. Х. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 15, 1964.
2. Еленевская Н. Б. «Бюл. ИТА», **6**, 7 (80), 1957.
3. Tisserand F. Traite de Mécanique Céleste, **4**, Paris, 1896.
4. Laplace P. Traite de Mécanique Céleste, **4**, Paris, 1805.

Поступила в редакцию
20. 7 1963 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии