Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1964

Д. П. КОСТОМАРОВ

О ДРЕЙФОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПОПЕРЕК ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается обыкновенная волна, распространяющаяся в неоднородной плазме поперек внешнего магнитного поля. Исследуются дрейфовые колебания. Показывается, что эти колебания могут быть неустойчивыми. С помощью теории возмущений вычисляются инкременты.

В ряде работ [1—4] отмечалось, что учет неоднородности магнитного поля, вызванной токами в самой плазме, имеет существенное значение при рассмотрении вопросов устойчивости. Дрейф частиц, обусловленный неоднородностью магнитного поля (для краткости будем называть магнитным дрейфом), может привести как к появлению новых типов неустойчивости, так и к изменению областей неустойчивости уже известных типов.

В настоящей работе изучаются дрейфовые колебания, распространяющиеся в неоднородной плазме поперек внешнего магнитного поля. Рассматривается волна, в которой электрический вектор поляризован вдоль внешнего магнитного поля (обыкновенная волна). Показывается, что эти колебания могут быть неустойчивыми. С помощью теории возмущений вычисляются инкременты.

§ 1. Исходное уравнение

Обыкновенная волна, распространяющаяся в неоднородной плазме поперек внешнего магнитного поля $H=(0, 0, H(x))$, описывается уравнением

$$E'' - k^2E + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} E = 0. \tag{1}$$

Здесь $E=E_z(x)$, $\varepsilon=\varepsilon_{zz}$ — компонент тензора диэлектрической проницаемости. Плазма предполагается неоднородной в направлении оси x, зависимость от y и t выбрана в виде $e^{i(ky-\omega t)}$. Для определения возможного спектра колебаний и выяснения вопроса об устойчивости плазмы по отношению к возмущениям рассматриваемого типа нужно найти такие значения ω, при которых уравнение (1) имеет нетривиальные решения, ограниченные на бесконечности:

$$|E(-\infty)| < \infty, \quad |E(+\infty)| < \infty. \tag{2}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда ларморовские радиусы электронов r_e и ионов r_i много меньше длины волны в направлении оси x, и не будем учитывать пространственной дисперсии в этом направлении. Кроме того, мы предположим, что ларморовские радиусы много меньше масштаба неоднородности плазмы. Наконец, мы будем изучать дрейфовые колебания, которые являются низкочастотными колебаниями: $|\omega| \ll \omega_i$, ω_i ларморовская частота ионов. При сделанных предположениях имеем

$$\varepsilon = 1 - \sum_j \frac{\omega_{0j}^2}{\omega} \int_0^\infty \left(1 - \frac{kv_{1j} - \frac{T_{\parallel j}}{T_{\perp j}} kv_{2j} s^2 + \frac{T'_{\perp j} T_{\parallel j} k}{T_{\perp j} m_j \omega_j} (s^2 - 1)}{\omega - kv_{2j} s^2} \right) \times$$
$$\times e^{-s^2} J_0^2 \left(\sqrt{p_j}\, s \right) 2s\, ds. \tag{3}$$

Здесь N — плотность плазмы, $T_{\perp j}$ и $T_{\parallel j}$ — поперечная и продольная температуры, ω_{0j} и ω_j — плазменная и ларморовская частоты,

$$v_{1j} = \frac{(T_{\parallel j} N)'}{m_j \omega_j N}, \quad v_{2j} = \frac{T_{\perp j} H'}{m_j \omega_j H}, \quad p_j = \frac{2T_{\perp j} k^2}{m_j \omega_j^2} = (r_j k)^2.$$

В дальнейшем будем считать, что $p_e \ll 1$ и, следовательно, $J_0^2 \left(\sqrt{p_e}\, s \right) \approx 1$. Суммирование идет по сортам частиц: $j = i,\ e$.

Выражение (3) получено с помощью решения линеаризированного уравнения А. А. Власова для электронов и ионов. За невозмущенные функции распределения выбирались максвелловские функции с поперечной и продольной температурой и плотностью, зависящими от x. При вещественных значениях ω интеграл (3) нужно рассматривать как предельное значение интеграла при комплексном значении ω с положительной мнимой частью $Im\omega > 0$, когда $Im\omega \to 0$.

Полное давление, равное сумме давления плазмы и магнитного поля, есть величина постоянная:

$$N(T_{\perp e} + T_{\perp i}) + \frac{1}{8\pi} H^2 = p.$$

Пусть

$$\tau_\perp = \frac{T_{\perp i}}{T_{\perp e}} = \text{const}, \quad \tau_\parallel = \frac{T_{\parallel i}}{T_{\parallel e}} = \text{const},$$

тогда

$$\frac{v_{2j}}{v_{1j}} = \frac{\beta}{2} \frac{(T_{\perp j} N)'}{(T_{\parallel j} N)'}, \quad \beta = \frac{8\pi N (T_{\perp e} + T_{\perp i})}{H^2}. \tag{4}$$

Будем считать β малым: $1 \gg \beta$. В этом случае зависимостью магнитного поля от x можно пренебречь всюду, кроме членов с v_{2e} и v_{2i}, которые учитывают влияние магнитного дрейфа на распространение волны.

§ 2. Исследование устойчивости дрейфовых колебаний

Рассмотрим уравнение

$$E'' - \left(k^2 + \frac{\omega_{0e}^2}{c^2}\right)E + \frac{kv_{1e}\,\omega_{0e}^2}{\omega c^2}\,E = 0, \tag{5}$$

которое описывает дрейфовые колебания без учета магнитного дрейфа. Оно получается из (1), если в выражении для $\mathscr{E}$ (3) опустить ионный член и единицу, а в электронном члене положить $v_{2e} = 0$. Будем считать, что $(T_{\parallel j} N)' < 0$, т. е. $v_{1e} > 0$, $v_{1i} < 0$. В этом случае задача (5), (2) представляет собой классическую задачу Штурма — Лиувилля относительно параметра $\frac{1}{\omega}$. Она имеет бесконечную последовательность собственных значений $\omega_m (|\omega_1| > |\omega_2| > \ldots \lim\limits_{m\to\infty} \omega_m = 0)$, причем в силу неравенства $v_{1e} > 0$ знак ω_m должен совпадать со знаком k. В дальнейшем будем считать k, а следовательно, и ω_m положительными. Случай отрицательных значений k и ω_m исследуется аналогично и приводит к тем же результатам.

Рассмотрим наибольшую собственную частоту задачи (5), (2) ω_1. Для нее справедлива оценка

$$\omega_1 < \max\left(\frac{\omega_{0e}^2\, kc}{\omega_{0e}^2 + k^2c^2}\quad \frac{v_{1e}}{c}\right),$$

так что $\frac{\omega_1}{\omega_{0e}} \sim \frac{v_{1e}}{c}$, $\frac{\omega_1}{\omega_i} \sim \frac{\omega_{0e} v_{1e}}{\omega_i c}$. Мы видим, что собственные частоты задачи (5), (2) много меньше плазменной частоты электронов и в широком диапазоне изменения плотности плазмы и напряженности внешнего магнитного поля много меньше ларморовской частоты ионов.

Члены уравнения (1), не вошедшие в (5), малы: ионный член имеет по сравнению с электронным порядок $\frac{m_e}{m_i}$, а член $\frac{\omega^2}{c^2}$ по сравнению с $\frac{\omega_{0e}^2}{c^2}$ — порядок $\frac{v_{1e}^2}{c^2}$, наконец, пренебрежение магнитным дрейфом вносит погрешность порядка β. Поэтому спектр задачи (1), (2) в интересующей нас области значений должен мало отличаться от спектра задачи (5), (2) и для его определения можно воспользоваться теорией возмущений $\omega \approx \omega_m + \Delta\omega_m$, где

$$\Delta\omega_m = \frac{\omega_m}{\|E_m\|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\omega_m^2 + f_e(x) + f_i(x))\, E_m^2(x)\, dx. \tag{6}$$

Здесь

$$f_l(x) = \omega_{0l}^2 \left(\int\limits_0^\infty \frac{kv_{1e} - \frac{T_{\parallel e}}{T_{\perp e}} kv_{2l} s^2 + \frac{T'_{\perp e} T_{\parallel e} k}{T_{\perp e} m_e \omega_e} (s^2 - 1)}{\omega_m - kv_{2e} s^2} \times e^{-s^2} 2s\, ds - \frac{kv_{1e}}{\omega_m} \right), \tag{7}$$

$$f_i(x) = \omega_{0i}^2 \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{kv_{1i} - \frac{T_{\parallel i}}{T_{\perp i}} kv_{2i}s^2 + \frac{T'_{\perp i} T_{\parallel i} k}{T_{\perp i} m_i \omega_i}(s^2 - 1)}{\omega_m - kv_{2i}s^2} - 1 \right) e^{-s^2} J_0^2\left(\sqrt{p_i}\, s\right) 2s\, ds, \tag{8}$$

$Em(x)$ — собственная функция задачи (5), (2), $\|E_m\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{kv_{1e}}{\omega_m} \omega_{0e}^2 E_m^2\, dx$ — квадрат ее нормы.

Нас будет интересовать в первую очередь мнимая часть поправки (6) $\nu_m = I^m \Delta\omega_m$, определяющая мнимую часть собственной частоты задачи (1), (2). При ее вычислении мы рассмотрим два случая $(T_{\perp j} N)' < 0$ и $(T_{\perp j} N)' > 0$.

Пусть $(T_{\perp j} N)' < 0$, т. е. знак производных $(T_{\parallel j} N)'$ и $(T_{\perp j} N)'$ совпадают. Тогда, согласно (4), знаки v_{1j} и v_{2j} противоположны. В этом случае вклад в мнимую часть дает только ионный член (8), у которого знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль. При интегрировании по s эту особую точку нужно обходить снизу, в результате получим

$$\nu_m = \frac{\pi\omega_m}{\|E_m\|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\omega_m T_{\parallel i}}{kv_{2i} T_{\perp i}} \left(\frac{2T'_{\perp i} N}{\beta (T_{\perp i} N)'} + 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\beta} \left(\frac{T_{\parallel i} N}{T_{\perp i}} \right)' \frac{T_{\perp i}}{(T_{\perp i} N)'} \right] e^{-\frac{\omega_m}{kv_{2i}}} J_0^2 \left(\sqrt{\frac{p_i \omega_m}{kv_{2i}}} \right) \omega_{0i}^2 E_m^2\, dx. \tag{9}$$

Предположим, что температура ионов значительно превышает температуру электронов, так что $\frac{\omega_m}{kv_{2i}}$ мало $\left(\frac{\omega_m}{kv_{2i}} \sim \frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp i}} \right)$. Тогда, заменяя экспоненту и функцию Бесселя единицей и пренебрегая в квадратных скобках первым членом, по порядку величины получим $|\nu_m| \sim \omega_m \frac{m_e T_{\parallel i}}{\beta m_i T_{\perp i}}$.

При этом знак ν_m определяется знаком производной $\left(\frac{T_{\parallel i} N}{T_{\perp i}} \right)'$. Если производная отрицательна, то $\nu_m > 0$, т. е. колебания раскачиваются. В противном случае $\nu_m < 0$ колебания затухают. С увеличением отношения $\frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp i}}$ величина $|\nu_m|$ быстро убывает. При $\frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp i}} \gg 1$ главным членом в квадратных скобках является первый член. В этом случае ν_m оказывается пропорциональным экспоненциально малому множителю порядка $\exp\left(-\frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp i}} \right)$, знак ν_m в силу неравенства $(T_{\perp i} N)' < 0$ противоположен знаку производной $T'_{\perp i}$.

Предположим, что $(T_{\perp j} N)' > 0$, таким образом знаки производных $(T_{\parallel j} N)'$ и $(T_{\perp j} N)'$ различны, а, следовательно, знаки v_{1j} и v_{2j} совпадают. В этом случае вклад в мнимую часть поправки (6) дает только электронный член (7)

$$\nu_m = \frac{\pi\omega_m}{\|E_m\|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\omega_m T_{\parallel e}}{kv_{2e} T_{\perp e}} \left(\frac{2T'_{\perp e} N}{T_{\perp e}} \right)' \frac{T_{\perp e}}{(T_{\perp e} N)'} \right] e^{-\frac{\omega_m}{kv_{2e}}} \omega_{0e}^2 E_m^2\, dx. \tag{10}$$

Поскольку поперечная и продольная температуры электронов обычно сравнимы, то отношение $\frac{\omega_m}{kv_{Te}} \sim \frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp e}}$, в силу малости β велико. Главным членом в квадратных скобках является первый член. В данном случае будет происходить раскачка или затухание колебаний (знак ν_m совпадает со знаком производной $T'_{\perp e}$) с инкрементами (или декрементами), пропорциональными экспоненциально малому множителю порядка $\exp\left(-\frac{T_{\parallel e}}{\beta T_{\perp e}}\right)$.

§ 3. Примеры

Мы рассмотрим два примера, которые позволяют получить более полную количественную картину изучаемого явления.

Рассмотрим случай, когда $N(x) = N_1 - N_2\, th\, \frac{x}{x_0}$ $(0 < N_2 < N_1)$, а температуры частиц от x не зависят. Уравнение (5) в данном случае заменой переменных

$$\eta = (1 + e^{\frac{2x}{x_0}})^{-1}, \quad E = \eta^{\sigma_1}(1-\eta)^{\sigma_2} y,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{s_1^2 + s^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sqrt{s_2^2 + s^2}, \quad s = kx_0,$$

$s_1 = \frac{\omega_1 x_0}{c}$, $s_2 = \frac{\omega_2 x_0}{c}$, ω_1 и ω_2 — плазменные частоты электронов с плотностью $N_1 - N_2$ и $N_1 + N_2$ сводится к гипергеометрическому уравнению на сегменте [0,1]. Поэтому собственные частоты и собственные функции вспомогательной задачи (5), (2) легко могут быть найдены. Они определяются формулами

$$\omega_m = \frac{T_{\parallel e}k}{m_e(\omega_e)x_0}\psi_m, \quad \psi_m = \frac{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

$$E_m = \eta^{\sigma_1}(1-\eta)^{\sigma_2} F(\alpha_m, -m, \gamma, \eta) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь

$\alpha_m = 1 + m + 2\sigma_1 + 2\sigma_2$, $\gamma = 1 + 2\sigma_1$, $F(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$ — гипергеометрическая функция, которая при $\beta = -m$ является полиномом.

В рассматриваемом случае знаки производных $(T_{\parallel i}N)'$ и $(T_{\perp i}N)'$ совпадают, следовательно, мнимая часть поправки ν_m определяется только ионным членом. В результате согласно формуле (10) получаем

$$\nu_m = \frac{m_e T_{\parallel i}}{\beta_0 m_i T_{\perp i}} \frac{\pi \psi_m I_{2,m}}{2 I_{1,m}}, \tag{11}$$

где

$$I_{1,m} = \int_0^1 E_m^2(\eta)\, d\eta, \tag{12}$$

$$I_{2,m} = \int_0^1 \left(1 + \frac{\psi_m T_{\parallel e}}{4T_{\perp i}} \frac{\frac{N_1}{N_2} - 1 + 2\eta}{\eta(1-\eta)} e^{-z_m} J_0^2\left(\sqrt{p_i z_m}\right) \times \right.$$

$$\left. \times E_m^2(\eta) \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)}\right), \qquad (13)$$

$$\beta_0 = \frac{8\pi N_2 (T_{\perp e} + T_{\perp i})}{H^2}, \quad z_m = \frac{\omega_m}{kv_{2i}} = \frac{\psi_m T_{\parallel e}}{2\beta_0 T_{\perp i}} \frac{1}{\eta(1-\eta)},$$

Интеграл (12) может быть выражен через бета-функцию, в частности при $m=0$ будем иметь $I_{1,0}=B\ (2\sigma_1+1,\ 2\sigma_2+1)$. Интеграл (13) в явном виде не берется, однако в ряде предельных случаев он может быть вычислен приближенно.

Пусть ионная температура значительно превышает электронную, так что $\frac{T_{\parallel e}}{\beta_0 T_{\perp i}} \ll 1$, $\frac{T_{\parallel e} N_1}{T_{\perp i} N_2} \ll 1$, тогда $I_{2,m} \approx \int\limits_0^1 E_m^2(\eta) \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)}$ в частности $I_{2,0} = B(2\sigma_1, 2\sigma_2)$. Рассмотрим мнимую часть поправки к максимальной собственной частоте $\omega_0 (m=0)$. Согласно приведенным значениям интегралов $I_{1,0}$ и $I_{2,0}$ получим

$$\nu_0 = \omega_0 \frac{m_e T_{\parallel i}}{\beta_0 m_i T_{\perp i}} \varphi_1(s), \quad \varphi_1(s) = \pi \frac{s_2^2 - s_1^2}{\sqrt{s_1^2 + s^2}\sqrt{s_2^2 + s^2}} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{s_1^2 + s^2} + \sqrt{s_2^2 + s^2} + 1}{\sqrt{s_1^2 + s^2} + \sqrt{s_2^2 + s^2} + 2}. \qquad (14)$$

Функция $\varphi_1(s)$, характеризующая зависимость инкремента от длины волны, является убывающей функцией $s = kx_0$. При $s = 0$

$$\varphi_1 = \alpha\pi \frac{N_2}{\sqrt{N_1^2 - N_2^2}} (1 < \alpha < 2), \text{ при } s \to \infty \ \varphi_1 \to 0.$$

Предположим, что $\frac{T_{\parallel e}}{\beta_0 T_{\perp i}} \gg 1$, тогда интеграл (13) можно вычислить по методу перевала $\left(\text{перевальная точка } \eta = \frac{1}{2}\right)$. При $m = 0$ это приводит к следующему выражению для ν_0:

$$\nu_0 = \omega_0 \frac{m_l T_{\parallel e}}{m_i \sqrt{\beta_0 T_{\perp i} T_{\parallel l}}} e^{-\frac{2\psi_0 T_{\parallel e}}{\beta_0 T_{\perp i}}} J_0^2\left(\sqrt{\frac{2\psi_0 T_{\parallel e} p_i}{\beta_0 T_{\perp i}}}\right) \varphi_2(s), \qquad (15)$$

где

$$\varphi_2(s) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\, 2^{-\left(2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\psi_0}}{B(2\sigma_1 + 1,\ 2\sigma_2 + 1)} \left(1 + \psi_0 \frac{N_1 T_{\parallel e}}{N_2 T_{\perp e}}\right).$$

Инкременты в этом случае много меньше, чем в предыдущем (14).

Пусть $T_{\parallel e} = T_1 - T_2 th \frac{x}{x_0}$, $T_{\perp e} = T_3 + T_4 th \frac{x}{x_0}$, $T_{\parallel i} = \tau_{\parallel} T_{\parallel e}$, $T_{\perp i} = \tau_{\perp} T_{\perp e}$ ($\tau_{\parallel} = \text{const}$, $\tau_{\perp} = \text{const}$, $0 < T_2 < T_1$, $0 < T_4 < T_3$), а плотность плазмы

N от x не зависит. Собственные частоты и собственные функции вспомогательной задачи (5), (2) в данном случае определяются формулами

$$\omega_m = \frac{T_2 k}{m_e |\omega_e| x_0} \psi_m, \quad \psi_m = \frac{s_0^2}{\left(2\sigma + m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

$$E_m = \eta^\sigma (1-\eta)^\sigma F(\alpha_m, -m, \gamma, \eta) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{s_0^2 + s^2}, \quad s_0 = \frac{\omega_{0e} x_0}{c}, \quad s = k x_0,$$

$$\alpha_m = 1 + m + 4\sigma, \quad \gamma = 1 + 2\sigma.$$

В рассматриваемом примере, в отличие от предыдущего, знаки производных $(T_{\parallel i} N)'$ и $(T_{\perp i} N)'$ различны. Следовательно, мнимая часть поправки определяется электронным членом (10)

$$\nu_m = \omega_m = \frac{\pi \psi_m I_{2,m}}{4 I_{1,m}}, \tag{16}$$

где $\beta = \frac{8\pi N (T_{\perp e}(0) + T_{\perp i}(0))}{H^2}$ — среднее значение β, $I_{1,m}$ — интеграл (12), а $I_{2,m}$ — интеграл типа (13), выражение для которого вытекает из формулы (10). В показателе экспоненты у подынтегральной функции интеграла $I_{2,m}$ стоит большой параметр $\frac{1}{\beta_0}$, поэтому интеграл можно вычислить по методу перевала. Приведем выражение для мнимой части поправки ν_0, соответствующей максимальной собственной частоте ω_0 $(m = 0)$; оно имеет вид

$$\nu_0 = \omega_0 \frac{T_1}{\beta_0 T_3} \sqrt{\frac{T_2}{\beta_0 T_4}}\, e^{-\frac{2\psi_0 T_2}{\beta_0 T_4}} \varphi(s),$$

$$\varphi(s) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\, 2^{-4\sigma + \frac{1}{2}}\, \psi_0^{\frac{3}{2}}}{B(2\sigma + 1, 2\sigma + 1)}. \tag{17}$$

Магнитный дрейф электронов вызывает в данном случае неустойчивость колебаний с экспоненциально малыми относительно параметра $\frac{1}{\beta_0}$ инкрементами.

Автор выражает глубокую признательность Ю. Н. Днестровскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Phys. of Fluids., **5**, No. 11, 1435, 1962.
2. Krall N. A., Rosenbluth M. N. Phys. of Fluids., **6**, No. 2, 254, 1963.
3. Михайловский А. Б., Рудаков Л. И. ЖЭТФ, **44**, вып. 3, 912, 1963.
4. Костомаров Д. П. ЖТФ, **34**, вып. 10, 1835, 1964.

Поступила в редакцию
25. 12 1963 г.

Кафедра
математики