Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1964

Г. Ф. СИТНИК

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Приводится вывод неадиабатического критерия устойчивости механического равновесия слоя газа, находящегося в поле силы тяжести. Этот критерий указывает на новые возможности нарушения равновесия, которые не предусматриваются адиабатическим критерием.

Для суждения об устойчивости механического или гидростатического равновесия толстых слоев газа до сих пор обычно используется критерий Шварцшильда [1, 2]

$$\left(\frac{dT}{dh}\right)_0 < \left(\frac{dT}{dh}\right)_{ag} \tag{1}$$

или его видоизменения. (Ось h направлена вниз.) Этот критерий указывает, что равновесие устойчиво относительно адиабатических токов, если температурный градиент в равновесной системе меньше адиабатического градиента. Однако предположение об адиабатичности процесса, возмущающего равновесие, является существенным ограничением. При таком предположении не используется полностью первое приближение, обычно применяющееся при обсуждении вопроса об устойчивости равновесия.

В настоящей работе рассматриваются условия устойчивости механического равновесия невязкой жидкости относительно конвективных токов, сопровождающихся тепловым обменом с окружающей средой. Предполагается, что движение части жидкости или газа происходит так, что на каждом уровне h эта часть принимает давление, равное давлению в равновесной среде. Тогда условие устойчивости равновесия можно написать в виде

$$dp_0 \delta\rho > 0, \tag{2}$$

где p_0 — давление в равновесной системе на уровне h, $\delta\rho = \rho_0 - \rho$, ρ_0 и ρ — плотность на уровне h в равновесной системе и в возмущающем токе соответственно. Условие (2) показывает, что для устойчивости равновесия необходимо, чтобы вариация плотности $\delta\rho$, появляющаяся при указанном движении части газа, имела знак, одинаковый со знаком $d\rho_0$. Например, система будет устойчива, если при перемещении части газа на величину dh (от h_0 до h) в направлении роста давления выполняется условие $\delta\rho > 0$. В этом случае на уровне h плотность переместившейся части газа окажется меньше плотности окружающей равновесной среды ($\rho < \rho_0$) и появится сила, стремящаяся вернуть эту часть газа обратно в прежнее положение. Аналогичная сила появится, если при перемещении части газа в направлении уменьшения давления выполняется условие (2). При нарушении этого условия в системе появляются макроскопические конвективные движения ее отдельных частей. Условие (2) указывает на существование подъемной силы и является достаточным условием минимума функции, играющей роль потенциальной энергии в обобщенном интеграле Бернулли (см. [4]).

Критерию устойчивости равновесия (2) можно придать другой вид. В общем случае плотность $\rho(S, p)$ есть функция независимых переменных состояния энтропии S и давления p. Но в рассматриваемом случае вариацию плотности $\delta\rho$ следует определять при постоянном давлении p, так как на любой высоте h давление внутри возмущающего тока и в окружающей равновесной среде равны между собой. Тогда имеем

$$\delta\rho = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p \delta S, \tag{3}$$

где $\delta S = S_0 - S$, T — температура и c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Для веществ, расширяющихся при нагревании, критерий устойчивости равновесия принимает вид

$$dp_0 \delta S < 0. \tag{4}$$

Для дальнейшего преобразования критерия устойчивости целесообразно дать иное выражение для вариации δS. Это новое выражение наиболее наглядно показывает степень приближения, с которой обычно рассматривается вопрос об устойчивости равновесия. Между двумя уровнями с глубинами h_0 и h, по-видимому, происходит перемещение части газа (возмущающий ток). Равновесное значение энтропии S_0' на исходном уровне h_0 можно представить рядом Тейлора по степеням малой величины dh через значения энтропии и ее производных на уровне h как в равновесной среде, так и в возмущающем токе. Тогда, ограничив ряды членами первого порядка малости и произведя вычитание соответствующих соотношений, получим искомое выражение для δS

$$S_0 - S = \delta S = \left(\frac{dS_0}{dh} - \frac{dS}{dh}\right) dh = dS_0 - dS. \tag{5}$$

Подставим в (4) вместо δS его выражение (5) и воспользуемся уравнением гидростатического равновесия в виде

$$dp_0 = g\rho_0 dh, \tag{6}$$

где g — ускорение силы тяжести. Тогда критерий устойчивости получается в виде

$$\frac{dS_0}{dh} < \frac{dS}{dh} \quad \text{или} \quad \frac{dS_0}{dp_0} < \frac{dS}{dp_0}. \tag{7}$$

Следовательно, для устойчивости механического равновесия относительно конвективных токов, сопровождающихся тепловым обменом с окружающей средой, градиент энтропии в равновесной среде должен быть меньше градиента энтропии в возмущающем токе.

Если предположить, что возмущающий ток является адиабатическим, то $\frac{dS}{dh} = 0$. Тогда равенство (5) принимает вид

$$\delta S_{ag} = \frac{dS_0}{dh} dh = dS_0. \tag{8}$$

Критерий устойчивости (7) в этом случае переходит в

$$\frac{dS}{dh} < 0, \tag{9}$$

т. е. для обеспечения устойчивости равновесия относительно адиабатических токов необходимо, чтобы энтропия в равновесной системе росла вверх (dh — отрицательна).

Сравнение выражений (5) и (8) показывает, что предположение об адиабатичности процесса, возмущающего равновесие, затрагивает члены первого порядка. Другими словами, при таком предположении полностью не используется первое приближение, обычно применяющееся для суждения об устойчивости равновесия. Естественно, что при этом могут ускользнуть из рассмотрения некоторые существенные стороны явления. Достаточно сравнить соответствующие выражения условий устойчивости (7) и (9). В соответствии с условием (9) для устойчивости равновесия необходимо только, чтобы энтропия в системе росла вверх. Однако по более общему критерию (7) этого еще недостаточно и при росте энтропии вверх условие (7) может оказаться невыполнимым. Критерий (7) указывает на новые возможности нарушения равновесия и появления конвекции в системе, которые не предусматриваются условием (9).

Критерий устойчивости равновесия (7) можно преобразовать, если перейти от переменных состояний S и p к T и p. Из термодинамики известно, что

$$\frac{dS}{dh} = \frac{c_p}{T}\left[\frac{dT}{dh} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dh}\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7) и сокращая подобные члены, получим критерий устойчивости в виде

$$\frac{dT_0}{dh} < \frac{dT}{dh}. \tag{11}$$

В этом виде критерий гласит, что механическое равновесие будет устойчивым относительно произвольного конвективного тока при условии, если градиент температуры в равновесных условиях меньше соответствующего градиента в возмущенном токе. Для адиабатического тока имеем $\frac{dT}{dh} = \left(\frac{dT}{dh}\right)_{ag}$ и критерий (11) переходит в критерий Шварцшильда [1].

Критерий устойчивости равновесия в виде (11) применялся автором в более ранней работе [3]. Там на основе этого критерия при некоторых упрощающих предположениях получен ряд выводов об условиях существования классического лучистого равновесия в атмосферах Солнца и звезд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarzschild K. Gött. Nach., s. 46, 1906.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1954.
3. Ситник Г. Ф. «Тр. ГАИШ», 11, 33, § 9, 1939.
4. Ситник Г. Ф. «Астрономический журнал», 40, 413, 1963.

Поступила в редакцию
11. 6 1963 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии