Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1964

В. Д. КУКИН

О КВАЗИОПТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ С ФИКСИРОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ (II)

Квазиоптический метод в квантовой теории поля применяется к симметричной псевдоскалярной мезонной теории с фиксированным источником (нуклоном). Получено выражение для потенциала взаимодействия мезона с нуклоном с точностью до членов шестого порядка включительно при разложении по ренормированной константе связи мезонного поля с нуклоном. Результаты согласуются с известными численными решениями уравнений Чу — Лоу для этой теории.

В предыдущей статье [1] мы применили квазиоптический метод к заряженной скалярной и симметричной скалярной мезонным теориям с фиксированным источником. В данной работе мы применим этот метод к симметричной псевдоскалярной мезонной теории с фиксированным источником (нуклоном), которая является наиболее интересной физически из всех мезонных теорий с фиксированным источником, так как хорошо описывает опытные данные по рассеянию π-мезонов на нуклонах в области малых энергий. В § 1 потенциал взаимодействия мезона с фиксированным нуклоном восстанавливается по амплитуде рассеяния мезона на нуклоне. При этом, так же, как и в [1], мы использовали для нахождения амплитуды рассеяния соответствующие уравнения Чу—Лоу [2]. Эти уравнения наиболее удобны в рассматриваемом квазиоптическом методе, так как они содержат в явной и компактной форме условия унитарности и перекрестной симметрии и, кроме того, в них входит только ренормированная константа связи мезонного поля с нуклоном f. Получено выражение для потенциала взаимодействия мезона с нуклоном с точностью до членов порядка f^6 включительно. В § 2 полученное представление для амплитуды рассеяния сравнивается с результатами численного решения уравнений Чу—Лоу для этой теории [4].

§ 1. Симметричная псевдоскалярная теория

В симметричной псевдоскалярной мезонной теории гамильтониан взаимодействия фиксированного источника (нуклона) с мезонным полем имеет в импульсном представлении вид

$$H' = f_0 (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{u(p)}{\sqrt{2\omega_p}} i(\vec{\sigma}\vec{p}) \left\{ \sum_{\rho} \tau_{\rho} (b_{\vec{p}\rho} - b^{+}_{\vec{p}\rho}) \right\} d\vec{p}.$$

Здесь f_0 — неренормированная, рационализованная константа связи; $u(p)$ — форм-фактор нуклона («обрезание» по импульсам); $\omega_p = +\sqrt{p^2+\mu^2}$ — энергия мезона; $\rho = 1, 2, 3$ — изотопический индекс («сорт») мезона; $b_{\vec{p}\rho}$ $(b^+_{\vec{p}\rho})$ — операторы уничтожения (рождения) мезона сорта ρ с импульсом p. Операторы τ_ρ и σ — обычные матрицы Паули для изоспина $1/2$ и спина $1/2$, которые действуют соответственно на зарядовую и спиновую переменные нуклона.

Уравнения Чу—Лоу для рассеяния мезона на нуклоне в данной теории хорошо известны [2]. Мы запишем эти уравнения в одномезонном приближении с учетом вкладов порядка f^6 от неупругих (двухмезонных) каналов в следующем виде:

$$G_\alpha(z) = f^2 \frac{a_\alpha}{z} + \frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty \varphi(\nu)\left\{\frac{|G_\alpha(\nu)|^2}{\nu - z} + \sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{|G_\beta(\nu)|^2}{\nu + z}\right\}d\nu +$$

$$+ f^6 \int_{2\mu}^\infty \left\{\frac{r_\alpha(\nu)}{\nu - z} + \sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{r_\beta(\nu)}{\nu + z}\right\}d\nu. \qquad (1)$$

Здесь f — ренормированная, нерационализованная константа связи; функция $\varphi(\nu) \equiv p_\nu^3 |u(p_\nu)|^2$. Вклады порядка f^6 от двухмезонных состояний равны

$$r_\alpha(\nu) = \frac{16}{3\pi^2}\int_\mu^\infty\int_\mu^\infty \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x^2y^2(x+y)^2}\{\zeta_\alpha(x+y)^2 - \eta_\alpha xy\}\,\delta(x+y-\nu)\,dxdy; \qquad (2)$$

$$\zeta_\alpha = \begin{pmatrix} 68 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}; \quad \eta_\alpha = \begin{pmatrix} 144 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью матриц

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_\alpha = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

обладающих свойствами

$$\sum_\gamma A_{\alpha\gamma}A_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}; \quad \sum_\gamma A_{\alpha\gamma}a_\gamma = -a_\alpha$$

можно записать условие перекрестной симметрии

$$G_\alpha(-z) = \sum_\beta A_{\alpha\beta}G_\beta(z). \qquad (3)$$

В уравнениях (1) функция $G_\alpha(z)$ рассматривается как функция комплексного переменного z, причем ее аналитические свойства определяются правой частью (1). Предельные значения функций $G_\alpha(z)$ при стремлении z сверху на действительную положительную полуось связаны с амплитудами рассеяния

$$T_\alpha(\omega) = \varphi(\omega)\, G_\alpha(\omega + i\varepsilon); \quad \varepsilon > 0; \quad \varepsilon \to 0, \qquad (4)$$

которые выражаются через фазы рассеяния

$$T_\alpha(\omega) = e^{i\delta_\alpha(\omega)} \sin \delta_\alpha(\omega); \quad \omega \geqslant \mu. \tag{5}$$

Здесь везде $\alpha = 1, 2, 3$; и фазы $\delta_\alpha(\omega)$ связаны с фазами $\delta_{2I, 2J}(\omega)$ для рассеяния в состояниях с сохраняющимися при рассеянии полным изоспином I и полным моментом J системы мезон — нуклон следующим образом:

$$\delta_1 = \delta_{11}; \ \delta_2 = \delta_{13} = \delta_{31}; \ \delta_3 = \delta_{33}; \tag{6}$$

так как известно [3], что $\delta_{13}(\omega) = \delta_{31}(\omega)$ в рассматриваемом статическом приближении (фиксированный нуклон).

Представление (5) для амплитуд рассеяния означает, что функция $G_\alpha(z)$ удовлетворяет условию унитарности

$$G_\alpha(\omega + i\varepsilon) - G_\alpha(\omega - i\varepsilon) = 2i\varphi(\omega) G_\alpha(\omega + i\varepsilon) G_\alpha(\omega - i\varepsilon) = 2i\varphi(\omega) |G_\alpha(\omega)|^2; \tag{7}$$

$$G_\alpha(z^*) = G_\alpha^*(z);$$

причем ввиду наличия в (1) вкладов от неупругих каналов условие унитарности (7) будет строго выполняться только на интервале $\mu \leqslant \omega < 2\mu$, т. е. фазы рассеяния (6) будут действительными в интервале $\mu \leqslant \omega < 2\mu$ и комплексными при $\omega \geqslant 2\mu$.

При записи уравнений Чу—Лоу в виде (1) сделано предположение, что система мезон—нуклон не имеет в интервале $0 \leqslant \omega < \mu$ других связанных состояний, кроме состояния «физического» нуклона с энергией $E = 0$. Учет вкладов от возможных других связанных состояний системы мезон—нуклон с энергиями $0 \leqslant E < \mu$ не изменит существенно наших результатов (см. [1]).

С другой стороны, для функции $G_\alpha(z)$ известно [1] представление через комплексный потенциал $V_\alpha(z)$, входящий в соответствующее уравнение Шредингера,

$$G_\alpha(z) = -\frac{2\pi^2 \cdot V_\alpha(z)}{z^2 \{1 + V_\alpha(z) \cdot J_1(z)\}}; \tag{8}$$

$$J_1(z) = 4\pi \int_\mu^\infty \frac{\varphi(\nu)\, d\nu}{\nu(\nu^2 - z^2)}.$$

Найдем потенциал $V_\alpha(z)$ с точностью до членов порядка f^6 включительно.

Для членов порядка f^2 имеем

$$G_\alpha(z) = f^2 \frac{a_\alpha}{z}; \quad V_\alpha(z) = -f^2 \frac{a_\alpha z}{2\pi^2}. \tag{9}$$

Удобно в дальнейшем ввести функцию $U_\alpha(z)$:

$$V_\alpha(z) = -f^2 \frac{a_\alpha z}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + f^2 U_\alpha(z)}; \tag{10}$$

тогда

$$G_\alpha(z) = \frac{f^2 a_\alpha}{z} \{1 + f^2 U_\alpha(z) - f^2 a_\alpha J(z)\}^{-1}; \tag{11}$$

$$J(z) = \frac{z}{2\pi^2} J_1(z).$$

Будем искать $U_\alpha(z)$ в виде разложения

$$U_\alpha(z) = D_\alpha(z) + f^2 F_\alpha(z) + \ldots . \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в уравнения (1) и сравнивая члены порядка f^4 и f^6 в обеих частях (1), получим

$$D_\alpha(z) = -\frac{4z}{3\pi}\int_\mu^\infty \frac{\varphi(\nu)\,d\nu}{\nu^2(\nu+z)}; \tag{13}$$

$$F_\alpha(z) = F_\alpha^{(1)}(z) + F_\alpha^{(2)}(z); \tag{14}$$

где «унитарная» часть $F_\alpha^{(1)}(z)$ равна

$$F_\alpha^{(1)}(z) = \frac{16z}{9\pi^2}\xi_\alpha \int_\mu^\infty\int_\mu^\infty \frac{\varphi(x)\,\varphi(y)\,dxdy}{xy(x+z)(y+z)(x+y)}; \quad \xi_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

и «неунитарная» часть $F_\alpha^{(2)}(z)$ обусловлена вкладами только от неупругих (двухмезонных) каналов

$$F_\alpha^{(2)}(z) = -\frac{z}{a_\alpha}\int_{2\mu}^\infty \left\{\frac{r_\alpha(\nu)}{\nu - z} + \sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{r_\beta(\nu)}{\nu+z}\right\} d\nu. \tag{16}$$

Легко проверить, что учет вкладов (2) от неупругих каналов в уравнениях (1) для $G_\alpha(z)$ приводит к тому, что потенциал $V_\alpha(z)$ будет комплексным (начиная с членов порядка f^6):

$$Im V_\alpha(\omega) \neq 0; \; 2\mu \leqslant \omega < \infty.$$

§ 2. Поведение амплитуды рассеяния в области низких энергий

В § 1 мы искали решение уравнений Чу—Лоу (1) по теории возмущений, разлагая величины в ряд по f^2, и получили представление (11)—(16) для амплитуды $G_\alpha(z)$. Сравним теперь наши результаты с результатами численного решения уравнений Чу—Лоу [4]. Авторы [4] численно проинтегрировали уравнения Чу—Лоу в точном одномезонном приближении и показали, что их решения неплохо согласуются с опытными данными по рассеянию π-мезонов на нуклонах в области низких энергий, по крайней мере, для (3,3) — состояния, если положить ($\mu = 1$):

$$f^2 = 0{,}08; \; |u(p)|^2 = \exp\left(-\frac{p^2}{P^2}\right); \quad P = 7. \tag{17}$$

Следуя [2], удобно ввести функцию

$$g_\alpha(\omega) = \frac{f^2 a_\alpha}{\omega G_\alpha(\omega)} = f^2\,\frac{a_\alpha \varphi(\omega)}{\omega}\,\mathrm{ctg}\,\delta_\alpha(\omega); \qquad \omega \geqslant 1.$$

С другой стороны, из (11—15) имеем

$$g_\alpha(\omega) = 1 - f^2 a_\alpha T(\omega) + f^2 D_\alpha(\omega) + f^4 F_\alpha^{(1)}(\omega). \tag{18}$$

Здесь мы не учитываем вкладов (16) от неупругих каналов, так как нас интересует область низких энергий: $1 \leqslant \omega \gtrsim 2$. Сделанный авторами [4] выбор $|u(p)|^2$ в виде гауссовской функции (17) требует долгих численных расчетов, однако для интересующей нас области низких энергий можно использовать то же самое значение $f^2=0{,}08$ и функцию «обрезания» более простого вида

$$|u(p)|^2=\begin{cases}1 & 0\leqslant p\leqslant p_m\\ 0 & p\geqslant p_m\end{cases}\qquad p_m=6{,}2,$$

где значение p_m найдено из условия

$$p_m=\int\limits_0^{p_m}dx=\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{P^2}\right)dx.$$

В этом случае все интегралы, входящие в (18), легко вычисляются, и мы получаем для (3,3)-состояния

$$g_3(\omega)=1-\frac{\omega}{\omega_0};\qquad 1\leqslant\omega\leqslant\omega_0=2{,}14, \tag{19}$$

что совпадает с формулой, полученной Чу и Лоу в приближении «эффективного радиуса» [2]. Значение энергии (3,3)-резонанса $\omega_0=2{,}14$ соответствует кинетической энергии мезона $\cong$ 190 *Мэв* в лабораторной системе. Выражение (19) для $g_3(\omega)$ хорошо согласуется также с результатами [4] и с опытными данными.

Автор глубоко благодарен акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукин В. Д. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 5, 80, 1963.
2. Chew G., Low F. Phys. Rev., **101**, 1570, 1956.
3. Harlow F., Jacobsohn B. Phys. Rev., **93**, 333, 1954.
4. Salzman G., Salzman F. Phys. Rev., **108**, 1619, 1957.

Поступила в редакцию
26. 12 1963 г.

Кафедра
теоретической физики