

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1964

В. М. БЕРЕЗИН, Ю. А. ШАФРИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ О ВЕРТИКАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ АТМОСФЕРНОГО ОЗОНА

На основе среднего вертикального распределения озона над Арозой (Швейцария) при помощи численного анализа стационарного уравнения распределения изучается механизм связи вертикальных потоков и турбулентности при колебаниях вертикального распределения озона (с учетом коэффициента фотохимического равновесия). Исследованы условия, при которых озон может находиться в стационарном состоянии.

В связи с развитием методов изучения атмосферных процессов вопрос об изменениях общего содержания озона в атмосфере приобретает важное значение. Общее содержание озона тесно связано с изменениями его вертикального распределения, а последнее в свою очередь определяется многими озонобразующими и озоноразрушающими факторами, влияние которых подлжет изучению.

Для расчета вертикального распределения атмосферного озона нами использовано полное уравнение неразрывности, записываемое с учетом турбулентной диффузии и коэффициента фотохимического равновесия, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = \alpha (\rho_0 - \rho) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — плотность озона *, ρ_0 — равновесная фотохимическая плотность, $\alpha = \frac{1}{\tau}$ — коэффициент, равный обратному значению времени полувосстановления фотохимического равновесия, D — коэффициент турбулентной диффузии, w , v , u — соответственно вертикальная и горизонтальные компоненты скорости воздуха.

Широтный и меридиональный обмен не учитывается, т. е. $\frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$. При этом $\rho = \rho(z)$, $D = D(z)$.

* Как принято в теории озона, под плотностью ρ понимается приведенная толщина слоя озона, отнесенная к единице высоты, т. е. по сути дела концентрация озона или нормальная плотность озона.

Будем рассматривать стационарный случай: $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Рассмотрение стационарного вертикального распределения атмосферного озона позволяет более точно выяснить влияние турбулентного обмена и вертикальных движений на распределение озона, а также выяснить условия, при которых озон может находиться в стационарном состоянии.

Уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \alpha(\rho_0 - \rho) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где $w = w(z)$, при краевых условиях:

$$\rho|_{z=z_0} = \rho_1, \quad \rho|_{z=H} = \rho_2. \quad (2')$$

Равновесная фотохимическая плотность ρ_0 , которая может быть рассчитана теоретически [1, 7], в данной работе не рассчитывалась. За ρ_0 было принято вертикальное распределение озона, полученное в августе 1958 г. в Арозе.

Будем считать, что вертикальная скорость w в среднем линейно зависит от высоты, т. е. $w(z) = c(z - z_0)$, где $z_0 = 7$ км. Эта же высота считается начальной при расчете стационарного вертикального распределения озона (в слое 6—50 км). Выбирая началом координат высоту 7 км, получим $w = cz$ для восходящего потока и $w = -cz$ для нисходящего. Подставив эти значения w в (2), после элементарных преобразований получим две краевые задачи с условиями (2'): для восходящего движения

$$\rho_{zz} + \frac{(Dz - w)}{D} \rho_z - \frac{(\alpha + c)}{D} \rho = -\frac{\alpha \rho_0}{D}, \quad (3)$$

для нисходящего движения

$$\rho_{zz} + \frac{(Dz - w)}{D} \rho_z - \frac{(\alpha - c)}{D} \rho = -\frac{\alpha \rho_0}{D}. \quad (3')$$

Наиболее простой путь к решению этих задач заключается в применении метода факторизации (прогонки) [2], сводящем решение краевой задачи к решению нескольких начальных задач.

Аппроксимируем вторую частную производную по z разностной схемой $\rho_{zz} = \frac{\rho_{k-1} - 2\rho_k + \rho_{k+1}}{h^2}$, где h — шаг, а k — номер шага по вертикальной координате. Первая производная по z может быть аппроксимирована тремя различными схемами:

$$\rho_z = \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{h}, \quad (4)$$

$$\rho_z = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{h}, \quad (4')$$

$$\rho_z = \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{2h}. \quad (4'')$$

Рассмотрим вначале уравнение по схеме (4) для первой краевой задачи

$$\frac{\rho_{k-1} - 2\rho_k + \rho_{k+1}}{h^2} + \frac{(Dz - w)_k}{D_k} \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{h} - \left[\frac{\alpha + c}{D} \right]_k \rho_k = - \left[\frac{\alpha \rho_0}{D} \right]_k, \quad (5)$$

Для простоты введем обозначения:

$$\left[\frac{D_z - \omega}{D} \right]_k = A_k, \quad \left[-\frac{\alpha + c}{D} \right]_k = B_k, \quad \left[\frac{\alpha \rho_0}{D} \right]_k = F_k,$$

Краевые условия могут быть любыми, в том числе и нулевыми. В нашем расчете они имеют вид

$$\rho_0 = 1,5 \text{ см/км} (10^{-3}), \quad \rho_{p+1} = 0,2 (10^{-3} \text{ см/км}) \quad (k = 0, 1 \dots p + 1).$$

Введем новые неизвестные $x_{k+1/2}$ и $y_{k+1/2}$, связав их между собой условием

$$\rho_k = x_{k+1/2} \rho_{k+1} + y_{k+1/2}. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{k-1} &= x_{k-1/2} \rho_k + y_{k-1/2} = x_{k-1/2} (x_{k+1/2} \rho_{k+1} + y_{k+1/2}) + \\ &+ y_{k-1/2} = x_{k-1/2} x_{k+1/2} \rho_{k+1} + x_{k-1/2} y_{k+1/2} + y_{k-1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (7) в (5), получим

$$\begin{aligned} (x_{k-1/2} x_{k+1/2} \rho_{k+1} + x_{k-1/2} y_{k+1/2} + y_{k-1/2} - 2x_{k+1/2} \rho_{k+1} - \\ - 2y_{k-1/2} + \rho_{k+1}) + A_k h (\rho_{k+1} - x_{k+1/2} \rho_{k+1} - y_{k+1/2}) + \\ + B_k h^2 (x_{k+1/2} \rho_{k+1/2} + y_{k+1/2}) + h^2 F_k = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $x_{k+1/2}$ и $y_{k+1/2}$ подобраны так, что коэффициент при ρ_{k+1} в формуле (8) равен нулю. После элементарных преобразований получим

$$x_{k+1/2} = \frac{1 + A_k h}{2 + A_k h - x_{k-1/2} - B_k h^2}, \quad (9)$$

$$y_{k+1/2} = \frac{h^2 F_k + y_{k-1/2}}{2 + A_k h - x_{k-1/2} - B_k h^2}. \quad (10)$$

Легко видеть, что получились две начальные задачи, решаемые слева направо, при начальных условиях $x_{1/2} = 0$, $y_{1/2} = 1,5$.

После вычисления $x_{k+1/2}$ и $y_{k+1/2}$, ρ_k определяется справа налево из начальной задачи

$$\rho_k = x_{k+1/2} \rho_{k+1} + y_{k+1/2}, \quad \rho_{p+1} = 0,2. \quad (11)$$

Для расчета по схеме (4') получаются формулы

$$x_{k+1/2} = \frac{1}{2 - A_k h - B_k h^2 - (1 - A_k h) x_{k-1/2}}, \quad (12)$$

$$y_{k+1/2} = \frac{(1 - A_k h) y_{k-1/2} + F_k h^2}{2 - A_k h - B_k h^2 - (1 - A_k h) x_{k-1/2}}. \quad (13)$$

Легко могут быть получены формулы и для расчета по схеме (4'). Для второй исходной краевой задачи, т. е. для нисходящего движения в коэффициентах A_k , B_k , необходимо изменить знак c .

Способы исследования на устойчивость используемых разностных уравнений достаточно сложны и не всегда приводят к желаемому результату из-за трудности выбора вычислительного алгоритма. Проведенный нами простой подсчет показал, что для восходящего движения устойчива схема с аппроксимацией (4'), а для нисходящего движения — схема с аппроксимацией (4). При отсутствии вертикальной скорости и

при постоянном коэффициенте диффузии уравнение (5) принимает абсолютно устойчивый вид [2].

Рассмотрим стационарное вертикальное распределение озона на высотах 6—50 км. Этот промежуток разобьем на 22 слоя толщиной 2 км. Считается, что в каждом слое все величины, входящие в разностную схему, постоянны и равны своим значениям в центре слоя. Расчет по разностной схеме ведется от 7 ($k=0$) до 49 км ($k=21$). За пределами этих крайних точек p полагается равной нулю. Начальная плотность считается совпадающей с равновесной фотохимической плотностью*. Коэффициенты α рассчитаны по данным Дютша [3]. Вертикальная скорость равна cz для восходящего потока и $-cz$ для нисходящего, где $c=4,5 \cdot 10^{-6}$ сек $^{-1}$. Для выбора коэффициента турбулентной диффузии использованы результаты Л. Т. Матвеева [4, 5], указавшего, в частности, на квадратичную связь этого коэффициента и горизонтальной скорости ветра $D \sim u^2$.

При этом рассмотрены два случая:

1. $D = \text{const} = 3$ м 2 /сек, что является наименьшим значением D из приведенной Л. Т. Матвеевым в [4] таблицы значений коэффициентов диффузии, измеренных с самолета на высотах 5,5—12,3 км.

2. $D \sim u^2$, где u — средняя горизонтальная скорость, рассчитанная по значениям среднемесячного индекса циркуляции атмосферы [6] на различных изобарических поверхностях, а за начальную величину D на уровне 7 км принято среднее значение, равное 20 м 2 /сек [5]. Производная $\frac{dD}{dz} = D_z$ в каждом слое рассчитана методом конечных разностей.

До высоты 19 км $D_{\text{const}} < D_{\text{перем}}$ начиная с высоты 21 км — $D_{\text{const}} > D_{\text{перем}}$. Для расчета стационарного распределения озона при отсутствии вертикальных потоков использованы постоянные значения коэффициента турбулентной диффузии, равные 3 и 9 м 2 /сек, а также переменный коэффициент турбулентности.

На рис. 1 показаны кривые стационарного распределения озона при восходящем движении со скоростью, меняющейся от нуля на нижней границе изучаемого слоя до 18,5 см/сек на верхней границе. Сплошной линией обозначена равновесная кривая, пунктирной — кривая с постоянным коэффициентом диффузии, а штриховой — с переменным коэффициентом диффузии. Как видно из рисунка, стационарное распределение озона при восходящих движениях практически никогда не устанавливается. Теоретически это означает резкий подъем максимума вверх (с уровня 27 до уровня 38 км) и уменьшение общего содержания озона до величины, в 5—6 раз меньшей первоначальной цифры (0,300 см). При большем коэффициенте диффузии в нижних слоях общее стационарное содержание озона незначительно возрастает, что согласуется с физическими соображениями и указывает на довольно небольшой (хотя и заметный) вклад турбулентной диффузии в вертикальное распределение озона.

Из рис. 1 ясно, что фотохимическое равновесие озона при сильных восходящих потоках может устанавливаться на высотах 36—38 км, а не 30 км, как предполагается большинством авторов, т. е. изменчивым является более толстый слой озона. Заметим, что влияние турбулентной диффузии на высотах 29—30 км перестает сказываться.

Приведенные замечания целиком справедливы и для стационарного распределения озона при нисходящих потоках. (Как и следовало

* Для Арозы рассчитанная фотохимическая плотность близка к средней начальной [1].

предполагать, произошло резкое опускание максимума кривой распределения до высоты 11 км и увеличение общего содержания озона при тех же закономерностях).

Практически более важным является рассмотрение случая с нулевой вертикальной скоростью. На рис. 2 приведены кривые стационарного распределения озона при отсутствии вертикальных потоков в сравнении с равновесной кривой, пунктиром обозначена кривая с коэффициентом D , равным $3 \text{ м}^2/\text{сек}$, штрихами — кривая при $D=9 \text{ м}^2/\text{сек}$, а штрих-пунктиром — кривая с переменным коэффициентом диффузии.

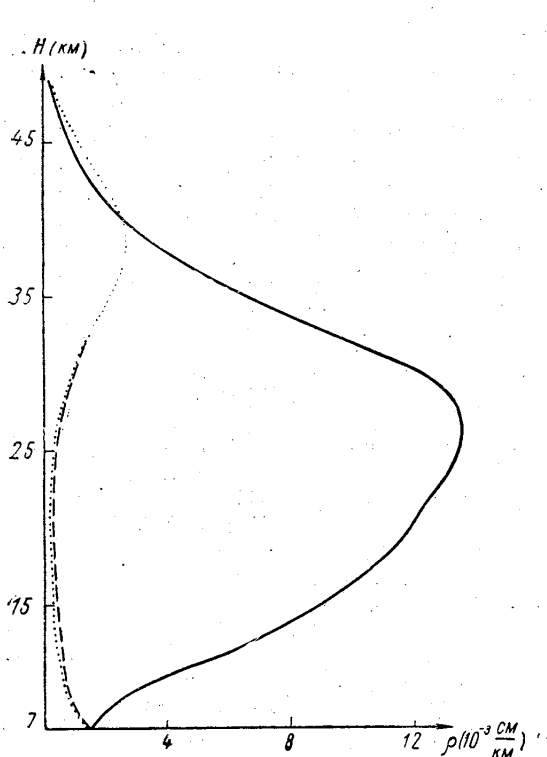


Рис. 1.

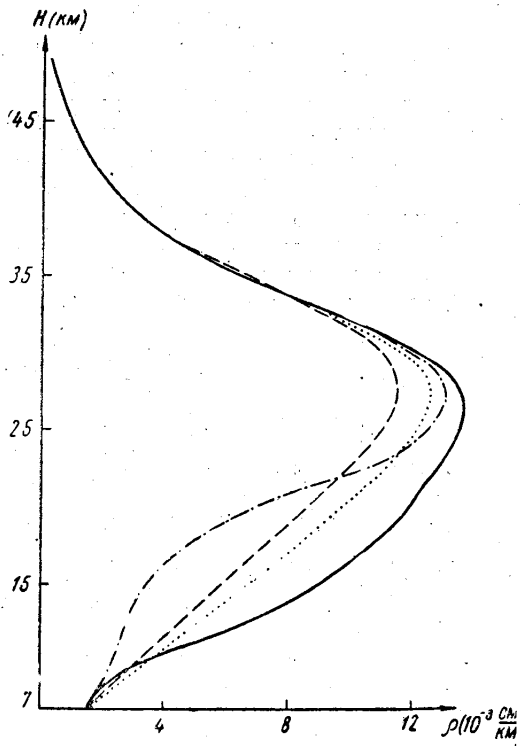


Рис. 2.

Увеличение турбулентности в 3 раза слабо сказывается на изменении формы кривой. Кривая становится все более симметричной, причем высота максимума не меняется, а общее содержание озона уменьшается. Можно с уверенностью сказать, что изменение турбулентности само по себе не может сказаться на высоте максимума озонового слоя. Эта высота определяется вертикальными движениями. Влияние нижнего граничного условия на стационарное распределение очевидно, однако не подлежит сомнению общая тенденция убыли озона при возрастании коэффициента турбулентности (см. рис. 2).

Особенно отчетливо сказывается на убыли озона возрастание турбулентности с высотой. На уровне перемены знака производной $\frac{dD}{dz} = 0$ (11—13 км) находится точка перегиба стационарной кривой, после чего с уменьшением турбулентности быстро ослабляется эффект убыли озона и на высоте 23—25 км вступает в силу общая тенденция, что очень хорошо видно на рис. 2. В верхних слоях количество озона быстро

возвращается к равновесному, а в нижних этого восстановления не происходит. Поэтому обмен между верхними, более бедными озоном слоями атмосферы, и нижними, более богатыми, приводит к уменьшению общего содержания озона. Именно небольшой промежуток слоя над максимумом (25—30 км), когда плотность озона убывает, а эффект турбулентной диффузии еще заметен, может играть значительную роль в перераспределении озона, особенно зимой и весной, при пониженной высоте максимума.

Выбранный метод численного расчета вертикального стационарного распределения озона с успехом может быть применен и для решения других, более общих краевых задач физики атмосферы и не только стационарных. Наш расчет подтвердил высокую эффективность вертикальных движений, незначительное, хотя и заметное, влияние турбулентной диффузии, а также невозможность установления стационарного распределения озона даже при очень слабых вертикальных воздушных потоках. Практически стационарное распределение может установиться в спокойной (в смысле упорядоченных движений) атмосфере. При незначительной турбулентности это распределение близко к равновесному. Наличие симметричного озонного распределения по высоте (относительно максимума — см. рис. 2) может указывать на повышенную турбулентность в атмосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митра С. К. Верхняя атмосфера. ИЛ, М., 1955, стр. 131.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. Физматгиз, М., 1962, стр. 505.
3. Dutsch H. U. Arch. Meteor. Geoph. Biokl., Ser A., Bd. 9, No. 1, 87, 1956.
4. Матвеев Л. Т. «Изв. АН СССР», ИАН СССР, сер. геофизическая, № 7, 927, 1958.
5. Матвеев Л. Т. Тр. ГГО, вып. 78, 98, 1958.
6. Машкович С. А., Хейфец Я. М. Тр. ЦИП, вып. 111, 50, 1961.
7. Хвостиков И. А. Физика ионосферы и озоносферы. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.

Поступила в редакцию
19.11 1963 г.

Кафедра
физики атмосферы