Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1964

М. И. СТАКВИЛЕВИЧУС

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПОЛЯ

Показано, что уравнения Эйнштейна с тензором энергии — импульса скалярного комплексного поля в правой части допускают сферически симметричные частицеподобные решения, причем метрика имеет характер Шварцшильдовской на больших расстояниях. В приближении слабого гравитационного поля ход метрики приближается к соответствующей метрике ньютоновского потенциала. Указывается на возможность получения спектра масс скалярных частиц решением точных уравнений и введением скалярного квантованного квазизаряда.

§ 1

В работах [1, 2, 3, 4] были получены частицеподобные решения нелинейных уравнений поля для простейших форм нелинейного лагранжиана. Среди всех полей гравитационное занимает особое положение: оно описывается нелинейными уравнениями Эйнштейна и дает конкретную зависимость между полями посредством гравитирующих масс полей. Естественными поэтому являются многочисленные попытки построения единой теории поля посредством общей теории относительности. В частности, было показано, что уравнения Эйнштейна со статическими сферически симметричными электромагнитными или скалярными полями с точечными источниками зарядов допускают повсюду регулярные решения, получаемые из сингулярных координат соответствующим, но неоднозначным преобразованием координат [5, 6, 7, 8].

В настоящей работе предпринимается попытка получения всюду регулярных, монотонно убывающих на достаточно больших расстояниях (частицеподобных) решений уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса скалярного комплексного потенциала в правой части, получаемым из лагранжиана

$$L = -\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^l} g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2 \psi^* \psi\right) \sqrt{-g}, \tag{1}$$

который в отсутствие гравитационных полей является линейным. Целесообразность такой постановки вопроса продиктована тем, что даже в ньютоновском приближении скалярное поле может удержаться собственной массой поля. Причем могут получиться такие сгустки, которые приведут к сингулярности в точке симметрии, если не имеется отталкивающих сил или энергии, соответствующей в классической теории кинетической. Однако, как будет показано ниже, введение скалярного поля, комплексного относительно времени, эквивалентно введению указанных сил. При этом нет надобности пользоваться произвольностью координатных условий для приведения явно непригодных в физическом отношении решений к желаемым. Исходя из указанных качественных соображений можно получить явный вид (с точностью до множителя) скалярного и гравитационного потенциалов и численные значения физических величин, характеризующих элементарные частицы, которые для слабых гравитационных полей можно получить и в ньютоновском приближении.

§ 2

Отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса сферически-симметричного скалярного комплексного поля, описываемого лагранжианом (1), имеют вид

$$T_1^1 = e^{-\lambda} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^1} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} - e^{-\nu} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^4} \frac{\partial\psi}{\partial x^4} - m^2\psi^*\psi,$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -e^{-\lambda} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^1} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} + e^{-\nu} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^4} \frac{\partial\psi}{\partial x^4} - m^2\psi^*\psi,$$

$$T_4^4 = e^{-\lambda} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^1} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} - e^{-\nu} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^4} \frac{\partial\psi}{\partial x^4} - m^2\psi^*\psi,$$

$$T_1^4 = e^{-\nu} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^1} \frac{\partial\psi}{\partial x^4} + \frac{\partial\psi}{\partial x^1} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^4} \right),$$

где $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \varphi$; $x^4 = ct$;

$g_{11} = e^{\lambda}$; $g_{22} = r^2$; $g_{33} = r^2 \sin^2\theta$; $g_{44} = -e^{\nu}$; $g_{ik} = 0$ при $k \neq i$,

и мы не будем прибегать к дополнительным координатным условиям типа $r = r' e^{\mu}$, используемым в вышеуказанных работах [6,7].

Варьирование (1) по ψ^* и ψ дают соответственно

$$e^{-\lambda}\left(\psi'' + \frac{2}{r}\psi' + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\psi'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\psi} + \frac{\dot{\nu} - \dot{\lambda}}{2}\dot{\psi}\right) - m^2\psi = 0, \quad (2)$$

$$e^{-\lambda}\left(\psi''^* + \frac{2}{r}\psi'^* + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\psi'^*\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\psi}^* + \frac{\dot{\nu} - \dot{\lambda}}{2}\dot{\psi}^*\right) - m^2\psi^* = 0. \quad (3)$$

Если положить $\psi = \varphi(r) e^{i\varepsilon x^4}$, линейно независимые компоненты уравнений Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$$

примут вид

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi k}{c^4}(e^{-\lambda}\varphi'^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu}\varphi^2 + m^2\varphi^2), \quad (4)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}(e^{-\lambda}\varphi'^2 + \varepsilon^2 e^{-\nu}\varphi^2 - m^2\varphi^2), \quad (5)$$

$$\dot{\lambda} = 0,$$

а (2) и (3) совпадают лишь в том случае, когда $\dot{\nu}=0$, а запишутся в форме

$$e^{-\lambda}\left(\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + \frac{\nu'-\lambda'}{2}\varphi'\right) + (\varepsilon^2 e^{-\nu} - m^2)\varphi = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, получили полную систему дифференциальных уравнений (4)—(6), решения задачи Коши для которых физически допустимы только в том случае, для которых e^{λ} и e^{ν} при достаточно больших r переходят во внешнее решение Шварцшильда, а в начале координат все функции φ, λ, ν — ограничены. Разложением искомых функций в степенной ряд можно непосредственно убедиться, что такие значения существуют (причем $\lambda_0=0$, а все функции—четные относительно r), и естественно попытаться найти такие собственные значения граничных условий ν_0, φ_0 и неопределенных параметров m и ε, при которых $e^{\lambda}\to 1$, $e^{\nu}\to 0$, $\varphi\to 0$ при $r\to\infty$

§ 3

Исследуем (4) — (6) для слабых полей, для которых $|\lambda| \ll 1$; $|\nu| \ll 1$, что всегда возможно из-за малости коэффициента $\frac{8\pi k}{c^4}$ в правой части (4) и (5).

Тогда уравнения (4) — (6) примут вид

$$\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} = \frac{8\pi k}{c^4}(\varphi'^2 + \varepsilon^2\varphi^2 + m^2\varphi^2), \qquad (7)$$

$$\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}(\varphi'^2 + \varepsilon^2\varphi^2 - m^2\varphi^2), \qquad (8)$$

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' + [\varepsilon^2(1-\nu) - m^2]\varphi = 0. \qquad (9)$$

Существенно, что в (9) ν отбросить нельзя, ибо $\nu \ll \lambda$ [9], если $\lambda\to 0$, $\nu\to 0$ на бесконечности и выражение в квадратных скобках в (9) допускает частицеподобные решения только в том случае, когда оно меняет знак и с некоторых r становится отрицательным. Заменой

$$u = \sqrt{\frac{8\pi k}{c^4}}\,\varphi, \quad x = r\varepsilon, \quad \eta = \frac{m^2}{\varepsilon^2} - 1 + \nu$$

приведем (7) — (9) к безразмерной форме

$$\frac{\lambda}{x^2} + \frac{\lambda'}{x} = u'^2 + \left(1 + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\right)u^2, \qquad (7a)$$

$$\frac{\nu'}{x} - \frac{\lambda}{x^2} = u'^2 + \left(1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2}\right)u^2, \qquad (8a)$$

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \eta u = 0. \qquad (9a)$$

Дальнейшее упрощение (7а)—(9а) можно получить из следующих соображений:

1) $\frac{m^2}{\varepsilon^2} - 1 = p \ll 1$ ввиду малости ν;

2) так как в достаточно малой окрестности любого фиксированно x решение (9а) имеет вид

$$u \sim \frac{\sin \sqrt{-\eta}\, x}{x} \text{ при } \eta < 0,$$

$$u \sim \frac{e^{-\sqrt{\eta}\, x}}{x} \text{ при } \eta > 0,$$

то $u'^2 \ll u^2$;

3) так как вблизи начала координат

$$\frac{\lambda}{x} \sim x, \quad \text{а} \quad xu'^2 \sim x^3,$$

а на больших расстояниях для требуемых решений xu'^2 стремится к нулю быстрее, чем $\frac{\lambda}{x}$, отбросим в (8а) xu'^2.

Тогда получим упрощенную систему уравнений

$$(\lambda x)' = 2x^2 u^2, \tag{7б}$$

$$\nu' = \frac{\lambda}{x}, \tag{8б}$$

$$u'' + \frac{2}{x} u' - \eta u = 0. \tag{9б}$$

Подстановкой (7б) в (8б) непосредственно получаем уравнение Пуассона для η

$$\frac{1}{x^2}(x^2 \eta')' = \Delta_r \eta = 2u^2, \tag{10}$$

где ν — соответствует гравитационному потенциалу, а $2u^2$ — плотности полевой массы (с соответствующими множителями). Это значит, что мы перешли к выражению для гравитационного потенциала в ньютоновском приближении.

Введением новых переменных

$$v = \frac{r}{p}, \tag{11}$$

$$\Omega = \frac{\lambda}{p}, \tag{12}$$

$$y = x\sqrt{p}, \tag{13}$$

$$v = xu\sqrt{\frac{2}{p}} \tag{14}$$

и двукратным интегрированием (7б) и (8б) получаем интегродифференциальное уравнение

$$v'' = \left(1 - \frac{1}{y}\int_0^y v^2\, dx - \int_y^\infty \frac{v^2}{x}\, dx\right) v, \tag{15}$$

зависящее от одного параметра $v_0' = \alpha$, и задача сводится к определению таких граничных условий $v_0' = \alpha$, при которых имеются частицеподобные решения (15). Необходимым условием существования таких решений является требование $\int\limits^{\infty} \frac{v^2}{x} dx = \beta > 1$, так как только в этом случае отношение $\frac{v''}{v}$ будет менять знак с отрицательного на положительный.

§ 4

Уравнение (15) нелинейно, и решение его можно получить только численным методом. Чтобы выяснить характер безузлового решения, будем искать его аналитически хотя бы в грубом приближении, представив

$$v = e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), разложив e^{-y} в ряд Тейлора и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях y, получаем

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \alpha, \quad a_3 = \frac{4-\beta}{6}\alpha; \quad \alpha_4 = \frac{2-\beta}{6}\alpha;$$

$$a_5 = \frac{16 - 12\beta + \beta^2 + \alpha^2}{120}\alpha; \quad a_6 = \frac{16 - 16\beta + 3\beta^2 + 3\alpha^2}{360}.$$

Для определения α подставим (16) в правую часть (15), проинтегрируем 2 раза и потребуем обращения в нуль двойного интеграла при $y \to \infty$.

Тогда алгебраические выражения, определяющие α и β, примут вид

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l (l+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_n a_m a_l (n+m-k)(n+m)!\, l!}{2^{n+m+1}} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{a_n a_m a_l (n+m-k)(n+m-1)!\,(l+k)!}{2^{n+m-k+1}\, 3^{l+k+1}\, k!} \tag{17}$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+m-1)!}{2^{n+m}} a_n a_m. \tag{18}$$

Так, в первом приближении для

$$v_1 = \alpha_1 (y + y^2) e^{-y}$$

получаем

$$\alpha_1 = 1{,}36; \quad \beta_1 = 2{,}09.$$

Подставляя α_1 и β_1 в выражения для a_3 и a_4 и применив (17) и (18), получим следующее приближение:

$$\alpha_2 = 0{,}968; \quad \beta_2 = 1{,}95.$$

Ввиду громоздкости вычислений дальнейшие приближения не производились.

Подсчитаем еще коэффициент $\gamma = \int\limits_0^{\infty} v^2 dx$ ($\gamma_2 = 3{,}41$), который понадобится для определения массы.

Таким образом, приближенное решение с учетом (13)—(14)

$$u = \frac{ap}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{p}\, x + \ldots)\, e^{-\sqrt{p}\, x} \tag{19}$$

подтверждает законность допущений, сделанных в § 3, для малых $p = \frac{m^2}{\varepsilon^2} - 1$.

Полевая масса частицы определяется в вышеуказанном приближении формулой

$$\mu = -\frac{1}{c^2} \int\limits_v T_4^4\, d\nu = \frac{8\pi\varepsilon^2}{c^2} \int\limits_0^\infty \varphi^2 r^2\, dr = \frac{c^2 \sqrt{p}}{2k\varepsilon} \gamma. \tag{20}$$

Если вести квантованный квазизаряд скалярного поля

$$g = \frac{1}{2i} \int\limits_v \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^4} \psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^4} \psi \right) dv = \varepsilon^2 \int\limits_v \varphi^2\, dv, \tag{21}$$

получим для заданного p численное значение массы, выраженное через скалярный квазизаряд

$$\mu^2 = \frac{gc^2 \sqrt{p}\, \gamma}{k}. \tag{22}$$

Следует иметь в виду, что решение неупрощенной системы уравнений (4)—(6) с двумя неопределенными параметрами η_0 и u_0 должно давать также дискретные значения для p (вырождение по p снимается). В этом случае для скалярных элементарных частиц, удерживаемых собственными гравитационными силами, можно получить спектр масс

$$\frac{\mu_1^4}{p_1 \gamma_1^2} = \frac{\mu_2^4}{p_2 \gamma_2^2} = \mathrm{const},$$

где значения p_k и γ_k должны определяться решением уравнений (4)—(6).

Вопрос о том, существуют ли такие решения в нелинейном приближении, являются ли такие решения устойчивыми, соответствуют ли они реальным частицам, остается открытым. Нам кажется маловероятным, что, во-первых, точное решение уравнений Эйнштейна даст существенно новое в указанной постановке вопроса и, что, во-вторых, гравитационные силы внутри элементарных частиц, радиусы которых намного больше гравитационных радиусов, являются существенными по отношению к другим, более сильным. Этот вывод следует из того, что для частиц с радиусами $\rho = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{p}}$ порядка 10^{-13} *см* гравитационное поле исключительно слабо, и значение p, как видно из (20) и (22), имеет порядок 10^{-40}.

Однако раз уже частицеподобные решения приближенных уравнений Эйнштейна существуют, мы обязаны, вспоминая высказывание Эйнштейна: «... есть все основания полагать, что элементарные образования, из которых состоят атомы, удерживаются силами гравитации», — проверить, содержатся ли они в точных уравнениях Эйнштейна, и проверить, соответствуют ли они элементарным частицам, тем более, что решения эти могут быть применены к исследованию скалярных геонов.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность профессору Я. П. Терлецкому за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finkelstein R., Levier R. Le, Ruderman M. Phys. Rev., **83**, 326, 1951.
2. Finkelstein R., Fronsdal C., Klaus D. Phys. Rev., **109**, 1571, 1956.
3. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
4. Schiff H. Proc. Roy. Soc., **1337**, 277, 1962.
5. Широков М. Ф. ЖЭТФ, **18**, 236, 1948.
6. Дуань И. Ши. ЖЭТФ, **27**, 756, 1954.
7. Дуань И-Ши. ЖЭТФ, **31**, 1098, 1956.
8. Rrachmachary. Progr. Theoret. Phys., **23**, 749, 1960.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960, стр. 341.

Поступила в редакцию
27.11 1963 г.

Кафедра
статистической физики