

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1964

А. Ф. ДЮБЮК, В. Н. КОЖЕВНИКОВ

О РОЛИ АДВЕКТИВНЫХ ЧЛЕНОВ УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В АСИММЕТРИИ ХАРАКТЕРА ОБТЕКАНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ГОРЫ

В настоящей статье обобщаются задачи по определению ветра на высотах в зависимости от поля давления [1, 2] на случай учета общего переноса при обтекании потоком воздуха препятствия в виде цилиндрической поверхности с горизонтальными образующими.

При рассмотрении решения линейной системы уравнений движения

$$\begin{aligned} -v(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - lv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -lv_g, \\ -v(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + lu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = lv_g, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_g и v_g — компоненты геострофического ветра, которые считаем постоянными, замена x на $-x'$ не меняет вида уравнений. Если и краевые условия симметричны относительно координат (например, прилипание воздуха к поверхности горы, симметричной относительно плоскости $y-z$), то, очевидно, решения для u и v будут симметричны вдоль x относительно начала координат. Линии тока в плоскостях xz при этом также симметричны (считая, что w определяется из условия $u_x + v_y + w_z = 0$).

Однако симметрии не будет, если исходить из нелинейных уравнений движения

$$\begin{aligned} uu_x + vv_y - v(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - lv &= -lv_g, \\ uu_x + vv_y - v(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + lu &= lv_g, \end{aligned} \quad (2)$$

или уравнений линеаризированных относительно общего переноса

$$\begin{aligned} Uu_x + Vu_y - v(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - lv &= -lv_g, \\ Uv_x + Vv_y - v(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + lu &= lv_g. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, при замене в них x на $-x'$ меняется знак при первых производных от u и v по x , что равносильно изменению направления движения вдоль x или направления общего переноса U на обратное.

Решение, следовательно, зависит от направления потока, оно не симметрично.

Рассмотрим детально случай обтекания орографического препятствия, имеющего вид лежащего бесконечного полуцилиндрического вала, с образующими параллельными оси y , допуская, как и ранее, что геострофический ветер постоянен, а общий перенос имеет составляющую только вдоль оси x .

Окончательно принимаем уравнения для горизонтального движения в форме

$$Uu_x - v(u_{xx} + u_{zz}) - lv = -lv_g, \quad (4)$$

$$Uu_x - v(v_{xx} + v_{zz}) + lu = lv_g,$$

или полагая

$$s = u + iv, \quad s_g = u_g + iv_g, \quad (5)$$

$$Us_x - v\Delta s + ils = ils_g, \quad (6)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, U — скорость общего переноса, получаемая осреднением натекающего потока по высоте.

Решение задачи будем искать в предположении, что на достаточном удалении перед горой ветер совпадает с экмановским, т. е.

$$s|_{x \rightarrow -\infty} = \bar{s}(z) = s_g \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{il}{v}}z}\right), \quad (7)$$

а на подстилающей поверхности

$$s = 0. \quad (8)$$

Положим

$$s = \bar{s} + s'. \quad (9)$$

На основании (6) и (7) уравнение для s' имеет вид

$$Us'_x - v\Delta s' + ils' = 0. \quad (10)$$

Полагая

$$s' = m(x, z) e^{2v}, \quad (11)$$

получаем вместо (9)

$$-v\Delta m + \left(\frac{U^2}{4v} + il\right)m = 0. \quad (12)$$

Вводя новые переменные ξ и φ по формулам

$$x = r_0 e^{\xi} \cos \varphi, \quad z = r_0 e^{\xi} \sin \varphi, \quad (13)$$

где r_0 — радиус полуцилиндрического препятствия, уравнение (12) нетрудно записать в виде

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2} - \frac{(r_0 e^{\xi})^2}{v} \left(\frac{U^2}{4v} + il\right)m = 0. \quad (14)$$

Частные решения (14) определяются как

$$m = R(\xi) \cdot \theta(\varphi). \quad (15)$$

Соответствующие уравнения для $\theta(\varphi)$ и $R(\xi)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \theta(\varphi) + \lambda^2 \theta(\varphi) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} R(\xi) + \left[-\frac{(r_0 e^{\xi})^2}{v} \left(\frac{U^2}{4v} + il \right) - \lambda^2 \right] R(\xi) = 0. \quad (17)$$

Решение (16) имеет вид

$$\theta_\lambda(\varphi) = c_{1\lambda} \sin \lambda \varphi + c_{2\lambda} \cos \lambda \varphi. \quad (18)$$

Так как $\bar{s}|_{z=0} = 0$, в силу (8) s' на горизонтальных участках подстилающей поверхности должно обращаться в нуль. Поэтому потребуем, чтобы

$$\theta_\lambda(0) = \theta_\lambda(\pi) = 0.$$

Отсюда $c_{2\lambda} = 0$ и $\lambda = n = 1, 2, 3 \dots$

Обозначая

$$\eta^2 = -\frac{(r_0 e^{\xi})^2}{v} \left(\frac{U^2}{4v} + il \right), \quad (19)$$

решение (17) записывается в виде

$$R_n(\eta) = c_{3n} J_n(\eta) + c_{4n} Y_n(\eta), \quad (20)$$

где $J_n(\eta)$ и $Y_n(\eta)$ — функции Бесселя I и II рода.

Поскольку согласно (13) $r_0 e^{\xi} = r$, общее решение (12) имеет вид

$$m(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{c}_{3n} J_n \left(\frac{ir}{\sqrt{v}} \sqrt{\frac{U^2}{4v} + il} \right) + \bar{c}_{4n} Y_n \left(\frac{ir}{\sqrt{v}} \sqrt{\frac{U^2}{4v} + il} \right) \right] \sin n\varphi. \quad (21)$$

Решение задачи в целом согласно (7), (9), (11) записывается

$$s = s_g \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{il}{v}} z} \right) + m(x, z) e^{\frac{U_x}{2v}}. \quad (22)$$

Остается определить коэффициенты \bar{c}_{3n} и \bar{c}_{4n} в (21). Они могут быть определены из условия на бесконечности и того, что

$$s|_{r=r_0} = 0. \quad (23)$$

Предварительно заметим, что $i \sqrt{\frac{U^2}{4v} + il} = \alpha + i\beta$,

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{U^2}{4v} \right)^2 + l^2} - \frac{U^2}{4v} \right]}, \quad (24)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{U^2}{4v} \right)^2 + l^2} + \frac{U^2}{4v} \right]}.$$

Порядок величин, входящих в (24), такой, что $\frac{\alpha}{\beta} \approx 3 \cdot 10^{-5}$, так что с большей точностью можно полагать $\alpha \approx 0$ и

$$\alpha + i\beta \approx i \frac{U}{2\sqrt{v}}.$$

На основании этого заменим в (21) функции J_n и Y_n функциями Бесселя от чисто мнимого аргумента $I_n\left(\frac{r}{2v}U\right)$ и $K_n\left(\frac{r}{2v}U\right)$. При этом получим несколько сглаженное решение, однако общий его характер будет представлен, по-видимому, достаточно надежно. Если считать далее, что r_0 достаточно велико (200 м и более), то можно, по-видимому, кроме того, полагать, что решение останется достаточно точным, если эти функции заменить первыми членами их асимптотических разложений, а именно

$$I_n\left(\frac{rU}{2v}\right) = \frac{\exp\left(\frac{rU}{2v}\right)}{\sqrt{\frac{\pi rU}{v}}},$$

$$K_n\left(\frac{rU}{2v}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{rU}{2v}\right)}{\sqrt{\frac{rU}{\pi v}}}.$$
(25)

В силу (7) и (9) на бесконечности s' равно нулю. Поэтому все \bar{c}_{3n} в (21) нужно приравнять к нулю, что дает возможность получить

$$m = \sqrt{\frac{\pi v}{rU}} e^{-\frac{rU}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\varphi,$$
(26)

где c_n — коэффициенты (может быть и мнимые) пропорциональные \bar{c}_{4n} . Согласно (22), (23) и (26) нетрудно получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\varphi = -\sqrt{r_0} \sqrt{\frac{U}{\pi v}} s_g (1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{v}} r_0 \sin \varphi}) e^{-\frac{r_0}{2v} U (\cos \varphi - 1)}.$$
(27)

Поэтому согласно (11), (13) и (26)

$$s' = -s_g \sqrt{\frac{r_0}{r}} (1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{v}} r_0 \frac{z}{r}}) e^{-\frac{(r-r_0)U}{2v} (1 - \cos \varphi)}.$$
(28)

Общее решение задачи запишется

$$\frac{s}{s_g} = (1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{v}} z}) - \sqrt{\frac{r_0}{r}} (1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{v}} z \frac{r_0}{r}}) e^{-\frac{r-r_0}{2v} U \left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$
(29)

Разделяя действительную и мнимую части, последнее можно представить

$$\frac{s}{s_g} = R_e\left(\frac{s}{s_g}\right) + iIm\left(\frac{s}{s_g}\right),$$

$$R_e\left(\frac{s}{s_g}\right) = \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{2v}} z} \cos \sqrt{\frac{l}{2v}} z\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{l}{2v}} z \frac{r_0}{r}} \cos \sqrt{\frac{l}{2v}} z \frac{r_0}{r}\right) e^{-\frac{r-r_0}{2v} U \left(1 - \frac{x}{r}\right)},$$
(30)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}\left(\frac{s}{s_g}\right) &= e^{-\sqrt{\frac{l}{2\nu}}z} \sin \sqrt{\frac{l}{2\nu}}z - \\
 &- \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sin\left(\sqrt{\frac{l}{2\nu}}z \frac{r_0}{r}\right) e^{-\sqrt{\frac{l}{2\nu}}z \frac{r_0}{r}} - \frac{r-r_0}{2\nu} U \left(1 - \frac{x}{r}\right).
 \end{aligned}$$

Для компонентов горизонтальной скорости справедливы при этом следующие выражения:

$$u = v_g \operatorname{Re}\left(\frac{s}{s_g}\right) - v_g \operatorname{Im}\left(\frac{s}{s_g}\right), \quad (31)$$

$$v = v_g \operatorname{Re}\left(\frac{s}{s_g}\right) + u_g \operatorname{Im}\left(\frac{s}{s_g}\right). \quad (32)$$

Как видно из формул (30—32), исходное условие (7) выполняется вообще при $|x| \rightarrow \infty$, т. е. что и за горой на достаточном расстоянии ветер становится экмановским.

В рассматриваемом случае можно построить также проекции линий тока в плоскости xz . Действительно, полагая

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

имеем в плоскости xz для приращения значений функции тока:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = -\omega dx + u dz. \quad (33)$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, то из уравнения неразрывности несжимаемой жидкости следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial z},$$

т. е. что $d\psi$ является полным дифференциалом и результат интегрирования (33) не зависит от выбора пути интегрирования. Двигаясь при интегрировании сначала по подстилающей поверхности, где $u = \omega = 0$ по условию, а затем при фиксированном x до конечной точки (x, z) получаем, что

$$\psi(x, z) = \int_{h(x)}^{(x,z)} u dz = \int_{h(x)}^z u(x, z) dz \quad (34)$$

(при этом предполагается, что всюду на поверхности $\psi = 0$).

По формулам (31—32) были рассчитаны $u_g = 10$ м/сек профили скоростей $u(z)$ и $v(z)$ для нескольких значений x через 0,5 км в четырех вариантах: $v_g = 0$ или 2 м/сек; $\nu = 5$ или 10 м²/сек, $r_0 = 1$ км, $l = 1,2 \times 10^{-4}$ сек⁻¹. Значение величины переноса U предварительно получалось при усреднении профиля $u(z)$ в натекающем потоке в слое 6 км ($U \approx u_g$). Результаты представлены на рис. 1.

Полученные кривые $u(z)$ использовались для построения с помощью формулы (34) линий тока в плоскости xz . При этом оказалось, что расположение линий тока ψ практически совпадает для обоих выбранных v_g и несколько меняется при изменении величины вязкости. На рис. 2 представлены изолинии ψ для случая $v_g = 0$.

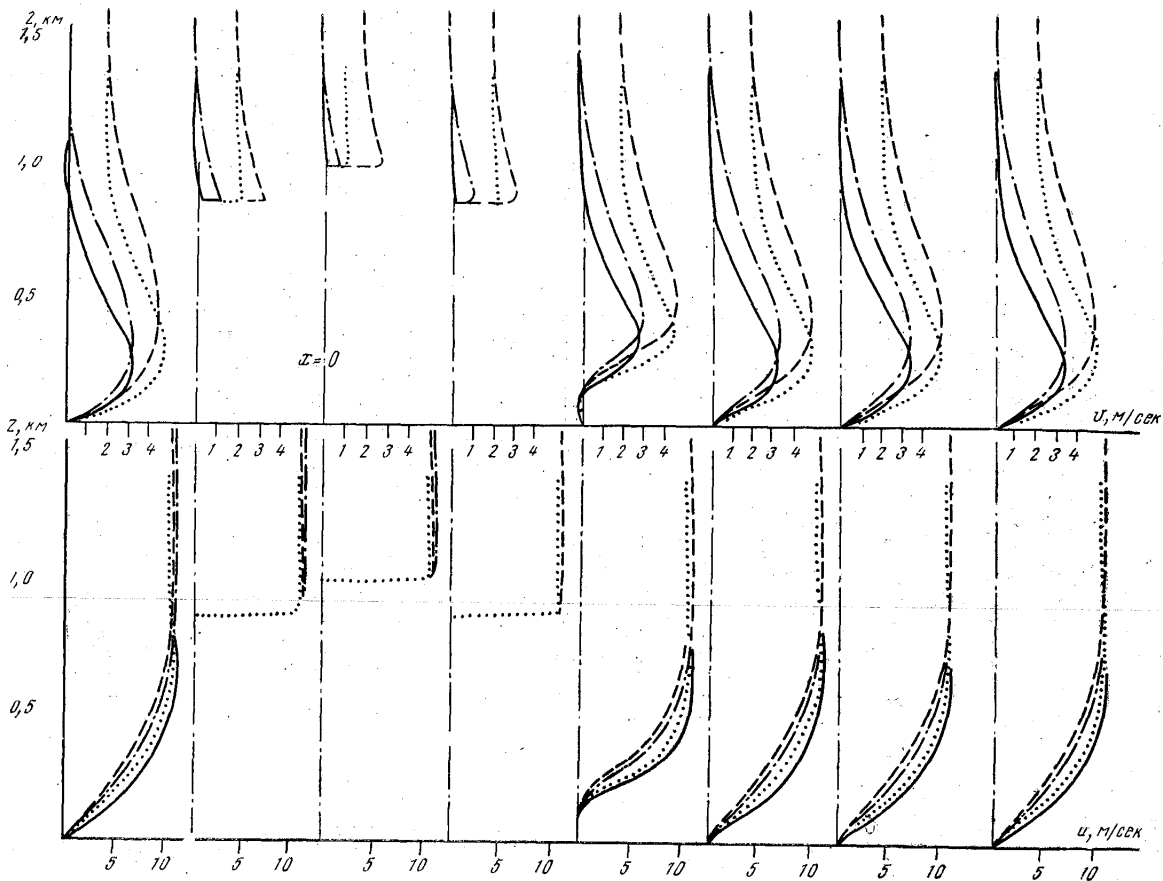


Рис. 1. Профили скоростей $v(z)$ и $u(z)$ при $u_g = 10$ м/сек при фиксированных значениях x (начало координат совпадает с центром полукруга). — — — $v = 10$ м²/сек, $v_g = 2$ м/сек, — · — · — $v = 10$ м²/сек, $v_g = 0$, ···· $v = 5$ м²/сек, $v_g = 2$ м/сек, — — — $v = 5$ м²/сек, $v_g = 0$

Рассмотрим полученные результаты. Прежде всего отметим несимметричный характер обтекания. Более заметно это по профилям скоростей. В наветренной части при подъеме вдоль склона величины скоростей меняются в основном в зависимости лишь от высоты z — так, как это имеет место для ветра по Экману (см. (7)). Отклонения от этой закономерности наблюдаются лишь в тонком слое у подстилающей поверхности. Изменения скоростей по вертикали в этом слое — будем называть его слоем возмущений — весьма резкие, поскольку толщина слоя здесь всюду очень мала. Особенно заметны градиенты скоростей

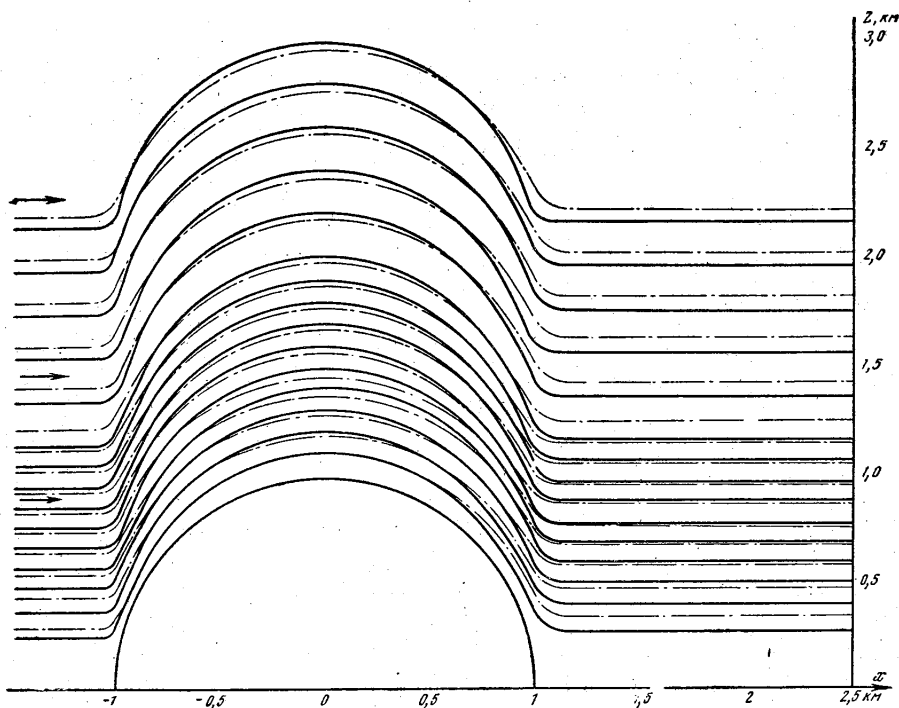


Рис. 2. Изолинии тока в случае $u_g=10$ м/сек, $v_g=0$; — $v=5$, - - $v=10$ м²/сек

на вершине, где ветер чрезвычайно резко возрастает с высотой. В подветренной части при опускании вдоль склона слой возмущений с ростом x сначала растет, достигая своего максимума при $x=1$ км, а затем уменьшается, исчезая почти полностью при $x=1,5-2$ км.

Полученные данные, кроме того, показывают, что малые отклонения общего направления потока от перпендикулярного к хребту, в основном влияют на составляющую движения вдоль хребта и мало влияют на переваливание. Наконец, сопоставление изолиний ψ и профилей скоростей $u(z)$ и $v(z)$ помогает представить проекцию движения частиц воздуха на плоскости xu . Очевидно, что проекции траекторий частиц, приближающихся к препятствию на достаточной высоте, представляют собой семейство почти прямых линий, отклонение от направления оси x которых определяется соотношением $\frac{v_g}{u_g}$. Для частиц из более низких слоев проекции прямолинейны лишь вне некоторой области вблизи гребня хребта, внутри же этой области они криволинейны и имеют

точку перегиба непосредственно над вершиной. Такая картина согласуется с выводами работы [3].

Таким образом, учет общего переноса воздуха приводит к асимметрии линий тока вблизи обтекаемой горы, однако эта асимметрия значительна лишь в непосредственной близости у горы. Необходим учет возмущения горою поля давления. Этот фактор учитывается в ряде работ разных авторов (см., например, [4—7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбюк А. Ф. Тр. ЦИП, вып. 15(42), 1949.
2. Дюбюк А. Ф. «Изв. АН СССР», сер. геофизическая, № 2, 1958.
3. Трубников Б. Н. ИДВШ, № 2, 1959.
4. Дородницын А. А. Тр. ГГО, вып. 23, 1938.
5. Scoger R. S. Q. J. R. Met. Soc., 75, 323, 1949.
6. Гутман Л. Н. ДАН СССР, 115, № 3, 1957.
7. Кожевников В. Н. «Изв. АН СССР», сер. геофизическая, № 7, 1963.

Поступила в редакцию
5.10 1963 г.

Кафедра
физики атмосферы