Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1964

Г. К. ЧЕПУРНЫХ

К ВОПРОСУ О СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется вопрос о выборе нелинейного члена в нелинейной теории классического спинорного поля. Исследуется на с-инвариантность нелинейные уравнения классического спинорного поля и показывается, что с-инвариантные уравнения имеют симметричные решения ψ и $\psi^c = C \cdot \overline{\psi}^{\text{т}}$, соответствующие как положительной, так и отрицательной энергии. С-инвариантность уравнений в классическом случае означает симметричность теории относительно знака энергии.

Исследование нелинейных уравнений на с-инвариантность

Для исследования на с-инвариантность нелинейных уравнений классического спинорного поля воспользуемся следующими известными соотношениями [1]

$$\psi^c = c \cdot \overline{\psi}^{\text{т}}, \ \overline{\psi^c} = \psi^{\text{т}} \cdot c^{\text{т}-1}, \ -c\gamma^{\text{т}\mu} = \gamma^{\text{т}} c, \ c^{\text{т}} c^{-1} = -1; \tag{1}$$

$$c \cdot c^{-1} = 1, \ c^{\text{т}} = -c, \ c^{\text{т}} \gamma^{\text{т}\mu} = \gamma^{\mu} \cdot c \tag{2}$$

и докажем справедливость равенств

$$\overline{\psi^c} \cdot \psi^c = -\overline{\psi}\psi, \tag{3}$$

$$\frac{i}{2}\left(\overline{\psi^c} \cdot \gamma^{\mu} \frac{\partial \psi^c}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overline{\psi^c}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi^c\right) = -\frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi\right). \tag{4}$$

Применяя (1), получаем

$$\overline{\psi^c}\psi = \psi^{\text{т}} c^{\text{т}-1} \cdot c\overline{\psi}^{\text{т}} = (\psi^{\text{т}} \cdot c^{\text{т}-1} c \overline{\psi}^{\text{т}})^{\text{т}} = \overline{\psi} c^{\text{т}} c^{-1} \psi = -\overline{\psi}\psi.$$

Затем, используя (1) и (2), имеем

$$\frac{i}{2}\left(\overline{\psi^c}\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi^c}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overline{\psi^c}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi^c\right) = \frac{i}{2}\left(\psi^{\text{т}} \cdot c^{\text{т}-1} \cdot \gamma^{\mu} \cdot c \frac{\partial \overline{\psi}^{\text{т}}}{\partial x^{\mu}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \psi^{\text{т}}}{\partial x^{\mu}} c^{\text{т}-1} \cdot \gamma^{\mu} \cdot c \cdot \overline{\psi}^{\text{т}}\right)^{\text{т}} = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^{\mu}} c^{\text{т}} \cdot \gamma^{\text{т}\mu} \cdot c^{-1} \psi - \overline{\psi} c^{\text{т}} \cdot \gamma^{\text{т}\mu} \times \right.$$

$$\left. \times c^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi - \overline{\psi}\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}\right) = -\frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi\right).$$

Поскольку билинейные комбинации

$$I_0 = \overline{\psi}\psi \text{ и } I_1 = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu\psi\right)$$

при с-преобразовании в классическом случае ведут себя как псевдоскаляры, то уравнения, полученные из лагранжиана

$$L = I_1 - mI_0 + W, \tag{5}$$

где

$$W = gI_0^{n} + g' \cdot I_1^{n_2} + g'' I_1^{n_3} \cdot I_0^{n_4}, \tag{6}$$

будут с-инвариантны только в том случае, если n_1, n_2, $n_3 + n_4$ нечетны

Очевидно, все уравнения, полученные из лагранжиана, в котором нелинейный член W имеет вид, отличный от (6), не являются с-инвариантными. И поскольку билинейные комбинации I_0, I_1 при инверсии времени [6]

$$x^0 \to -x^0,\ x^n \to x^n,\ \psi \to \rho_2\psi,\ \overline{\psi} \to -\overline{\psi}\rho_2^{-1} \tag{7}$$

ведут себя как псевдоскаляры, то инвариантными относительно инверсии времени являются только с-инвариантные уравнения.

Исследование структуры тензоров энергии — импульса

Линейный случай. Определим значения компонентов тензоров энергии—импульса

$$T^{\mu\nu} = \frac{\hbar \cdot c \cdot i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma^\nu\psi\right),$$

используя известные решения [2] линейного уравнения Дирака. Решения выбираются в виде плоской волны $\psi_i = b_i e^{i(kx-\omega t)}$, распространяющейся вдоль оси ox. Используя решение $\psi^{(+)}$, соответствующее положительной энергии (массе), и решение $\psi^{(-)}$, соответствующее отрицательной энергии (массе), получаем значения для компонентов тензора $\overset{(+)}{T^{\mu\nu}}$

$$\overset{(+)}{T^{11}} = -\frac{c^2p^2}{E},\ \overset{(+)}{T^{10}} = \overset{(+)}{T^{01}} = cp,\ \overset{(+)}{T^{00}} = E$$

и для компонентов тензора $\overset{(-)}{T^{\mu\nu}}$

$$\overset{(-)}{T^{11}} = \frac{c^2p^2}{E},\ \overset{(-)}{T^{10}} = \overset{(-)}{T^{01}} = cp,\ \overset{(-)}{T^{00}} = -E,$$

где

$$p = \hbar k,\ E = \hbar\omega.$$

Остальные компоненты тензоров $\overset{(+)}{T^{\mu\nu}}$ и $\overset{(-)}{T^{\mu\nu}}$ равны нулю. Используя решение $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$ уравнения Дирака, получаем для пространственно-временных компонентов $T^{10} = T^{01} = 2cp$. Все остальные компоненты, в том числе и T^{00}, равны нулю. Определим, каким массам соответствует решение $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$, воспользовавшись соотношением $E^2 = p^2 \cdot c^2 + M^2c^4$. Полагая $E = T^{00} = 0$, $c = 1$, $p = T^{10} = 2p$, получим $M = \sqrt{-4p^2} = 2pi$. Следовательно, решение ψ соответствует системам мнимой массы [3], которые обладают равной нулю энергией, но неравным нулю импульсом. Систему, которая обладает мнимой массой, можно представить как систему, состоящую из двух частиц положительной и отрицательной массы, причем $m_+ = |m_-| = m$. Обе частицы должны двигаться вдоль линии x с одинаковой по абсолютной величине скоростью v, но в противоположные стороны. Для такой системы очевидно $E = 0$, $p = 2m \cdot v$ и, следовательно, $M^2 = -4m^2v^2 < 0$. Тензора $\overset{(+)}{T^{\mu\nu}}$, $\overset{(-)}{T^{\mu\nu}}$ и $T^{\mu\nu}$ неэквивалентны. Это видно из того, что корни уравнений $|\overset{(+)}{T^{\mu\nu}} - \lambda^{(+)}\delta^{\mu\nu}| = 0$, $|\overset{(-)}{T^{\mu\nu}} - \lambda^{(-)}\delta^{\mu\nu}| = 0$, $|T^{\mu\nu} - \lambda\delta^{\mu\nu}| = 0$ разные. Таким образом, уравнение Дирака дает три принципиально различных типа решений.

Нелинейный случай. Определим значения компонентов тензоров энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и $\overset{c}{T^{\mu\nu}}$, используя симметричные решения ψ и ψ^c нелинейного с-инвариантного уравнения:

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 3g(\bar{\psi}\psi)^2\right]\psi = 0. \qquad (8)$$

В этом случае тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma^\nu\psi\right) + 2g(\bar{\psi}\psi)^3\delta^{\mu\nu}.$$

Поскольку нет точных аналитических решений уравнения (8), воспользуемся решениями из [4] в форме

$$\psi = e^{-i\omega t}\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ iG\cos\theta \\ iG\sin\theta e^{i\varphi} \end{bmatrix},$$

где F и G — функции только r.

Выполненные вычисления показывают, что для пространственных и временных компонентов всегда выполняется равенство*: $T^{\mu\nu} = -\overset{c}{T^{\mu\nu}}$. Тензора $T^{\mu\nu}$ и $\overset{c}{T^{\mu\nu}}$ неэквивалентны, так как корни уравнений $|T^{\mu\nu} - \lambda\delta^{\mu\nu}| = 0$, $|\overset{c}{T^{\mu\nu}} - \lambda^c\delta^{\mu\nu}| = 0$ разные.

Поскольку $T^{00} = -\overset{c}{T^{00}}$, то нелинейные с-инвариантные уравнения спинорного поля (являющиеся также инвариантными относительно инверсии времени) имеют симметричные решения, соответствующие положительной и отрицательной энергии. Следовательно, частицеподобные решения нелинейного с-инвариантного уравнения спинорного поля могут дать два симметричных спектра масс, спектр положительных масс и спектр отрицательных масс.

Значение квазизаряда

Поскольку мы ограничиваемся только спинорным полем и не учитываем электромагнитного, то величину $Q = \int I^0 d^3x$, определенную из уравнения непрерывного тока $\frac{dI^\mu}{dx^\mu} = 0$, можно назвать зарядом только

---

* Аналогично тому, как в линейном случае для пространственных и временных компонентов выполняется равенство $\overset{(+)}{T^{\mu\nu}} = -\overset{(-)}{T^{\mu\nu}}$.

условно [5]. Назовем эту величину квазизарядом. В нелинейной теории Q определяется выражением [4]

$$Q=\int\left(1+\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)\psi^+\psi\, d^3x.$$

В случае если W не зависит от I_1, то при переходе от ψ к ψ^c абсолютное значение и знак квазизаряда Q остаются неизменными. Это связано с выполнением равенства $\psi^{c+}\psi^c=\psi^+\psi$, справедливость которого легко показать, используя (1) и (2).

Если $W=g'I_1^{n_2}+g''I_1^{n_3}I_0^{n_4}$, то Q при переходе от ψ к ψ^c останется неизменным по абсолютной величине при условии, если n_2, n_3+n_4 нечетны. Квазизаряд Q, оставаясь неизменным по знаку при инверсии времени, может остаться неизменным и по абсолютной величине лишь в том случае, если в лагранжиане (5) n_2, n_3+n_4 нечетны. Гамильтониан $H=\int T^{00}d^3x$ останется неизменным по абсолютной величине при инверсии времени также только в том случае, если в (5) n_1, n_2, n_3+n_4 нечетны. Таким образом, частицеподобные решения только c-инвариантных уравнений могут дать два симметричных спектра масс: положительный и отрицательный. Причем квазизаряды частиц положительной и отрицательной массы имеют один и тот же знак.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, т. 1. ИЛ, 1957.
2. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. Физматгиз, 1958.
3. Terletsky I. P. Journ Physique Rad., **23**, 910, 1962.
4. Finkelstein R., Levier L., Ruderman M. Phys. Rev., **83**, 326—332, 1951. Перевод. Сб. «Нелинейная квантовая теория поля», под ред. Д. Д. Иваненко. ИЛ, М., 1959.
5. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
6. Schwinger I. Phys. Rev., 82, 914, 1951. Перевод. Сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», под ред. Д. Д. Иваненко. ИЛ, М., 1954.

Поступила в редакцию
14. 10 1963 г.

Кафедра
теоретической физики