Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1964

В. Н. МЕЛЬНИКОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТРЕХВРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

В работе получены спектральные представления трехвременных причинных, запаздывающих и опережающих функций Грина, а также доказаны спектральные теоремы деления с использованием полученного формализма.

В последние годы в изучении проблемы многих тел с успехом применяются методы, связанные с привлечением техники функций Грина, как причинных, так и опережающих и запаздывающих. При этом особенно удобным оказалось использование так называемых спектральных представлений этих функций при рассмотрении двухвременного формализма. Довольно обстоятельный обзор этих функций приведен в работе Д. Н. Зубарева [1].

В настоящей работе рассматриваются трехвременные температурные функции Грина, используемые при рассмотрении следующих приближений в процессе отыскания решений цепочек уравнений. При исследовании этих зацепляющихся цепочек уравнений для функций Грина возникает необходимость в расцеплении цепочек, а следовательно и в рассмотрении функций Грина указанной более сложной конструкции. Кроме того, трехвременные функции окажутся полезными при построении уравнений движения для функций Грина с меньшим числом времен (например, введение трехвременного формализма вместо двухвременного). В § 1 и 2 для этих функций находятся спектральные представления, в § 3 доказывается теорема деления, полезная при построении решения этих цепочек уравнений. Аналогичные спектральные представления для трехвременных функций были получены В. Л. Бонч-Бруевичем [2]. Данный подход отличается большей симметрией и позволяет доказать теоремы деления довольно наглядным способом.

§ 1. Спектральные представления трехвременных температурных причинных функций Грина

Причинная трехвременная функция Грина, или среднее значение упорядоченного произведения операторов, определяется следующим образом:

$$G_c(t_1 t_2 t_3) = \left\langle T\left(A_1(t_1)\, A_2(t_2)\, A_3(t_3)\right)\right\rangle, \tag{1}$$

где символ $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по большому каноническому ансамблю Гиббса, т. е. $\langle \ldots \rangle = Q^{-1} Sp\,(e^{-\mathrm{H}/\theta} \ldots)$, $Q = Sp e^{-\mathrm{H}/\theta} = e^{-\Omega/\theta}$; $\mathrm{H} = H - \mu N$, H — гамильтониан системы, μ — химический потенциал, N—оператор полного числа частиц. Операторы $A_i(t_i)$ взяты в представлении Гайзенберга:

$$A(t) = e^{i\mathrm{H}t} A(0)\, e^{-i\mathrm{H}t}.$$

В качестве операторов $A(0)$ могут быть взяты операторы рождения или уничтожения, а также их комбинации или единичная ступенчатая функция $\theta(t)$, определяемая как

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Для простоты рассмотрим случай бозе-систем. Доказательство аналогичных утверждений для ферми-систем не вызывает никаких затруднений.

Нашей целью является получение спектрального представления для функции $G_c(t_1 t_2 t_3)$. Определим прямое фурье-преобразование

$$G_c(t_1 t_2 t_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int G_c(E_1 E_2 E_3)\, e^{-i(E_1 t_1 + E_2 t_2 + E_3 t_3)} dE_1\, dE_2\, dE_3 \tag{2}$$

и обратное фурье-преобразование

$$G_c(E_1 E_2 E_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int G_c(t_1 t_2 t_3)\, e^{i(E_1 t_1 + E_2 t_2 + E_3 t_3)}\, dt_1\, dt_2\, dt_3. \tag{3}$$

В отличие от работы [2] здесь используются тройные интегралы, а термодинамическое равновесие, при котором $G_c(t_1 t_2 t_3) = G_c(t_1 - t_2;\ t_2 - t_3)$ не учитывается. Использование данного представления кажется нам более удобным. Ввиду громоздкости выражения (1) мы будем преобразовывать каждое из слагаемых в отдельности, а затем подставим их в (3). Для того чтобы выделить временную зависимость из тройных произведений операторов $A_i(t_i)$, используем собственные функции c_ν оператора H и свойство полноты системы этих функций:

$$\sum_\nu c_\nu^* c_\nu = 1, \quad e^{-i\mathrm{H}t} c_\nu = e^{-iE_\nu t} c_\nu,$$

$$c_\nu^* e^{i\mathrm{H}t} = c^*{}_\nu e^{iE_\nu t}.$$

Тогда первое слагаемое (1) преобразуется так:

$$\langle A_1(t_1) A_2(t_2) A_3(t_3) \rangle = Q^{-1} \sum_\nu e^{-E_\nu/\theta} (c_\nu^* A_1(t_1) A_2(t_2) A_3(t_3) c_\nu) =$$

$$= Q^{-1} \sum_{\mu,\nu,\eta} (c_\nu^* A_1(t_1) c_\mu)(c_\mu^* A_2(t_2) c_\eta)(c_\eta^* A_3(t_3) c_\nu)\, e^{-E_\nu/\theta} =$$

$$= Q^{-1} \sum_{\mu,\nu,\eta} (c_\nu^* A_1(0) c_\mu)(c_\mu^* A_2(0) c_\eta)(c_\eta^* A_3(0) c_\nu)\, e^{-E_\nu/\theta} \times$$

$$\times \exp\{-i\,[(E_\mu - E_\nu) t_1 + (E_\eta - E_\mu) t_2 + (E_\nu - E_\eta) t_3]\}.$$

Вводя

$$I(v_1v_2v_3) = Q^{-1} \sum_{\mu,\eta,\nu} (c_\nu^* A_1 c_\mu)(c_\mu^* A_2 c_\eta)(c_\eta^* A_3 c_\nu) \times$$
$$\times e^{-E_\nu/\theta}\,\delta(E_\mu - E_\nu - v_1)\,\delta(E_\eta - E_\mu - v_2)\,\delta(E_\nu - E_\eta - v_3),$$

окончательно получаем

$$\langle A_1(t_1) A_2(t_2) A_3(t_3)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int I(v_1v_2v_3) \times$$
$$\times e^{-i(v_1t_1+v_2t_2+v_3t_3)}\delta(v_1+v_2+v_3)\,dv_1\,dv_2\,dv_3. \qquad (3a)$$

Наличие δ-функции сводит интеграл к двойному, что и отражает реальный факт зависимости от двух переменных. Такой вид спектрального разложения произведения операторов с выделением $\delta(v_1+v_2+v_3)$ согласуется с дальнейшими результатами, получаемыми при преобразовании выражений, содержащих интегральные представления θ-функций.

Аналогичным образом, используя операцию циклической перестановки индексов, преобразуем два следующих слагаемых (1) соответственно:

$$\langle A_2(t_2) A_3(t_3) A_1(t_1)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int I(v_1v_2v_3)\, e^{-i(v_1t_1+v_2t_2+v_3t_3)} \times$$
$$\times e^{-v_1/\theta}\,\delta(v_1+v_2+v_3)\,dv_1dv_2dv_3, \qquad (4)$$

$$\langle A_3(t_3) A_1(t_1) A_2(t_2)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int I(v_1v_2v_3)\, e^{-i(v_1t_1+v_2t_2+v_3t_3)} \times$$
$$\times e^{v_3/\theta}\,\delta(v_1+v_2+v_3)\,dv_1dv_2dv_3. \qquad (5)$$

Рассмотрение результатов (3а), (4) и (5) показывает, что порядки времен произведений операторов относятся к одному и тому же циклу 1, 2, 3. Этим и объясняется, что мы могли использовать одну и ту же спектральную плотность $I(v_1v_2v_3)$. При остальных слагаемых в (1) порядки времен относятся к циклу 2, 1, 3. Поэтому в отличие от случая двухвременных функция Грина приходится вводить еще вторую спектральную плотность

$$L(v_1v_2v_3) = Q^{-1} \sum_{\mu,\eta,\nu} (c_\nu^* A_2(0) c_\mu)(c_\mu^* A_1(0) c_\eta) \times$$
$$\times (c_\eta^* A_3(0) c_\nu)\, e^{-E_\nu/\theta}\,\delta(E_\eta - E_\mu - v_1)\delta(E_\mu - E_\nu - v_2)\,\delta(E_\nu - E_\eta - v_3).$$

Собирая полученные спектральные разложения (1), а затем подставляя в (3), получим

$$G_c(E_1E_2E_3) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dv_1dv_2dv_3dt_1dt_2dt_3\,\delta(v_1+v_2+v_3) \times$$
$$\times \{I(v_1v_2v_3)\,[\theta(t_1-t_2)\,\theta(t_2-t_3) + \theta(t_2-t_3)\,\theta(t_3-t_1)\,e^{-v_1/\theta} +$$
$$+ \theta(t_3-t_1)\,\theta(t_1-t_2)\,e^{v_3/\theta}] + L(v_1v_2v_3)\,[\theta(t_2-t_1)\,\theta(t_1-t_3) +$$
$$+ \theta(t_1-t_3)\,\theta(t_3-t_2)\,e^{-v_2/\theta} + \theta(t_3-t_2)\,\theta(t_2-t_1)\,e^{v_3/\theta}]\} \times$$
$$\times \exp\{i[(E_1-v_1)t_1 + (E_2-v_2)t_2 + (E_3-v_3)t_3]\}. \qquad (6)$$

Используя хорошо известное представление $\theta(t)$

$$\theta(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon t}\delta(t)\,dt=\frac{i}{2\pi}\int\frac{e^{-ixt}}{x+i\varepsilon}\,dx$$

и учитывая символическую формулу

$$\int\delta(a-x)\,\delta(b+x)\,dx=\delta(a+b),$$

окончательно преобразуем (6):

$$\int\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(t_1-t_2)\,\theta(t_2-t_3)$$

$$\exp\{i[(E_1-v_1)t_1+(E_2-v_2)t_2+(E_3-v_3)t_3]\}\,dt_1dt_2dt_3=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\frac{e^{i(E_1-v_1-x)t_1}e^{i(E_2-v_2+x-y)t_2}e^{i(E_3-v_3+y)t_3}}{(x+i\varepsilon)(y+i\varepsilon)}\,dxdydt_1dt_2dt_3=$$

$$=-2\pi\int\limits_{\infty}^{\infty}\ldots\int\frac{\delta(E_1-v_1-x)\,\delta(E_2-v_2+x-y)\,\delta(E_3-v_3+y)}{(x+i\varepsilon)(y+i\varepsilon)}\,dxdy=$$

$$=2\pi\frac{\delta(v_1+v_2+v_3)\,\delta(E_1+E_2+E_3)}{(E_1-v_1+i\varepsilon)(E_3-v_3-i\varepsilon)}.$$

Таким образом, на этом этапе мы получаем δ-функцию, обеспечивающую необходимую связь между величинами v_i, а также между величинами E_i. Наличие $\delta(E_1+E_2+E_3)$ указывает на инвариантность функции $G_c(t_1t_2t_3)$ относительно трансляций по времени. Окончательно получаем

$$G_c(E_1E_2E_3)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dv_1dv_2dv_3\delta(v_1+v_2+v_3)\times$$

$$\times\Big\{I(v_1v_2v_3)\Big[\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)}+\frac{e^{-v_1/\theta}}{(E_1-i\varepsilon-v_1)(E_2+i\varepsilon-v_2)}+$$

$$+\frac{e^{v_3/\theta}}{(E_2-i\varepsilon-v_2)(E_3+i\varepsilon-v_3)}\Big]+L(v_1v_2v_3)\Big[\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-v_2)(E_3-i\varepsilon-v_3)}+$$

$$+\frac{e^{-v_2/\theta}}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_2-i\varepsilon-v_2)}+\frac{e^{v_3/\theta}}{(E_1-i\varepsilon-v_1)(E_3+i\varepsilon-v_3)}\Big]\Big\},\qquad(7)$$

причем всегда выполняется тождество $E_1+E_2+E_3\equiv 0$. В данном случае все E_i $(i=1, 2, 3)$ являются действительными и не могут быть продолжены в комплексную область. Этим недостатком не обладают запаздывающие и опережающие функции Грина, к рассмотрению которых мы переходим.

§ 2. Спектральные представления температурных трехвременных запаздывающих и опережающих функций Грина

Запаздывающую функцию Грина определим как

$$G_r(t_1t_2t_3)=\theta(t_1-t_2)\,\theta(t_2-t_3)\,\langle[[A_1(t_1)\,A_2(t_2)]\,A_3(t_3)]\rangle+$$
$$+\theta(t_1-t_3)\,\theta(t_3-t_2)\,\langle[[A_1(t_1)\,A_3(t_3)]\,A_2(t_2)]\rangle,$$

где использована аналогия с двухвременными функциями Грина, а также симметризация по t_2 и t_3. Обозначения те же, что и при определении причинной функции Грина. Квадратные скобки означают коммутатор или антикоммутатор, в зависимости от того, являются ли операторы $A_i(t_i)$ бозе- или ферми-операторами. Используя полученные в предыдущем параграфе фурье-разложения тройных произведений операторов, а также интегральное представление для $\theta(t)$, получим

$$G_r(E_1E_2E_3) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dv_1dv_2dv_3\delta(v_1+v_2+v_3)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)}[I(1-e^{v_3/\theta})+L(e^{v_3/\theta}-1)]+\right.$$

$$+\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_2-i\varepsilon-v_2)}[I(e^{-v_1/\theta}-e^{v_3/\theta})+$$

$$\left.+L(e^{-v_2/\theta}-1)]\right\} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dv_1dv_2dv_3\delta(v_1+v_2+v_3)$$

$$\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)}\left\{\left(\frac{1-e^{v_3/\theta}}{E_3-i\varepsilon-v_3}\right)+\left(\frac{e^{-v_1/\theta}-e^{v_3/\theta}}{E_2-i\varepsilon-v_2}\right)I(v_1v_2v_3)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{e^{v_3/\theta}-1}{E_3-i\varepsilon-v_3}\right)+\left(\frac{e^{-v_2/\theta}-1}{E_2-i\varepsilon-v_2}\right)L(v_1v_2v_3)\right\}.\qquad(8)$$

Подобным же образом и опережающая функция

$$G_a(t_1t_2t_3) = \theta(t_3-t_2)\,\theta(t_2-t_1)\,\langle[[A_1(t_1)A_2(t_2)]A_3(t_3)]\rangle +$$

$$+\theta(t_2-t_3)\,\theta(t_3-t_1)\,\langle[[A_1(t_1)A_3(t_3)]A_2(t_2)]\rangle$$

может быть вычислена в E-представлении.

$$G_a(E_1E_2E_3) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dv_1dv_2dv_3\,\delta(v_1+v_2+v_3)\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-v_1)}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1-e^{v_3/\theta}}{E_3-v_3+i\varepsilon}\right)+\left(\frac{e^{-v_1/\theta}-e^{v_3/\theta}}{E_2+i\varepsilon-v_2}\right)\right]I(v_1v_2v_3)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{e^{v_3/\theta}-1}{E_3+i\varepsilon-v_3}\right)+\left(\frac{e^{-v_2/\theta}-1}{E_2+i\varepsilon-v_2}\right)\right]L(v_1v_2v_3)\right\}.\qquad(9)$$

В данном случае, как и в случае двухвременных функций Грина, $G_r(E_1E_2E_3)$ и $G_a(E_1E_2E_3)$ могут рассматриваться как ветви одной аналитической функции:

$$G(E_1E_2E_3) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dv_1dv_2dv_3\,\delta(v_1+v_2+v_3)\frac{1}{(E_1-v_1)}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1-e^{v_3/\theta}}{E_3-v_3}\right)+\left(\frac{e^{-v_1/\theta}-e^{v_3/\theta}}{E_2-v_2}\right)\right]I(v_1v_2v_3)+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{e^{v_3/\theta}-1}{E_3-v_3}\right)+\left(\frac{e^{-v_2/\theta}-1}{E_2-v_2}\right)\right]L(v_1v_2v_3)\right\}.\qquad(10)$$

причем

$$G(E_1E_2E_3) = \begin{cases} G_r(E_1E_2E_3), & \text{если } ImE_1 > 0,\ ImE_2,\ ImE_3 < 0 \\ G_a(E_1E_2E_3), & \text{если } ImE_1 < 0,\ ImE_2,\ ImE_3 > 0 \end{cases}$$

Функция $G_r(E_1E_2E_3)$ может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость по E_1 и в нижнюю — по E_3.

$$G_r(E_1+i\alpha,\ E_2,\ E_3-i\beta) = \int dt_2 \exp\{(\alpha+\beta)t_2\} \times$$

$$\times \int\int dt_1 \times dt_3 G_r(t_1t_2t_3) \exp\left\{i\sum_{j=1}^{3} E_jt_j\right\} e^{-\alpha(t_1-t_2)} e^{-\beta(t_2-t_3)}.$$

Поскольку $G_r(t_1t_2t_3)=0$ при $t_1<t_2$ и $t_2<t_3$, то для областей $t_1>t_2$, $t_2>t_3$ соответствующую сходимость интегралов обеспечивают два последних экспоненциальных множителя. Аналогичным образом убеждаемся, что $G_a(E_1E_2E_3)$ может быть аналитически продолжена в нижнюю полуплоскость по E_1 и в верхнюю — по E_3.

Используя свойство аналитичности, нетрудно получить линейную комбинацию спектральных плотностей $I(v_1v_2v_3)$ и $L(v_1v_2v_3)$. Действительно, учитывая равенство

$$\delta(x)\delta(y) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{(x+i\varepsilon)(y+i\varepsilon)} + \frac{1}{(x-i\varepsilon)(y-i\varepsilon)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-i\varepsilon)(y+i\varepsilon)} - \frac{1}{(x+i\varepsilon)(y-i\varepsilon)}\right],$$

получим

$$G(E_1-i\varepsilon;\ E_2-i\varepsilon;\ E_3-i\varepsilon) + G(E_1+i\varepsilon;\ E_2+i\varepsilon;\ E_3+i\varepsilon) -$$

$$- G(E_1-i\varepsilon;\ E_2+i\varepsilon;\ E_3+i\varepsilon) - G(E_1+i\varepsilon;\ E_2-i\varepsilon;\ E_3-i\varepsilon) =$$

$$= (2e^{E_3/\theta} - e^{-E_1/\theta} - 1)\, I(E_1E_2E_3) + (2 - e^{E_3/\theta} - e^{-E_2/\theta})\, L(E_1E_2E_3),$$

причем здесь, как и везде, предполагается, что $E_1+E_2+E_3\equiv 0$. Рассмотрев аппарат для различных функций Грина, перейдем к его непосредственному использованию.

§ 3. Спектральная теорема деления для трехвременных функций Грина

Как уже указывалось ранее, нас будут интересовать решения цепочек уравнений для функций Грина. При расцеплении таких цепочек часто приходится иметь дело с уравнениями вида

$$(E_1 - A)G = b,$$

где G и b — функции Грина в E-представлении, $A=\text{const}$. Если G и b — запаздывающие или опережающие функции Грина, то в этом случае решения находятся сравнительно легко; для случая же причинных функций Грина доказательства более громоздки.

а. Случай трехвременных причинных функций Грина.

Прежде чем рассматривать случай трехвременных функций, укажем, что для двухвременных функций Грина, используемых в работе [1], решением уравнения

$$(E_1 - A)G_c(E) = b_c(E),$$

где $G_c(E)$ и $b_c(E)$, представимы в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_{G,b}(\omega)\left\{\frac{e^{\omega/\theta}}{E+i\varepsilon-\omega}-\frac{1}{E-i\varepsilon-\omega}\right\}d\omega,$$

будет

$$G_c'(E)=\left(\frac{1}{E-A}\right)_c b_c(E),$$

где

$$\left(\frac{1}{E-A}\right)_c=\left\{\frac{(1+R)}{(E+i\varepsilon-A)}-\frac{R}{(E-i\varepsilon-A)}\right\}, \tag{11}$$

причем

$$R=R(A)=\frac{1}{e^{A/\theta}-1}.$$

Штрих у G_c означает, что деление на $(\omega-A)$ в полученном результате понимается в смысле главного значения, т. е. интегрирование осуществляется по значениям ω, заключенным в интервалах $(-\infty;\ A-\delta)$ и $(A+\delta;\ \infty)$, а $\delta\to 0$.

Связь между спектральными плотностями $I_G(\omega)$ и $I_b(\omega)$ будет

$$I_G(\omega)=\frac{I_b(\omega)}{(\omega-A)}+\delta(\omega-A)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_b(v)\,(e^{v/\theta}-1)\,R(\omega)}{(\omega-v)}\,dv.$$

При подстановке выражения для I_G в функцию $G_c(E)$ уравнение обращается в тождество. Перейдем к рассмотрению решения уравнений для трехвременных функций Грина, имеющих вид

$$(E_1-A)\,G_c(E_1E_2E_3)=b_c(E_1E_2E_3), \tag{12}$$

где $E_1+E_2+E_3=0$, $A=\mathrm{const}$, $G_c(E_1E_2E_3)$ и $b_c(E_1E_2E_3)$ имеют вид (7) или в более краткой записи:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int dv_1dv_2dv_3\,\delta(v_1+v_2+v_3)\,\{IX+LY\}. \tag{13}$$

Чтобы выяснить характер решения, умножим (E_1-A) на подынтегральное выражение функции $G_c(E_1E_2E_3)$ в левой части (12). Тогда под знаком интеграла будет

$$\begin{gathered}I_G(v_1v_2v_3)\left[\frac{1}{(E_3-i\varepsilon-v_3)}+\frac{e^{-v_1/\theta}}{(E_2+i\varepsilon-v_2)}-\frac{e^{v_3/\theta}}{(E_3+i\varepsilon-v_3)}-\right.\\ \left.-\frac{e^{v_3/\theta}}{(E_2-i\varepsilon-v_2)}\right]+L_G(v_1v_2v_3)\left[\frac{e^{v_3/\theta}}{(E_3+i\varepsilon-v_3)}+\frac{e^{-v_2/\theta}}{(E_2-i\varepsilon-v_2)}-\right.\\ \left.-\frac{1}{(E_3-i\varepsilon-v_3)}-\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-v_2)}\right]+I_G(v_1v_2v_3)\cdot X\cdot(v_1-A)+\\ +L_G(v_1v_2v_3)\cdot Y\cdot(v_1-A).\end{gathered} \tag{14}$$

При вычислении мы пренебрегли членами, дающими бесконечно малые вклады, так как они пропорциональны $\pm i\varepsilon$, а $\varepsilon\to 0$.

Рассмотрим асимптотику уравнения (12). Правая часть при больших E согласно представлению (7) ведет себя, как $1/E$. Левая часть, как это видно из (14), имеет четыре слагаемых, причем первые два пропорциональны $1/E$, а вторые два имеют нужную нам асимптотику. Поэтому необходимо найти такое решение, которое обращало бы первые два слагаемых в нуль и удовлетворяло бы уравнению (12), т. е.

$$I_G(v_1v_2v_3)\cdot X\cdot(v_1-A)+L_G(v_1v_2v_3)\cdot Y\cdot(v_1-A)=$$
$$=I_b(v_1v_2v_3)\,X+L_b(v_1v_2v_3)\,Y.$$

Поэтому величины спектральных плотностей ищем в виде

$$I_G(v_1v_2v_3)=\frac{I_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)}+K(v_2v_3)\,\delta(v_1-A), \tag{15}$$

$$L_G(v_1v_2v_3)=\frac{L_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)}+M(v_2v_3)\,\delta(v_1-A), \tag{16}$$

где $K(v_2v_3)$ и $M(v_2v_3)$ не зависят от v_1, деление на (v_1-A) понимается в смысле главного значения.

Теорема 1. Решение уравнения (12) может быть представлено в виде

$$G_c'(E_1E_2E_3)=\left(\frac{1}{E_1-A}\right)_c b_c(E_1E_2E_3), \tag{17}$$

где $b_c(E_1E_2E_3)$ задано в виде (7), а $\left(\frac{1}{E_1-A}\right)_c$ совпадает с выражением (11).

Доказательство проводится путем умножения $\left(\frac{1}{E_1-A}\right)_c$ на подынтегральное выражение функции $b_c(E_1E_2E_3)$ в правой части (17) и получения для спектральных интенсивностей $I_G(v_1v_2v_3)$ и $L_G(v_1v_2v_3)$ решения типа (15) и (16). Вследствие громоздкости этого произведения и соответствующих преобразований, мы будем рассматривать отдельно произведение каждого слагаемого (11) на каждое слагаемое подынтегрального выражения функции $b_c(E_1E_2E_3)$.

Учтем, что при любых комбинациях знаков мнимых членов в смысле интеграла по главному значению справедливо тождество

$$\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-A)(E_1\pm i\varepsilon-v_1)}=\frac{1}{(A-v_1)}\left\{\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-A)}-\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-v_1)}\right\}. \tag{18}$$

Умножаем первый член (11) на первый член (13). Полученное выражение обозначим $(1-1)$:

$$\frac{(1+R)}{(E_1+i\varepsilon-A)}\,\frac{I_b(v_1v_2v_3)}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)}=\frac{(1+R)\,I_b(v_1v_2v_3)}{(A-v_1)}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-v_3)}+\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)}\right\}.$$

При вычислении следующего члена введем $\Omega_2=-(A+v_3)$ и используем тождество

$$\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-v_3)}=-\left\{\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)(E_3-i\varepsilon-v_3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)(E_1-i\varepsilon-A)}\right\}. \tag{19}$$

Тогда (2 — 1) приобретает вид

$$\frac{I_b(v_1v_2v_3)\cdot R}{(A-v_1)}\left\{\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)(E_3-i\varepsilon-v_3)}+\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)}\right\}.$$

Обозначим $\Omega_3=-(A+v_2)$ с помощью тождества

$$\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2+i\varepsilon-v_2)}=-\left\{\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-v_2)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)}\right\} \quad (20)$$

придем для (1 — 2) к выражению

$$-\frac{(1+R)\,e^{-v_1/\theta}I_b(v_1v_2v_3)}{(A-v_1)}\left\{\frac{1}{(E_2+i\varepsilon-v_2)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)}+\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)}\right\}.$$

Член (2 — 2) вычисляется аналогично (1 — 1)

$$-\frac{Re^{-v/\theta}I_b(v_1v_2v_3)}{(A-v_1)}\left\{\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_2+i\varepsilon-v_2)}-\frac{1}{(E_1-i\varepsilon-v_1)(E_2+i\varepsilon-v_2)}\right\}.$$

Следующие четыре выражения преобразуются на основе тождества

$$\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-A)(E_2\mp i\varepsilon-v_2)(E_3\pm i\varepsilon-v_3)}=\frac{1}{(v_1-A)}\left\{\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-A)(E_2\mp i\varepsilon-v_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(E_1\pm i\varepsilon-A)(E_3\pm i\varepsilon-v_3)}+\frac{1}{(E_2\mp i\varepsilon-v_2)(E_3\pm i\varepsilon-v_3)}\right\}; \quad (21)$$

а также с использованием тождеств (19) и (20).

Например, член (1 — 3) получен в виде

$$\frac{(1+R)\,I_b(v_1v_2v_3)\,e^{v_3/\theta}}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2-i\varepsilon-v_2)(E_3+i\varepsilon-v_3)}=\frac{(1+R)\,I_b(v_1v_2v_3)\,e^{v_3/\theta}}{(A-v_1)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2-i\varepsilon-\Omega_2)}+\frac{1}{(E_2-i\varepsilon-\Omega_2)(E_3-i\varepsilon-v_3)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2-i\varepsilon-v_2)}-\frac{1}{(E_2-i\varepsilon-v_2)(E_3+i\varepsilon-v_3)}\right\}.$$

Проводя подобные преобразования для остальных членов, получим всего 36 слагаемых. Убеждаемся, что они могут быть объединены в три группы членов, каждая из которых в отдельности будет давать структуру подынтегрального выражения функции $G_c(E_1E_2E_3)$.

Первая группа

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\varkappa\,\{I_b(v_1v_2v_3)-L_b(v_1v_2v_3)\}}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-v_3)};\qquad \frac{(A-v_1)^{-1}\varkappa e^{-A/\theta}\,\{I_b-L_b\}}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)};$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\varkappa e^{v_3/\theta}\,\{I_b-L_b\}}{(E_2-i\varepsilon-\Omega_2)(E_3+i\varepsilon-v_3)};\qquad \frac{(A-v_1)^{-1}\lambda e^{v_3/\theta}\,\{I_b-L_b\}}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_3+i\varepsilon-v_3)};$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\lambda\,\{I_b(v_1v_2v_3)-L_b(v_1v_2v_3)\}}{(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)(E_3-i\varepsilon-v_3)};\qquad \frac{(A-v_1)^{-1}\lambda e^{A/\theta}\,e^{v_3/\theta}\,\{I_b-L_b\}}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2-i\varepsilon-\Omega_2)},$$

причем

$$\varkappa = (R+1) = \frac{e^{A/\theta}}{(e^{A/\theta}-1)}, \quad R = \varkappa e^{-A/\theta},$$

а

$$\lambda = R = \frac{1}{(e^{A/\theta}-1)}, \quad (R+1) = \lambda e^{A/\theta}.$$

Некоторые из полученных членов первой группы отличаются от разложения $G_c(E_1E_2E_3)$ в интеграл Фурье (7). Попытаемся преобразовать их к точной форме и получить спектральные интенсивности $I_1(v_1v_2v_3)$ и $L_1(v_1v_2v_3)$, соответствующие элементам этой группы. Произведем замену $v_1' \to v_1$ и введем дополнительную интеграцию по v_1 с введением $\delta(v_1-A)$.

Рассмотрение произведем на примере первого слагаемого группы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dv_1\, dv_2\, dv_3 \delta(v_1+v_2+v_3) \frac{(A-v_1)^{-1}\varkappa(A)\left[I_b(v_1v_2v_3)-L_b(v_1v_2v_3)\right]}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-v_3)} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dv_1\, dv_2\, dv_3 \frac{\delta(v_1-A)\varkappa(v_1)}{(E_1+i\varepsilon-v_1)(E_3-i\varepsilon-v_3)} \times$$

$$\times \frac{\{I_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)-L_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)\}}{(v_1+v_2+v_3)}.$$

Напомним, что деление на $v_1+v_2+v_3$ понимается в смысле главного значения интеграла; т. е. надо интегрировать по (v_2+v_3) в интервалах $(-\infty, A-\delta)$ и $(A+\delta, \infty)$ при $\delta \to 0$. Кроме того, необходимо от переменных Ω_2 и Ω_3 перейти к переменным v_2 и v_3 соответственно. Осуществить это позволяют следующие соображения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{\delta(v_1-A)F}{(E_2+i\varepsilon-\Omega_2)} dv_1\, dv_2\, dv_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{\delta(v_1-A)F}{(E_2+i\varepsilon+A+v_3)} dv_1\, dv_2\, dv_3 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{\delta(v_1-A)F}{(E_2+i\varepsilon+v_1+v_3)} dv_1\, dv_2\, dv_3.$$

С другой стороны, благодаря наличию связи $(v_1+v_2+v_3) \equiv 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{\delta(v_1-A)F}{(E_2+i\varepsilon-v_2)} dv_1\, dv_2\, dv_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{\delta(v_1-A)F}{(E_2+i\varepsilon+v_1+v_3)}.$$

Аналогичные преобразования для других членов группы дадут причинную трехвременную функцию Грина со спектральными плотностями

$$I_1(v_1v_2v_3) = \frac{\delta(v_1-A)\varkappa(v_1)\{I_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)-L_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)}{(v_1+v_2+v_3)},$$

$$L_1(v_1v_2v_3) = \frac{\delta(v_1-A)\lambda(v_1)\{I_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)-L_b(-v_2-v_3,\, v_2,\, v_3)\}}{(v_1+v_2+v_3)}.$$

Вторая группа членов будет состоять из следующих выражений:

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\chi\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)},$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\chi e^{-A/\theta}\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_2+i\varepsilon-v_2)},$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\chi\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}e^{-A/\theta}e^{-v_2/\theta}}{(E_2-i\varepsilon-v_2)(E_3+i\varepsilon-\Omega_3)},$$

$$\frac{(A-v_1)\chi\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}}{(E_2+i\varepsilon-v_2)(E_3-i\varepsilon-\Omega_3)},$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\chi e^{-v_2/\theta}\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}}{(E_1+i\varepsilon-A)(E_2-i\varepsilon-v_2)},$$

$$\frac{(A-v_1)^{-1}\chi e^{-A/\theta}e^{-v_2/\theta}\{L_b-e^{-v_1/\theta}I_b\}}{(E_1-i\varepsilon-A)(E_3+i\varepsilon-\Omega_3)},$$

где

$$\chi=(1+R)=\frac{e^{A/\theta}}{e^{A/\theta}-1} \text{ и } R=\chi e^{-A/\theta}.$$

Проводя те же преобразования, что и для выражений первой группы, от $A\to v_1$ и от $v_1\to v_1'$, вводя дополнительную интеграцию и заменяя переменные Ω_2 и Ω_3 переменными v_2 и v_3, получим, что вторая группа членов также будет давать причинную функцию Грина со спектральными интенсивностями

$$I_2(v_1v_2v_3)=L_2(v_1v_2v_3)=\frac{\delta(v_1-A)\{L_b(-v_2-v_3,\ v_2,\ v_3)-e^{(v_2+v_3)/\theta}I_b(-v_2-v_3,\ v_2,v_3)\}}{(v_1+v_2+v_3)}.$$

Деление на $(v_1+v_2+v_3)$ опять понимается в смысле главного значения интеграла.

В третьей группе не нужно производить никаких изменений. Соответствующие спектральные интенсивности будут:

$$I_3(v_1v_2v_3)=\frac{I_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)},$$

$$I_3(v_1v_2v_3)=\frac{L_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)},$$

где деление на (v_1-A) понимается в смысле главного значения интеграла. Суммарная спектральная интенсивность получается при сложении спектральных плотностей I_1, I_2, I_3, а также и L_1, L_2, L_3.

$$I_G(v_1v_2v_3)=\frac{I_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)}+\delta(v_1-A)\times$$
$$\times\left\{\frac{e^{v_1/\theta}I_b(-v_2-v_3,\ v_2,\ v_3)(1-e^{(v_2+v_3)/\theta})}{(e^{v_1/\theta}-1)(v_1+v_2+v_3)}\right\}, \quad (22)$$

$$L_G(v_1v_2v_3)=\frac{L_b(v_1v_2v_3)}{(v_1-A)}+\delta(v_1-A)\times$$
$$\times\left\{\frac{L_b+e^{-v_1/\theta}(1+R)(1-e^{(v_1+v_2+v_3)/\theta})I_b}{(v_1+v_2+v_3)}\right\}.$$

Сравнивая с (15) и (16), получаем

$$K(v_2v_3) = \frac{e^{A/\theta} I_b(-v_2 - v_3, v_2, v_3)(1 - e^{(v_2+v_3)/\theta})}{(e^{A/\theta} - 1)(A + v_2 + v_3)}$$

и

$$M(v_2v_3) = \frac{L_b(-v_2 - v_3, v_2, v_3) + R(A)(1 - e^{(A+v_2+v_3)/\theta})\, I_b(-v_2 - v_3, v_2, v_3)}{(A + v_2 + v_3)}.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что функция $G_c(E_1E_2E_3)$ с полученными спектральными плотностями действительно удовлетворяет уравнению (12), ибо первые два слагаемых (14) дают тождественный нуль, а вторые два, с учетом равенства $\int x \cdot \delta(x)dx = 0$, дают точно правую часть уравнения (12), т. е. функцию $B_c(E_1E_2E_3)$.

б. Случай запаздывающей и опережающей трехвременной функции Грина.

Находим решение уравнения

$$(E_1 - A)\, G_{r,a}(E_1E_2E_3) = B_{r,a}(E_1E_2E_3), \tag{23}$$

причем G_r, B_r и G_a, B_a — соответственно запаздывающие и опережающие функции Грина. Спектральные представления были получены для этих функций в § 2.

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dv_1\, dv_2\, dv_3\, \delta(v_1 + v_2 + v_3) \frac{1}{(E_1 \pm i\varepsilon - v_1)} \times$$
$$\times \left\{ \left[\left(\frac{1 - e^{v_3/\theta}}{E_3 \mp i\varepsilon - v_3} \right) + \left(\frac{e^{-v_1/\theta} - e^{v_3/\theta}}{E_2 \mp i\varepsilon - v_2} \right) \right] I(v_1v_2v_3) + \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{e^{v_3/\theta} - 1}{E_3 \mp i\varepsilon - v_3} \right) + \left(\frac{e^{-v_2/\theta} - 1}{E_2 \mp i\varepsilon - v_2} \right) \right] \right\}. \tag{24}$$

Попытаемся выяснить структуру решения уравнения (23). Для этого, как это использовалось и ранее, умножим $(E_1 - A)$ на подынтегральное выражение (24). Тогда с учетом тождества

$$\frac{(E_1 - A)}{(E_1 \pm i\varepsilon - v_1)} = 1 - \left(\frac{A \pm i\varepsilon - v_1}{E \pm i\varepsilon - v_1} \right)$$

левую часть (23) представим в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dv_1\, dv_2\, dv_3\, \delta(v_1 + v_2 + v_3) \{X I_G + Y L_b\} -$$
$$- \left(\frac{A \pm i\varepsilon - v_1}{E \pm i\varepsilon - v_1} \right) (X I_G + Y L_b),$$

где X и Y — соответственно множители при спектральных интенсивностях $I_G(v_1v_2v_3)$ и $L_G(v_1v_2v_3)$ в выражении (24). Из асимптотических соображений первая часть интеграла должна давать нуль, а вторая позволяет найти вид решения уравнения (23). Его следует искать как

$$I_G(v_1v_2v_3) = \frac{I_b(v_1v_2v_3)}{(v_1 - A)} \quad \text{и} \quad L_b(v_1v_2v_3) = \frac{L_b(v_1v_2v_3)}{(v_1 - A)},$$

причем деление на $(A - v_1)$ понимается в смысле обхода полюса ($+i\varepsilon$ для запаздывающей и $-i\varepsilon$ для опережающей функции Грина).

Теорема 2. Решение уравнения (23) может быть представлено в виде

$$G_{r,a}(E_1 E_2 E_3) = \left(\frac{1}{E_1 - A}\right)_{r,a}, \quad B_{r,a}(E_1 E_2, E_3), \tag{25}$$

где $G_{r,a}(E_1 E_2 E_3)$ и $B_{r,a}(E_1 E_2 E_3)$ берутся в виде (24), а

$$\frac{1}{(E_1 - A)_{r,a}} = \frac{1}{(E_1 \pm i\varepsilon - A)}.$$

При доказательстве снова умножим величину $\frac{1}{(E_1 \pm i\varepsilon - A)}$ на подынтегральное выражение (24), записанное в сокращенном виде, и затем преобразуем к нужному нам результату с помощью тождества (18). Правая часть (25) представится как

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dv_1 \, dv_2 \, dv_3 \, \delta(v_1 + v_2 + v_3) \frac{1}{(A - v_1)} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{(E_1 \pm i\varepsilon - A)} - \frac{1}{(E_1 \pm i\varepsilon - v_1)}\right\} \{XI_b + YL_b\}.$$

Теперь уже получаем две группы выражений: одна из них будет иметь вид соответствующей функции Грина со спектральными интенсивностями

$$I_1(v_1 v_2 v_3) = \frac{I_b(v_1 v_2 v_3)'}{(v_1 - A)} \quad \text{и} \quad L_1(v_1 v_2 v_3) = \frac{I_b(v_1 v_2 v_3)}{(v_1 - A)},$$

другая же после перехода $v_1 \to A$ и $v_1' \to v_1$ будет иметь следующие спектральные плотности:

$$I_2(v_1 v_2 v_3) = -\frac{\delta(v_1 - A) I_b(v_2 + v_3, v_2, v_3)}{(v_1 + v_2 + v_3)},$$

$$L_2(v_1 v_2 v_3) = \frac{\delta(v_1 - A) L_b}{(v_1 + v_2 + v_3)}.$$

Суммарная же спектральная интенсивность выразится как

$$I_G(v_1 v_2 v_3) = \frac{I_b(v_1 v_2 v_3)}{(v_1 - A)} - \frac{\delta(v_1 - A) I_b(v_1 + v_3, v_2, v_3)}{(v_1 + v_2 + v_3)}, \tag{26}$$

$$L_G(v_1 v_2 v_3) = \frac{L_b(v_1 v_2 v_3)}{(v_1 - A)} - \frac{\delta(v_1 - A) L_b(v_2 + v_3, v_3)}{(v_1 + v_2 + v_3)}.$$

Полученные спектральные плотности $I_G(v_1 v_2 v_3)$ и $L_G(v_1 v_2 v_3)$ действительно обращают в нуль первые два слагаемых левой части (23), а вторые два слагаемых в точности равны $B_{r,a}(E_1 E_2 E_3)$. Наконец объединим обе доказанные теоремы и сформулируем одну общую теорему.

Теорема 3. Решением уравнения $(E_1 - A) G(E_1 E_2 E_3) = B(E_1 E_2 E_3)$ является

$$G(E_1 E_2 E_3) = \frac{1}{(E_1 - A)} B(E_1 E_2 E_3),$$

причем вид множителя $\left(\frac{1}{E_1-A}\right)$ совпадает с видом используемых в уравнении функций $B(E_1E_2E_3)$ и $G(E_1E_2E_3)$, а соотношения между спектральными плотностями определяются формулами (22) и (26).

Эти теоремы справедливы для двухвременных функций Грина, мы доказали их для трехвременных функций. Есть основания полагать, что они будут справедливы и для многовременных функций Грина. С некоторыми вопросами теории этих функций можно ознакомиться в работе Коба [3], а также автора [4].

В заключение выражаю глубокую признательность научному руководителю Н. Н. Боголюбову за многочисленные консультации, а также И. А. Квасникову за ценные советы при ее обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубарев Д. Н. «Успехи физических наук», **71**, 71, 1960.
2. Бонч-Бруевич В. Л. ДАН СССР, **129**, 529, 1959.
3. Donald H. Kobe. An. Phys., **19**, 448—457, 1962.
4. Мельников В. Н. Дипломная работа. МГУ, 1963.

Поступила в редакцию
14. 11 1963 г.

Кафедра
теоретической физики