

В. В. КОМАРОВ, А. М. ПОПОВА

ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

С помощью метода суммирования нерелятивистских диаграмм теории возмущения [1—3] получены интегральные уравнения для амплитуд взаимодействия трех нуклонов в предположении, что существенными являются парные силы. Для простоты изложения расчеты проводятся для бесспиновых частиц. Полученные уравнения содержат вдвое меньше переменных, чем соответствующее уравнение Шредингера. Обсуждаются основные свойства нерелятивистских диаграмм теории возмущений. Показано, что метод суммирования диаграмм можно распространить на решение задач взаимодействия большого числа нуклонов.

Эффективным методом исследования ядерных реакций при малых энергиях является метод суммирования бесконечного ряда нерелятивистских диаграмм теории возмущений. Как было показано [1—3, 5], предложенный метод позволяет получать интегральные уравнения для амплитуд ядерных реакций, причем эти уравнения оказываются зависящими от меньшего числа переменных, чем соответствующие интегральные уравнения Шредингера.

В настоящей работе на примере реакции неупругого рассеяния нуклона на дейтроне ($N+d \rightarrow 3N$) при малой энергии показан процесс получения интегрального уравнения для амплитуды рассеяния методом суммирования диаграмм, соответствующих рассматриваемой реакции, и обсуждаются свойства нерелятивистских диаграмм и основные правила их расчета. Будем считать, что в данном взаимодействии трех нуклонов существенными являются только парные силы. Это приближение основывается на том, что в нерелятивистском случае трехчастичные силы, как известно, играют незначительную роль. Отметим, что в предлагаемом методе учет трехчастичных сил не представляет принципиальных трудностей. Для простоты изложения положим, что все нуклоны, участвующие в реакции, тождественны и не имеют спина.

Как было показано в [2—3], точной амплитуде реакции $N+d \rightarrow 3N$ можно сопоставить бесконечный ряд диаграмм лестничного типа (рис. 1). В этих диаграммах фигура (рис. 2, а) есть вершина распада дейтрона на нуклоны, блок (рис. 2, б) соответствует точной амплитуде рассеяния пары нуклонов, T есть графическое изображение точной амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтроне.

На представленных диаграммах все линии распространения имеют одно направление, поскольку в нерелятивистском случае на промежу-

точных этапах не могут рождаться и поглощаться частицы (кроме участвующих в реакции трех нуклонов).

Бесконечный ряд диаграмм (см. рис. 1) можно суммировать в следующее графическое интегральное уравнение (рис. 3). Очевидно, ите-

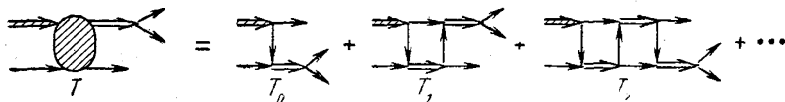


Рис. 1. Бесконечная сумма диаграмм, соответствующих реакции неупругого рассеяния нуклона на дейтроне при малых энергиях

рация этого уравнения позволяет восстановить всю совокупность диаграмм, приведенную на рис. 1.

Поскольку частицы тождественны, то вместо первой диаграммы (T_0 на рис. 1), обычно называемой полюсной, возникает сумма трех графиков, отличающихся лишь перестановкой частиц в конечном состоянии (рис. 4). То же самое относится к остальным графикам ряда рис. 1; так что амплитуда рассеяния нуклона на дейтроне с расщеплением дейтрона имеет вид рис. 5.

Рассмотрим способ вычисления вкладов от каждой из диаграмм рис. 1 и метод получения интегрального уравнения для амплитуды реакции $N+d \rightarrow 3N$. Будем рассматривать случай, когда в конечном состоянии взаимодействуют частицы 1 и 2. Отметим, что основным свойством диаграмм теории возмущений является выполнение закона сохранения импульса и полной энергии в каждой точке, где скрещиваются линии. На основании этого свойства можно получить значение полной энергии и импульса для каждой промежуточной линии. Если диаграмма имеет замкнутый контур из четырех линий распространения виртуальных частиц, то необходимо по значениям полной энергии ϵ и трехмерному импульсу \vec{q} одной из виртуальных частиц про-

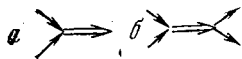


Рис. 2. Элементы диаграмм взаимодействия нуклона и дейтрона: а—вершина распада дейтрона на два нуклона, б—блок рассеяния нуклона на нуклоне [1]

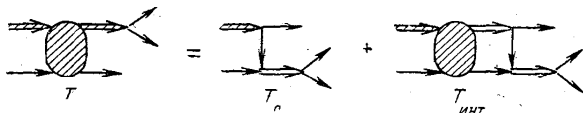


Рис. 3. Графическое интегральное уравнение, соответствующее амплитуде неупругого рассеяния нуклона на дейтроне

водить интегрирование. Однако это интегрирование по ϵ сведется к тому, что данная виртуальная частица должна находиться на массовой поверхности, так что $\epsilon = \frac{q^2}{2m}$, где m — масса частицы.

Вклад от каждой диаграммы определяется произведением значений, соответствующих вершинам, блокам и линиям распространения, составляющих данную диаграмму. При переходе от вклада диаграммы к значению, соответствующему вкладу в амплитуду, квадрат которой определяет сечение, необходимо учесть множитель $\frac{-ik}{2\pi \left(\frac{dE^0}{dk} \right)}$, являющийся

плотностью конечных состояний. Здесь E^0 — полная энергия, \vec{k} — относительный импульс нуклона и пары взаимодействующих в конечном состоянии нуклонов в с.ц.и. реакции.

Найдем значение вклада от блока рассеяния нуклона на нуклоне, встречающегося в диаграммах рис. 1. Из этого рисунка видно, что частицы, входящие в указанный блок и выходящие из него, могут быть виртуальными, так что вклад от блока рассеяния двух нуклонов должен

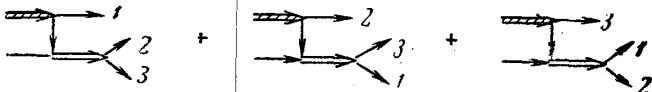


Рис. 4. Полюсные графики, соответствующие взаимодействию различных пар нуклонов в конечном состоянии

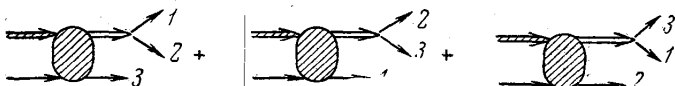


Рис. 5. Графическое представление симметризованной амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтроне

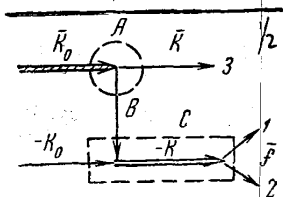


Рис. 6. Полюсная диаграмма, соответствующая реакции неупругого рассеяния нуклона на дейтроне с образованием в конечном состоянии взаимодействующих частиц 1 и 2. A — вершина распада дейтрона, C — блок рассеяния нуклона на нуклоне, B — линия распространения нуклона

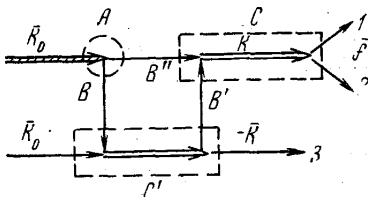


Рис. 7. Квадратная диаграмма, соответствующая реакции неупругого рассеяния нуклона на дейтроне с образованием в конечном состоянии взаимодействующих частиц 1 и 2. A — вершина распада дейтрона, C и C' — блоки рассеяния двух нуклонов, B_1 , B_2 и B_4 — линии распространения нуклонов

быть функцией относительной энергии E рассеивающихся частиц и импульсов \vec{f} и \vec{f}' относительного движения частиц до рассеяния и после рассеяния. (В общем случае $|\vec{f}| \neq |\vec{f}'| \neq \sqrt{mE}$.)

Как показано в [1], вклад от рассматриваемого блока есть величина $\left(-i \frac{4\pi}{m}\right) a(\vec{f}, \vec{f}', E)$, где $a(\vec{f}, \vec{f}', E)$ — амплитуда рассеяния двух частиц, находящихся не на массовой поверхности.

Поскольку нас интересует рассеяние частиц при небольших энергиях, то при вычислении вкладов от блоков рассеяния двух частиц можно ограничиться лишь нулевой гармоникой $a_0(\vec{f}, \vec{f}', E)$ амплитуды $a(\vec{f}, \vec{f}', E)$. Ранее, в [1] методом суммирования диаграмм было получено интеграль-

ное уравнение для амплитуды $a(\vec{f}, \vec{f}', E)$, аналогичное уравнению Шредингера

$$a(\vec{f}, \vec{f}', E) = \frac{m}{4\pi} V(\vec{f}, \vec{f}') + \frac{m}{8\pi} \int \frac{V(\vec{f}', \vec{q}) a(\vec{q}, \vec{f}', E)}{mE - q^2 - i\tau} d\vec{q}, \quad (1)$$

$$V(\vec{f}, \vec{f}') = \int e^{-i(\vec{f}-\vec{f}') \cdot \vec{r}} V(r) dr.$$

Отсюда уравнение для $a_0(f, f', E)$ будет иметь вид

$$a_0(f, f', E) = \frac{m}{4\pi} V_0(f, f') + \frac{m}{8\pi} \int \frac{V_0(f', q) a_0(f, q, E)}{mE - q^2 - i\tau} dq, \quad (2)$$

$$V_0(f, f') = \int \sin(f \cdot r) \sin(f' \cdot r) V(r) dr.$$

Если величина $V_0(f, f')$ может быть представлена в виде

$$V_0(f, f') = \varphi(f) \varphi(f'), \quad (3)$$

то уравнение (2) может быть решено относительно $a_0(f, f', E)$. Действительно, подставим $V_0(f, f')$ в виде (3) в уравнение

$$a_0(f, f', E) = \varphi(f') \left[\frac{m}{4\pi} \varphi(f) + \frac{m}{8\pi^2} \int \frac{\varphi(q) a_0(f, q, E)}{mE - q^2 - i\tau} dq \right]. \quad (4)$$

В (4) обозначим интеграл, стоящий в квадратных скобках, через $I(E, f)$. Если в этом интеграле $a_0(f, q, E)$ записать в виде (2), то для $I(E, f)$ получим:

$$I(E, f) = \varphi(f) F(E) + I(E, f) F(E); \quad F(E) = \frac{m}{8\pi^2} \int \frac{\varphi^2(q)}{mE - q^2 - i\tau} dq.$$

Отсюда

$$I(E, f) = \frac{\varphi(f) F(E)}{1 - F(E)}. \quad (5)$$

Если поставить полученное значение для $I(E, f)$ в (4), то для $a_0(f, f', E)$ получим:

$$a_0(f, f', E) = \frac{m}{4\pi} \varphi(f') \varphi(f) \frac{1}{1 - F(E)}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что в случае $\sqrt{mE} \cdot r_0 \ll 1$, т. е. в нулевом и линейном приближениях по радиусу действия ядерных сил (в случае, когда $V_0(f, f')$ есть const), нулевая гармоника амплитуды рассеяния пары нуклонов зависит лишь от относительной энергии двух частиц и, следовательно, в качестве вклада от блока рассеяния двух частиц можно брать величину $-i \frac{4\pi}{m} a(f)$, пропорциональную амплитуде рассеяния нуклона на нуклоне на массовой поверхности $a(f)$, где $f = \sqrt{mE}$. Как известно, в нулевом приближении по r_0 $a(f) = -\frac{1}{\alpha + if}$, а в линейном приближении по r_0 $a(f) = \left[\frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha_d r_0}{\alpha_d + if} \right]$. В случае, когда $\sqrt{mE} \cdot r_0 \gg 1$, в качестве вклада от блока рассеяния двух частиц, как указывалось, следует брать величину $-i \frac{4\pi}{m} a_0(f, f', E)$, пропорциональную амплитуде рассеяния не на массовой поверхности.

Отклонение величины $a_0(f, f', E)$ от значения ее на массовой поверхности для конкретного вида потенциала может быть оценено из исследования членов разложения в ряд Тейлора функции $a_0(f, f', E)$ (взятой в виде (2)) в точках $f=f'=\sqrt{mE}$.

Перейдем к оценке вершинных частей диаграмм. Как видно из рис. 1, в диаграммах, отвечающих процессу $N+d \rightarrow 3N$, встречается лишь вершина распада дейтерона на нуклоны или образование дейтерона из нуклонов.

Значение $G_{d \rightarrow 2N}$, соответствующее этой вершине [1], должно определяться в общем случае $\text{Res } a_{\text{пол}}(f, E) \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}}$ вычетом полюсной части амплитуды

рассеяния $a_{\text{пол}}(f, E)$ при $E = -\frac{\alpha_d^2}{m}$; здесь $f=f'$ — относительный импульс

пары частиц, образующихся при распаде дейтерона, а $\frac{\alpha_d^2}{m}$ — энергия связи

дейтерона. При этом считается, что в дейтероне существенно лишь S -состояние пары нуклонов. Приведенное определение вершины может быть получено из следующего. Амплитуда $a_0(f, E)$, как функция относительной энергии E , может быть представлена в виде суммы полюсного члена

$\left(-i \frac{m}{4\pi}\right) \frac{G_{d \rightarrow 2N}^2}{E - E_0}$ и членов, не имеющих полюса при $E = E_0$, где $E_0 = \frac{\alpha_d^2}{m}$.

Поскольку в пределе при $E \rightarrow E_0$ амплитуда рассеяния должна определяться в основном полюсным членом, то

$$G_{d \rightarrow 2N}^2 = \lim_{E \rightarrow E_0} i \frac{4\pi}{m} a_{\text{пол}}(f, E) (E - E_0) = \frac{4\pi}{m} 2\alpha \text{Res } a_{\text{пол}}(f, E) \Big|_{E=E_0}.$$

В случае $\sqrt{mE}r_0 \ll 1$, когда амплитуда рассеяния двух частиц есть функция лишь их относительной энергии E , вершина распада или образования дейтерона есть функция лишь α_d и r_0 и может быть определена. Так как в нулевом приближении по r_0 $\text{Res } a_{\text{пол}}(E) \Big|_{E=E_0} = -1$, а в линейном приближении по r_0 $\text{Res } a_{\text{пол}}(E) \Big|_{E=E_0} = -(1 + \alpha_d r_0)$, то в этих приближениях значение для вершины распада дейтерона имеет вид соответственно:

$$g_0 = \frac{i}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d}, \quad g_1 = \frac{i}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d(1 + \alpha_d r_0)}. \quad (7)$$

В случае $\sqrt{Em} \cdot r_0 \gg 1$ значение вершины распада дейтерона может быть определено в виде

$$G_{d \rightarrow 2N} = \frac{i}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res } a_{\text{пол}}(f, E) \Big|_{E=E_0}}. \quad (8)$$

В аналитическом виде это значение может быть получено из анализа выражения (2) для $a_0(f, f', E)$ при конкретном выборе вида потенциала.

Линии распространения нуклона в нерелятивистских диаграммах соответствует функция $\frac{i}{E_{\text{кин}} - E_{\vec{p}}}$, где $E_{\text{кин}}$ есть кинетическая энергия, полученная из уравнения для закона сохранения полной энергии в вершине, а $E(\vec{p})$ — величина $\frac{p^2}{2m}$, где \vec{p} — импульс данной виртуальной линии, вычисленный из уравнения для закона сохранения импульса в вершине.

Ясно, что величина $E_{\text{кин}} - E(\vec{p})$ есть значение Δm в энергетических единицах, определяющее уход виртуальной частицы с массовой поверхностью. В нерелятивистском случае Δm очевидно пренебрежимо мало по сравнению с массой нуклона в энергетических единицах и поэтому можно все виртуальные частицы в диаграммах, описывающих ядерные превращения при малых энергиях, рассматривать как реальные.

Определив вклады всех элементов диаграмм рис. 1, можно получить значение каждой приведенной на этом рисунке диаграммы.

Обозначим вклад F_0 от графика T'_0 (см. рис. 1) в амплитуду неупругого рассеяния нуклона на дейтероне $T'(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f})$, где \vec{k}_0 — относительный импульс нуклона и дейтерона в начальном состоянии в с.ц.и. реакции, а \vec{k} — относительный импульс нуклона и пары взаимодействующих нуклонов также в с.ц.и. реакции. На этой диаграмме (см. рис. 6) имеется одна вершина распада дейтерона на нуклоны (A), линия распространения виртуального нуклона (B), который имеет полную энергию $\frac{k_0^2}{4m} - \frac{\alpha^2}{m} - \frac{k^2}{2m}$ и импульс $\vec{k}_0 - \vec{k}$, определенные из законов сохранения полной энергии и импульса в вершине A. Кроме того, в указанной диаграмме имеется блок рассеяния двух нуклонов C.

В качестве величины вклада этого блока в рассматриваемую нерелятивистскую диаграмму можно брать величину, пропорциональную амплитуде рассеяния двух свободных нуклонов, зависящую от относительной энергии E -рассеивающихся частиц и относительно импульса $f' = \left| \vec{k}_0 - \frac{\vec{k}}{2} \right|$ частиц, входящих в блок C. Следовательно, значение вклада от блока C

$$-i \frac{4\pi}{m} a(\vec{f}, \vec{f}', E). \quad (9)$$

Здесь $f = \sqrt{mE}$ — относительный импульс нуклонов, выходящих из блока C, величина которого в данном случае определяется из закона сохранения энергии реакции

$$\frac{3}{4} \frac{k_0^2}{m} - \frac{\alpha_d^2}{m} = \frac{f^2}{m} + \frac{3}{4} \frac{k^2}{m}.$$

Как указывалось, значение вклада от вершины распада дейтерона на два нуклона в данной диаграмме должно в общем случае зависеть от относительного импульса $f'' = \left| \vec{k} - \frac{\vec{k}_0}{2} \right|$ выходящих из вершины нуклонов:

$$G_{d-2N} = \frac{i}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res } a_{\text{пол}}(f'', E) \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}}}.$$

Итак, зная значение всех элементов полюсной диаграммы, можно записать вклад от нее в амплитуду рассеяния:

$$T'_0(\vec{k}_0; \vec{k}, \vec{f}) = \frac{-ik}{2\pi \left(\frac{dE_0}{dk} \right)} F_0,$$

где

$$F_0 = \frac{2i}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d a_{\text{пол}}(f'', E)} \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}} \cdot \frac{4\pi i}{m} a(\vec{f}, \vec{f}', E) \frac{im}{\left[\frac{k_0^2}{4} - \alpha_d^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]}; \quad (10)$$

Следовательно,

$$T_0(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f}) = \frac{8}{3} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res} a_{\text{пол}}(f'', E)} \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}} \frac{a(\vec{f}, \vec{f}', E)}{\left[\frac{k_0^2}{4} - \alpha_d^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]}.$$

При вычислении $T_0(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f})$ было учтено, что любой из двух нуклонов, образующихся при распаде дейтерона, может быть виртуальной частицей.

Аналогичные выражения можно получить для вклада от полюсных диаграмм (рис. 4), когда в конечном состоянии взаимодействуют частицы 2 и 3 или 3 и 1.

Вклад от квадратной диаграммы (см. рис. 7), виртуальные линии которой образуют замкнутую фигуру, определяется интегралом по кинетической энергии ε и импульсу \vec{q} одной из виртуальных частиц.

Используя полученный выше порядок определения значений для элементов, из которых складывается квадратная диаграмма, запишем вклад от нее в виде

$$T_1(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f}) = \frac{m}{3\pi} \left(\frac{4\pi}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} a(\vec{f}, \vec{f}_1) a(\vec{k}', \vec{k}'', E') \times \\ \times \left\{ \frac{1}{m} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res} a_{\text{пол}}(f_1'', E)} \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}} \left[\varepsilon - \frac{q^2}{2m} + i\tau \right]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{k_0^2}{4m} - \frac{\alpha_d^2}{m} - \varepsilon - \frac{(\vec{k}_0 - \vec{q})^2}{2m} + i\tau \right]^{-1} \cdot \left[\frac{k^2}{4m} - \varepsilon + \frac{f^2}{m} - \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} + i\pi \right]^{-1} \right\}. \quad (11)$$

Здесь множители в квадратных скобках есть вклады от линий распространения 1, 2 и 4 соответственно.

Величина $a(\vec{k}', \vec{k}'', E')$ есть амплитуда рассеяния виртуального нуклона 2 и реального нуклона 3. Эта величина определяет вклад от блока C' на рис. 7. Значение $E' = \frac{f'^2}{m}$ относительной энергии рассеивающихся частиц 2 и 3 может быть определено из уравнения

$$\frac{f'^2}{m} = \frac{3}{4} \frac{k_0^2}{m} - \frac{\alpha_d^2}{m} - \frac{q^2}{4m} - \varepsilon.$$

Величины относительных импульсов \vec{k}' и \vec{k}'' частиц, входящих в блок и выходящих из него, равны соответственно $\left| \vec{k}_0 - \frac{\vec{q}}{2} \right|$ и $\left| \vec{q} - \frac{\vec{k}}{2} \right|$.

Функция $a(\vec{f}, \vec{f}_1, E)$ есть амплитуда рассеяния двух частиц, соответствующая вкладу блока C на рис. 7. Нетрудно показать, что относительная энергия этих частиц равна величине $\frac{f^2}{m}$, а значение модуля относительно-

го импульса $|\vec{f}|$ частиц, выходящих из блока, может быть определено из уравнения

$$\frac{f^2}{m} = \frac{3}{4} \frac{k_0^2}{m} - \frac{\alpha_d^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{k^2}{m}.$$

Значение же $|\vec{f}_1|$ относительного импульса частиц, входящих в данный блок, равно $\left| \vec{q} - \frac{\vec{k}}{2} \right|$.

Исследование подынтегральной функции в (11) показало, что она, как функция переменной ϵ , имеет полюса, которые возникают за счет обращения в нуль знаменателя в выражениях, заключенных в квадратные скобки. При этом один полюс, обусловленный множителем $(\epsilon - \frac{q^2}{2m} + i\tau)^{-1}$, лежит ниже оси вещественных значений ϵ , а два других — выше этой оси. Кроме того, все подынтегральное выражение, как и функция ϵ , убывает при $\epsilon \rightarrow \infty$. Следовательно, интегрирование в (11) по переменной E сводится к вычислению вычета в точке $\epsilon = \frac{q^2}{2m}$.

Поэтому для $T_1(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f})$ получим

$$\begin{aligned} T_1(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f}) &= \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 4\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res} a_{\text{пол}}(f''_1, E)} \Big|_{E = -\frac{\alpha_d^2}{2m}} \times \\ &\times a(\vec{f}, \vec{f}_1, E) a(\vec{k}', \vec{k}'', E) \left[\frac{k_0^2}{4m} - \frac{\alpha_d^2}{m} - \frac{q^2}{2m} - \frac{(\vec{k}_0 - \vec{q})^2}{2m} \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\frac{k^2}{4m} - \frac{q^2}{2m} + \frac{f^2}{m} - \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

В этом случае E' будет определяться из уравнения

$$E' = \frac{3}{4} \frac{k_0^2}{m} - \frac{\alpha_d^2}{m} - \frac{3}{4} \frac{q^2}{m}.$$

В подынтегральной функции (12) можно выделить часть

$$\frac{8}{3} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res} a_{\text{пол}}(f''_1, E)} \Big|_{E = -\frac{\alpha_d^2}{2m}} \cdot \frac{a(\vec{k}', \vec{k}'', E')}{\left[\alpha_d^2 - \frac{k_0^2}{4} + \frac{q^2}{2} + \frac{(\vec{k}_0 - \vec{q})^2}{2} \right]},$$

которая совпадает с вкладом от полюсной диаграммы $T_0(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1)$; где входящими частицами являются дейтерон и нуклон с импульсами \vec{k}_0 и $-\vec{k}_0$, а выходящими — три нуклона, два из которых имеют относительный импульс \vec{f} и их поступательное движение характеризуется импульсом \vec{q} . Следовательно, вклад от квадратной диаграммы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_1(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f}) &= \frac{8}{3} \cdot 4\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{3}{4} T_0(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1) a'(\vec{f}, \vec{f}_1, E) \times \\ &\times \left[\frac{q^2}{2} - \frac{f^2}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегральные уравнения для амплитуд трехнуклонных взаимодействий

Ясно, что вклад от интегрального члена в графическом интегральном уравнении (см. рис. 3) может быть получен, если в подынтегральном выражении (5) вклад от полюсного графика $T'_0(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1)$ заменить точным значением амплитуды рассеяния нуклона на дейтероне $T'(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1)$

$$T'_{\text{инт}}(\vec{k}_0, \vec{k}, f) = \frac{8}{3} 4\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\frac{3}{4} T'(\vec{k}_0, \alpha_d \vec{q}, \vec{f}_1) a(\vec{f}_1, \vec{f}_1, E)}{\frac{q^2}{2} - \frac{f^2}{2} - \frac{k^2}{4} - \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2}}. \quad (14)$$

Итак, интегральное уравнение для амплитуды рассеяния нуклона на дейтероне с расщеплением дейтерона может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} T'(\vec{k}_0, \alpha_d; \vec{k}, \vec{f}) &= \frac{8}{3} \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res} a'_{\text{пол}}(f', E) \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}}} a(\vec{f}, \vec{f}', E) \times \\ &\times \left[\alpha_d^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{k_0^2}{4} + \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]^{-1} + \\ &+ 8\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} T'(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1) a(\vec{f}, \vec{f}_1) \left[\frac{q^2}{2} - \frac{f^2}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2} \right]^{-1}. \quad (15) \end{aligned}$$

Это уравнение является точным решением задачи рассеяния трех нуклонов в предположении, что существенными являются только парные силы, и зависит лишь от выбора характера этих сил, т. е. от выбора вида амплитуды рассеяния $a(\vec{f}, \vec{f}', E)$ нуклона на нуклоне.

Ясно, что в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил, когда $a(f) = -(\alpha_d + if)^{-1}$, а $\text{Res} a_{\text{пол}}(f) \Big|_{f=-i\alpha_d} = 1$ при $f = \sqrt{Em}$, уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} T'(\vec{k}_0, \alpha_d; \vec{k}, f) &= \frac{8}{3} \sqrt{8\pi\alpha_d} (\alpha_d + if)^{-1} \left[\alpha_d + \frac{k^2}{2} - \frac{k_0^2}{4} + \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]^{-1} + \\ &+ 8\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} T'(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}_1) (\alpha_d + if)^{-1} \left[\frac{q^2}{2} - \frac{f^2}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2} \right]^{-1}. \quad (16) \end{aligned}$$

Очевидно, что это уравнение совпадает с уравнением для амплитуды рассматриваемой реакции, полученным Скорняковым и Тер-Мартиросяном из уравнения Шредингера в данном приближении [4].

Поскольку в линейном приближении по r_0 для амплитуды рассеяния двух нуклонов имеется выражение

$$a(f) = \frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha_d r_0}{\alpha_d + if}; \quad \text{Res} a_{\text{пол}}(f) \Big|_{f=-i\alpha_d} = 1 + \alpha_d r_0$$

при $f = \sqrt{Em}$, то уравнение для амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтероне в линейном приближении по радиусу взаимодействия пары нуклонов имеет вид

$$T'(\vec{k}_0, \alpha_d; \vec{k}, f) = \frac{8}{3} \left[\frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha r_0}{\alpha + if} \right] \left\{ \frac{\sqrt{8\pi\alpha_d(1 + \alpha_d r_0)}}{\alpha_d^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{k_0^2}{4} - \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2}} + \right. \\ \left. + 3\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{T'(\vec{k}_0, \vec{q})}{\frac{q^2}{2} - f^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2}} \right\}; \quad (17)$$

Уравнение (17) совпадает с уравнением Данилова в [6], полученным в линейном по радиусу действия ядерных сил приближении.

Очевидно, что, определив вид $a(\vec{f}, \vec{f}', E)$ и $\text{Res } a_{\text{пол}}(f, E) \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}}$

для любого вида взаимодействия пары нуклонов, можно записать амплитуду рассеяния нуклона на дейтероне в любом предположении о характере парного взаимодействия.

Уравнение (16) записано для амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтероне в случае, когда в конечном состоянии взаимодействуют частицы 1 и 2.

Точно такие же уравнения следует написать для амплитуд $T'(\vec{k}_0, \frac{1}{2}\vec{f} - \vec{k})$ и $T'(\vec{k}_0, -\frac{1}{2}\vec{f} - \vec{k})$, когда в конечном состоянии взаимодействуют частицы 2 и 3 или 1 и 3 соответственно. Полная амплитуда рассматриваемой реакции есть сумма вида

$$(N + d \rightarrow 3N) = T'(\vec{k}_0, \vec{k}\vec{f}) + T'(N + d \rightarrow 3N) = \\ = T'(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{f}) + T'\left(\vec{k}_0, \frac{\vec{k}}{4} + \frac{\vec{f}}{2}, \frac{\vec{k}}{2} - 3\vec{f}\right) + \\ + T'\left(\vec{k}_0, \frac{\vec{k}}{4} - \frac{\vec{f}}{2}, \frac{\vec{k}}{2} + 3\vec{f}\right). \quad (18)$$

Для исследования реального взаимодействия нуклонов с дейтеронами необходимо учитывать спин и изотопспин, участвующих в реакции частиц.

Учет спина и изотопспина частиц в диаграммном методе не представляет принципиальной трудности. Метод этого учета подробно изложен в работах [2—3].

В случае упругого рассеяния нуклона на дейтероне амплитуда этого процесса будет определяться интегральным уравнением вида

$$T(\vec{k}_0, \alpha_d; \vec{k}, \alpha_d) = \frac{2}{3} \pi [8\pi\alpha_d \text{Res } a_{\text{пол}}(f', E) \Big|_{E=-\frac{\alpha_d^2}{m}}] \times \\ \times \left[\alpha_d^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{k_0^2}{4} + \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]^{-1} + \\ + 3\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} T'(\vec{k}_0, \vec{q}, f_1) \left[\alpha_d^2 + \frac{q^2}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2} \right]^{-1} \times \\ \times \sqrt{8\pi\alpha_d \text{Res } a_{\text{пол}}(f_1', E) \Big|_{E=E_0}}, \quad (19)$$

где

$$E_0 = -\frac{\alpha_d^2}{m} \text{ и } |\vec{k}_0| = |\vec{k}|, f_1' = \left| \frac{\vec{k}_0}{2} + \vec{k} \right| \text{ и } f_1 = \left| \frac{\vec{k}}{2} + \vec{q} \right|.$$

В случае рассеяния трех свободных нуклонов, когда в начальном состоянии пара нуклонов характеризуется относительным импульсом \vec{f}_0 , а относительный импульс третьего нуклона и выделенной пары есть \vec{k} , уравнение для амплитуды данной реакции имеет вид

$$T''(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{k}, \vec{f}) = \frac{2}{3} \pi \left\{ a(\vec{f}_0, \vec{f}', E_0) a(\vec{f}, \vec{f}'', E) \left[-f^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{k_0^2}{4} + \frac{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2}{2} \right]^{-1} + \right. \\ \left. + 3\pi \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} T''(\vec{k}_0, \vec{q}, \vec{f}') a(\vec{f}, \vec{f}'', E) \left[\frac{q^2}{2} - f^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{(\vec{k} - \vec{q})^2}{2} \right]^{-1} \right\}, \quad (20)$$

где

$$f'' = \left| \vec{k}_0 + \frac{\vec{k}}{2} \right|.$$

Полученные точные интегральные уравнения (15, 19 и 20) для амплитуды взаимодействия трех нуклонов справедливы для описания любой реакции взаимодействия трех частиц. Так, они могут быть использованы для решения задачи по рассеянию дейтронов малых энергий на сильно связанных ядрах, например, ядрах He^4 .

Следует отметить, что в случае реакции взаимодействия трех свободных различных частиц амплитуды $T''_{12}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{k}, \vec{f}, \omega)$,

$$T''_{23}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; -\frac{\vec{k}}{2} - \vec{f}, \frac{3}{4}\vec{k} + \frac{\vec{f}}{2})$$

и

$$T''_{31}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; -\frac{\vec{k}}{2} - \vec{f}, \frac{3}{4}\vec{k} + \frac{\vec{f}}{2}),$$

соответствующие взаимодействию частиц (1,2), (2,3) и (3,1) в конечном состоянии, будут определяться из трех зацепляющихся уравнений. Если считать, что массы всех частиц одинаковы, то эти уравнения имеют вид

$$T''_{12}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{k}, \vec{f}, \omega) = \frac{\pi}{3} \{ a_{31}(\vec{f}_0, \vec{f}', E_0) a_{12}(\vec{f}, \vec{f}'', E) + \\ + a_{32}(\vec{f}_0, \vec{f}', E_0) a_{12}(\vec{f}, \vec{f}'', E) \} \left[-f_0^2 + \left(\frac{\vec{k}_0}{2} + \vec{k} \right)^2 \right]^{-1} + \\ + \frac{3\pi}{2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \{ T''_{23}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}, \vec{f}', \omega) + T''_{31}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}, \vec{f}', \omega) \} \times \\ \times a_{12}(\vec{f}_1, \vec{f}, E) \left[-f^2 + \left(\frac{\vec{k}}{2} + \vec{q} \right)^2 \right]^{-1}; \\ T''_{23}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{f}_1, \vec{k}_1, \omega) = \frac{\pi}{3} \{ a_{12}(\vec{f}_0, \vec{f}_2, E_0) a_{23}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, E_1) + \\ + a_{13}(\vec{f}_0, \vec{f}_2, E_0) a_{23}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, E_1) \} \left[-f_0^2 + \left(\frac{\vec{k}_0}{2} - \vec{k}_1 \right)^2 \right]^{-1} + \\ + \frac{3\pi}{2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} a_{23}(\vec{f}_4, \vec{f}_1, E_1) \{ T''_{12}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}, \vec{k}'', \omega) + \\ + T''_{31}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}, \vec{k}'', \omega) \} \left[-f_1^2 + \left(\frac{\vec{k}_2}{2} + \vec{q} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$\begin{aligned}
T_{31}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{f}_2, \vec{k}_2, \omega) &= \frac{\pi}{3} \{a_{12}(\vec{f}_0; \vec{f}_3, E_0) a_{31}(\vec{f}_2; \vec{f}_3, E_2) + \\
&+ a_{23}(\vec{f}_0; \vec{f}_3, E_0) a_{31}(\vec{f}_2; \vec{f}_3, E_2)\} \left[-f_0^2 + \left(\frac{\vec{k}_0}{2} + \vec{k}_2 \right)^2 \right]^{-1} + \\
&+ \frac{3\pi}{2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} a_{31}(\vec{f}_5, \vec{f}_2, E_2) \{T_{12}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}_1, \vec{k}_2, \omega) + \\
&+ T_{32}(\vec{k}_0, \vec{f}_0; \vec{q}, \vec{k}_2, \omega)\} \left[-f_2^2 + \left(\frac{\vec{k}_2}{2} + \vec{q} \right)^2 \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\vec{f}_2'' &= -\frac{\vec{k}_0}{2} + \frac{\vec{k}}{2} + \vec{f}, & \vec{k}_{12} &= -\frac{\vec{q}}{2} + \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{f}, \\
\vec{f}_2''' &= -\frac{\vec{k}_0}{2} + \frac{\vec{k}}{2} - \vec{f}, & \vec{f}_{4,5} &= \frac{\vec{q}}{2} + \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{f}, \\
\vec{f}_{2,3}' &= \frac{\vec{k}_0}{2} + \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{f}, & \vec{k}_{1,2} &= -\frac{1}{2} \vec{k} \pm \vec{f}, \\
\vec{f}_{1,2} &= -\frac{3}{4} \vec{k} \pm \vec{f}.
\end{aligned}$$

Функции типа $a_{ij}(\vec{p}, \vec{p})$ являются функциями Грина пары взаимодействующих частиц i и j .

Если интересоваться энергиями, значительно превышающими энергию связи нуклонов в дейтроне ($k_0 \gg \alpha$), то в области $f \sim \alpha$ может быть найдено простое выражение для амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтроне, — $T(d+N \rightarrow 3N)$. Оно является суммой амплитуды, записанной в импульсном приближении, и членов, отвечающих известному эффекту Глаубера экранирования одного нуклона другим:

$$T(d+N \rightarrow 3N) = A_{\text{имп}}(d+N \rightarrow 3N) + a(f) G_0(k_0, \vartheta).$$

Такое решение задачи может быть получено на основе анализа вкладов от бесконечного ряда диаграмм, отвечающих рассматриваемой реакции.

Вклады от полюсной и квадратной диаграмм, соответствующих взаимодействию двух частиц с малым относительным импульсом F , а также вклады от полюсных диаграмм, отвечающих взаимодействию пары частиц с импульсами $3/4\vec{k} + \vec{f}$, могут быть вычислены в явном виде и сумма этих вкладов $A_{\text{имп}}(d+N \rightarrow 3N)$ в точности соответствует амплитуде неупругого рассеяния нуклона на дейтроне, рассчитанной в импульсном приближении:

$$\begin{aligned}
A_{\text{имп}}(d+N \rightarrow 3N) &= a(f) \left[-\frac{8}{3} \sqrt{8\pi\alpha} (1 + \alpha r_0) \left\{ \alpha^2 + \left(\frac{\vec{k}_0}{2} + \vec{k} \right)^2 \right\}^{-1} + \right. \\
&+ \left[\frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha r_0}{\alpha + i \frac{3}{4} k_0} \right] \frac{1}{2iq} \ln \frac{\alpha - i(f - q)}{\alpha - i(f + q)} + \frac{1}{a(f)} \left[\frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha r_0}{\alpha + i \frac{3}{4} k_0} \right] \times \\
&\times \left. \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\vec{q} - \vec{f})^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\vec{q} + \vec{f})^2} \right] \right\}, \quad (22)
\end{aligned}$$

где $a(f) = \left[\frac{r_0}{2} - \frac{1 + \alpha r_0}{\alpha + if} \right]$ — амплитуда взаимодействия двух нуклонов с малым импульсом \bar{f} .

Сумму вкладов $F(k_0, \vartheta, f)$ от остальных диаграмм, являющуюся поправкой к амплитуде $A_{\text{имп}}(N+d \rightarrow 3N)$ в импульсном приближении, целесообразно записать:

$$F(k_0, \vartheta, f) = a(f) G(k_0, \vartheta, f);$$

здесь ϑ — угол рассеяния, угол между векторами \bar{k}_0 и \bar{k} .

Поскольку функция $\frac{F(k_0, \vartheta, f)}{a(f)}$ является вьюлой функцией f , то величину $G(k_0, \vartheta, f)$, как показано в работе [6], оказалось возможным представить в виде следующего ряда по степеням $\left(\frac{f}{k_0}\right)$:

$$G(k_0, \vartheta, f) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\vartheta, k_0) \left(\frac{f}{k_0}\right)^n. \quad (23)$$

Если при $f \rightarrow 0$ из полной амплитуды неупругого рассеяния выделить величину $a(f)$, содержащую в этой области все особенности функции амплитуды по переменной f , то оставшаяся часть указанной амплитуды не должна содержать членов, пропорциональных нечетной степени f . Величина, стоящая в фигурных скобках в выражении (22) для амплитуды в импульсном приближении, не содержит членов, пропорциональных нечетной степени f , значит и функция $G(k_0, \vartheta, f)$ также не должна содержать таких членов.

Следовательно, поправка к амплитуде в импульсном приближении должна иметь вид

$$F(k_0, \vartheta, f) = a(f) \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(k_0, \vartheta) \left(\frac{f}{k_0}\right)^{2n}.$$

Здесь коэффициенты разложения $C_{2n}(k_0, \vartheta)$ являются функциями начальной энергии и угла между векторами \bar{k}_0 и \bar{k} . Для их определения нами были получены простые интегральные уравнения.

В случае $\frac{f}{k_0} \ll 1$ поправкой к импульсному приближению является функция $a(f) C_0(k_0, \vartheta)$. Поскольку $a(f)$ известная функция, то ясно, что поправка к амплитуде рассеяния, рассчитанной в импульсном приближении, квадрат которой определяет дифференциальное сечение $\frac{d\sigma}{dEd\Omega}$, является постоянной, которую можно получить из исследования экспериментально полученных энергетических распределений нуклонов, вылетающих под заданным углом из реакции $N+d \rightarrow 3N$.

Проведенные нами исследования экспериментальных спектров продуктов $N+d \rightarrow 3N$ реакции показали, что под малыми углами вплоть до 20° в с.д.м. и при небольших энергиях поправка $C_0(k_0, \vartheta)$ к импульсному приближению является чисто мнимой величиной и составляет примерно 30—40% от величины мнимой части амплитуды неупругого рассеяния нуклона на дейтероне.

С увеличением угла и начальной энергии эта поправка растет. Это говорит о том, что угловое распределение продуктов такой реакции, особенно под большими углами, невозможно описывать на основе им-

пульсного приближения (т. е. без учета поправки вида $C_0(k_0, \theta)$), не только количественно, но и качественно.

Итак, на примере реакции неупругого рассеяния нуклона на дейтероне был иллюстрирован метод получения уравнения для амплитуды этой реакции суммированием бесконечного ряда нерелятивистских диаграмм теории возмущений.

Этот метод может быть также применен для получения амплитуды взаимодействия четырех, пяти и более нуклонов в нерелятивистском случае [5], а также для получения амплитуд реакций с переходом нескольких нуклонов при малых энергиях [5].

В заключение авторы выражают благодарность К. А. Тер-Мартirosяну за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комаров В. В., Попова А. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 18, 1963.
2. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, 45, 214, 1963.
3. Комаров В. В., Попова А. М. Nucl. Phys. (в печати).
4. Скорняков Г. В., Тер-Мартirosян К. А. ЖЭТФ, 31, 775, 1956.
5. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ (в печати).
6. Данилов Г. С. ЖЭТФ, 42, 1449, 1962.

Поступила в редакцию
27.11 1963 г.

НИИЯФ