Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1964

А. А. ОРЛОВ

ВЛИЯНИЕ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ ГАРМОНИК В РАЗЛОЖЕНИИ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ПРИТЯЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ НА ДВИЖЕНИЕ ЕЕ СПУТНИКА

Введение

Рассмотрено влияние третьей и пятой гармоник в разложении силовой функции планеты на движение ее спутника. Получены формулы, представляющие главные возмущающие члены от этих гармоник в координатах спутника. Для вывода этих формул был использован способ неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$, оси которой сохраняют неизменное направление в пространстве. Предположим, что ее начало O совпадает с центром инерции планеты, плоскость Oxy — с плоскостью экватора, ось Oz направлена вдоль полярной оси планеты таким образом, что система $Oxyz$ является правой.

В таком случае, если предположить, что планета представляет собой тело вращения, ее силовую функцию притяжения можно будет записать в виде

$$U = \frac{fm}{R}\left[1 - q_2\left(\frac{a_0}{R}\right)^2 P_2\left(\frac{z}{R}\right) - q_3\left(\frac{a_0}{R}\right)^3 P_3\left(\frac{z}{R}\right) + \right.$$
$$\left. + q_4\left(\frac{a_0}{R}\right)^4 P_4\left(\frac{z}{R}\right) + q_5\left(\frac{a_0}{R}\right)^5 P_5\left(\frac{z}{R}\right) + \ldots\right],$$

где f — постоянная тяготения, m — масса планеты, a_0 — экваториальный радиус планеты, q_j $(j = 2, 3, \ldots)$ — постоянные параметры, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от центра инерции планеты до спутника, $P_j\left(\frac{z}{R}\right)$ — полином Лежандра степени j.

В работе [1] были получены выражения координат спутника в буквенной форме с учетом членов, содержащих множителями q_2, q_2^2 и q_4.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы дополнить эти выражения членами, содержащими множители q_3 и q_5.

Способ решения указанной задачи, примененный в настоящей работе, в принципе тот же, что и в работе [1]. Однако некоторые преобразования дифференциальных уравнений движения спутника, использованные в работе [1], здесь не выполнялись. Это привело к некоторому сокращению выкладок, необходимых для получения указанных членов в координатах спутника.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения спутника и их преобразование

Дифференциальные уравнения движения спутника в поле тяготения, определяемом силовой функцией, приведенной во введении, имеют следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

где t — время.

Предположим, что ищется решение этой системы дифференциальных уравнений, которое при

$$q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = \ldots = 0 \tag{2}$$

представляло бы кеплерово эллиптическое движение, определяемое следующими элементами: большой полуосью a, эксцентриситетом e, наклонностью орбиты к плоскости экватора планеты i, моментом прохождения спутника через перицентр T_0, долготой восходящего узла орбиты спутника на экваторе планеты Ω_0 и угловым расстоянием перицентра орбиты от восходящего узла ω_0. В таком случае длина радиуса-вектора спутника в невозмущенном движении определится формулой

$$r^{(0)} = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{3}$$

где $p = a(1 - e^2)$ — параметр невозмущенной орбиты спутника, v — его невозмущенная истинная аномалия.

Преобразуем координаты спутника x, y и z по формулам

$$x = r^{(0)} x_1, \quad y = r^{(0)} y_1, \quad z = r^{(0)} z_1 \tag{4}$$

и введем вместо независимой переменной t невозмущенную истинную аномалию v. Тогда дифференциальные уравнения движения спутника примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_1}{dv^2} + \left(1 - \frac{r^{(0)}}{p}\right)x_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ &\frac{d^2y_1}{dv^2} + \left(1 - \frac{r^{(0)}}{p}\right)y_1 = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \\ &\frac{d^2z_1}{dv^2} + \left(1 - \frac{r^{(0)}}{p}\right)z_1 = \frac{\partial V}{\partial z_1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$V = \frac{r^{(0)2}}{fm} U. \tag{6}$$

Переменные x_1, y_1 и z_1 можно рассматривать как прямоугольные координаты спутника, отнесенные к системе осей $Ox_1y_1z_1$ с переменным масштабом длины.

Введем теперь вместо x_1, y_1 и z_1 цилиндрические координаты r, w и ζ по формулам

$$
\begin{aligned}
r\cos w &= x_1\cos\Omega + y_1\sin\Omega,\\
r\sin w &= -x_1\sin\Omega\cos i + y_1\cos\Omega\cos i + z_1\sin i,\\
\zeta &= x_1\sin\Omega\sin i - y_1\cos\Omega\sin i + z_1\cos i,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где

$$
\Omega = \Omega_0 + \mu v, \tag{8}
$$

причем μ — постоянная величина, обращающаяся в нуль при условии (2). Целью введения члена μv в правой части равенства (8), как и в работе [1], является учет в тригонометрической форме векового движения узла орбиты спутника.

Дифференциальные уравнения движения спутника в переменных r, w и ζ будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dv^2} - r\left(\frac{dw}{dv}\right)^2 + \left(1-\frac{r^{(0)}}{p}\right)r = 2\mu\left(r\frac{dw}{dv}\cos i - \frac{d\zeta}{dv}\cos w\sin i\right) + \\
&\qquad + \mu^2[r(\cos^2 w + \sin^2 w\cos^2 i) - \zeta\sin w\sin i\cos i] + \frac{\partial V}{\partial r},\\
&\frac{d^2w}{dv^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dv}\frac{dw}{dv} = 2\frac{\mu}{r}\left(-\frac{dr}{dv}\cos i + \frac{d\zeta}{dv}\sin w\sin i\right) + \\
&\qquad + \mu^2\left(-\sin w\cos w\sin^2 i - \frac{\zeta}{r}\cos w\sin i\cos i\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial w},\\
&\frac{d^2\zeta}{dv^2} + \left(1-\frac{r^{(0)}}{p}\right)\zeta = 2\mu\left(\frac{dr}{dv}\cos w\sin i - r\frac{dw}{dv}\sin w\sin i\right) + \\
&\qquad + \mu^2(-r\sin w\sin i\cos i + \zeta\sin^2 i) + \frac{\partial V}{\partial \zeta}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Если в этих уравнениях положить $q_j = 0$ при всех значениях индекса j, то мы придем к системе дифференциальных уравнений движения материальной точки под действием неподвижного притягивающего центра. Эллиптическому движению, определяемому в первоначальной координатной системе $Oxyz$ элементами a, e, i, T_0, ω_0, Ω_0, будет соответствовать следующее решение уравнений, получаемых из (9) при $q_j=0$ $(j=2, 3, \ldots)$:

$$
r = 1,\ w = \omega_0 + v,\ \zeta = 0. \tag{10}
$$

Сделаем теперь еще одно преобразование искомых функций, полагая

$$
r = 1 + \rho,\ w = \omega_0 + (1+\lambda)v + \nu,\ \zeta = \zeta, \tag{11}
$$

где ρ, ν и ζ суть новые искомые функции, λ — постоянная, вводимая для учета векового движения перицентра орбиты спутника. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы при условии (2) величины ρ, ν, ζ и λ обращались в нуль.

Прежде чем выписывать дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции ρ, ν и ζ, заметим, что в работе [1] были определены все члены, входящие в их решение, зависящие от q_2, q_2^2 и q_4. Поэтому сейчас они не будут представлять для нас интереса, и мы ограничимся тем, что приведем здесь дифференциальные уравнения только для тех слагаемых, входящих в ряды, представляющие ρ, ν и ζ, которые содержат множителями q_3 и q_5. Обозначим эти слагаемые соответственно через $\Delta_3\rho$, $\Delta_3\nu$, $\Delta_3\zeta$ и $\Delta_5\rho$, $\Delta_5\nu$, $\Delta_5\zeta$. Добавочные слагаемые в постоянных λ и μ мы обозначим через $\Delta_3\lambda$, $\Delta_3\mu$ и $\Delta_5\lambda$, $\Delta_5\mu$. Тогда мы будем иметь

$$\frac{d^2(\Delta_3\rho)}{dv^2} - 2\frac{d(\Delta_3\nu)}{dv} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\Delta_3\rho = 2(\Delta_3\lambda + \Delta_3\mu\cos i) -$$

$$- q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 \cdot 8\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\left(B_{3,1}\sin u + \frac{1}{3}B_{3,3}\sin 3u\right), \tag{12}$$

$$\frac{d^2(\Delta_3\nu)}{dv^2} + 2\frac{d(\Delta_3\rho)}{dv} = q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 \cdot 2\frac{p^2}{r^{(0)^2}}(B_{3,1}\cos u + B_{3,3}\cos 3u),$$

$$\frac{d^2(\Delta_3\zeta)}{dv^2} + \Delta_3\zeta = -2\Delta_3\mu\sin i\sin u + q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\frac{p^2}{r^{(0)^2}}(C_{3,0} + C_{3,2}\cos 2u), \tag{13}$$

$$\frac{d^2(\Delta_5\rho)}{dv^2} - 2\frac{d(\Delta_5\nu)}{dv} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\Delta_5\rho = 2(\Delta_5\lambda + \Delta_5\mu\cos i) -$$

$$- q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\frac{p^4}{r^{(0)^4}}(6B_{5,1}\sin u + 2B_{5,3}\sin 3u + 6B_{5,5}\sin 5u), \tag{14}$$

$$\frac{d^2(\Delta_5\nu)}{dv^2} + 2\frac{d(\Delta_5\rho)}{dv} = q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\frac{p^4}{r^{(0)^4}}(B_{5,1}\cos u + B_{5,3}\cos 3u + B_{5,5}\cos 5u),$$

$$\frac{d^2(\Delta_5\zeta)}{dv^2} + \Delta_5\zeta = -2\Delta_5\mu\sin i\sin u + q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\frac{p^4}{r^{(0)^4}}(C_{5,0} + C_{5,2}\cos 2u + C_{5,4}\cos 4u), \tag{15}$$

где

$$B_{3,1} = \frac{3}{4}\sin i - \frac{15}{16}\sin^3 i, \quad B_{3,3} = \frac{15}{16}\sin^3 i, \tag{16}$$

$$C_{3,0} = \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{4}\sin^2 i\right)\cos i, \quad C_{3,2} = \frac{15}{4}\sin^2 i\cos i,$$

$$B_{5,1} = \left(\frac{15}{8} - \frac{105}{16}\sin^2 i + \frac{315}{64}\sin^4 i\right)\sin i,$$

$$B_{5,3} = \left(\frac{105}{16} - \frac{945}{128}\sin^2 i\right)\sin^3 i, \quad B_{5,5} = \frac{315}{128}\sin^5 i, \tag{17}$$

$$C_{5,0} = \left(\frac{15}{8} - \frac{105}{8}\sin^2 i + \frac{945}{64}\sin^4 i\right)\cos i,$$

$$C_{5,2} = \left(\frac{105}{8} - \frac{315}{16}\sin^2 i\right)\sin^2 i\cos i, \quad C_{5,4} = \frac{315}{64}\sin^4 i\cos i.$$

Дифференциальные уравнения (12)—(15) являются линейными неоднородными уравнениями. В их левых частях не все коэффициенты постоянны. Однако, как мы увидим ниже, их интегрирование выполняется без труда.

§ 2. Интегрирование уравнений (12)—(15)

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (12) и (13) мы положим

$$\Delta_3\rho = \alpha_{3,0} + \alpha_{3,1}\cos u + \beta_{3,1}\sin u + \alpha_{3,3}\cos 3u + \beta_{3,3}\sin 3u,$$

$$\Delta_3\nu = \gamma_{3,0} + \gamma_{3,1}\cos u + \delta_{3,1}\sin u + \gamma_{3,3}\cos 3u + \delta_{3,3}\sin 3u, \tag{18}$$

$$\Delta_3\zeta = \varepsilon_{3,0} + \varepsilon_{3,1}\cos u + \sigma_{3,1}\sin u + \varepsilon_{3,2}\cos 2u + \sigma_{3,2}\sin 2u, \tag{19}$$

где $\alpha_{3,j}$, $\beta_{3,j}$, $\gamma_{3,j}$, $\delta_{3,j}$, $\varepsilon_{3,j}$ и $\sigma_{3,j}$ суть функции невозмущенной истинной аномалии спутника ϑ, подлежащие определению.

Подставляя выражения (18) и (19) в дифференциальные уравнения (12) и (13)* и приравнивая в левых и правых частях полученных равенств коэффициенты при синусах и косинусах одинаковых кратностей u, мы получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\alpha_{3,j}$, $\beta_{3,j}$, $\gamma_{3,j}$, $\delta_{3,j}$, $\varepsilon_{3,j}$ и $\sigma_{3,j}$:

$$\alpha''_{3,0} - 2\gamma'_{3,0} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\alpha_{3,0} = 2(\Delta_3\lambda + \Delta_3\mu\cos i), \tag{20}$$

$$\gamma''_{3,0} + 2\alpha'_{3,0} = 0,$$

$$\alpha''_{3,1} - 2\gamma'_{3,1} + 2\beta'_{3,1} + 2\delta_{3,1} - \alpha_{3,1} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\alpha_{3,1} = 0,$$

$$\beta''_{3,1} - 2\delta'_{3,1} - 2\alpha'_{3,1} + 2\gamma_{3,1} - \beta_{3,1} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\beta_{3,1} = -8q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 A_{3,1}\frac{p^2}{r^{(0)2}}, \tag{21}$$

$$\gamma''_{3,1} + 2\alpha'_{3,1} + 2\delta'_{3,1} + 2\beta_{3,1} - \gamma_{3,1} = 2q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 A_{3,1}\frac{p^2}{r^{(0)2}},$$

$$\delta''_{3,1} + 2\beta'_{3,1} - 2\gamma'_{3,1} - 2\alpha_{3,1} - \delta_{3,1} = 0,$$

$$\alpha''_{3,3} - 2\gamma'_{3,3} + 6\beta'_{3,3} + 6\delta_{3,3} - 9\alpha_{3,3} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\alpha_{3,3} = 0,$$

$$\beta''_{3,3} - 2\delta'_{3,3} - 6\alpha'_{3,3} + 6\gamma_{3,3} - 9\beta_{3,3} - 3\frac{r^{(0)}}{p}\beta_{3,3} = -\frac{8}{3}q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 A_{3,3}\frac{p^2}{r^{(0)2}} \tag{22}$$

$$\gamma''_{3,3} + 2\alpha'_{3,3} + 6\delta'_{3,3} + 6\beta_{3,3} - 9\gamma_{3,3} = 2q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 A_{3,3}\frac{p^2}{r^{(0)2}},$$

$$\delta''_{3,3} + 2\beta'_{3,3} - 6\gamma'_{3,3} - 6\alpha_{3,3} - 9\delta_{3,3} = 0,$$

$$\varepsilon''_{3,0} + \varepsilon_{3,0} = q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 B_{3,0}\frac{p^2}{r^{(0)2}}, \tag{23}$$

$$\varepsilon''_{3,1} + 2\sigma'_{3,1} = 0,$$

$$\sigma''_{3,1} - 2\varepsilon'_{3,1} = -2\Delta_3\mu\sin i, \tag{24}$$

$$\varepsilon''_{3,2} + 4\sigma'_{3,2} - 3\varepsilon_{3,2} = q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3 B_{3,2}\frac{p^2}{r^{(0)2}}, \tag{25}$$

$$\sigma''_{3,2} - 4\varepsilon'_{3,2} - 3\sigma_{3,2} = 0,$$

где штрихами обозначены производные по невозмущенной истинной аномалии спутника ϑ.

Частные решения уравнений (20) и (24) можно получить без труда:

$$\begin{aligned} &\alpha_{3,0} = 0, \quad \gamma_{3,0} = -(\Delta_3\lambda + \Delta_3\mu\cos i)\,v, \\ &\varepsilon_{3,1} = \Delta_3\mu\sin i\cdot v, \quad \sigma_{3,1} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

* При этой подстановке отбрасывались члены, содержащие произведения q_2q_3, $q_2^2q_3$, q_4, q_3, которые возникают при дифференцировании $\sin ju$ и $\cos ju$.

Для решения остальных уравнений (20)—(25) в настоящей работе применялся способ неопределенных коэффициентов. Мы полагали

$$\begin{aligned}
\alpha_{3,j} &= \left(a_{0,j} + a_{1,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)v + \left(a_{2,j} + a_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v,\\
\beta_{3,j} &= b_{1,j}\cdot e\sin v\cdot v + \left(b_{2,j} + b_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}} + b_{4,j}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right),\\
\gamma_{3,j} &= c_{1,j}\,e\sin v\cdot v + \left(c_{2,j} + c_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}} + c_{4,j}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right),\\
\delta_{3,j} &= \left(d_{0,j} + d_{1,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)v + \left(d_{2,j} + d_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v,\\
\varepsilon_{3,j} &= e_{1,j}\,e\sin v\cdot v + \left(e_{2,j} + e_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}} + e_{4,j}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right),\\
\sigma_{3,j} &= \left(f_{0,j} + f_{1,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)v + \left(f_{2,j} + f_{3,j}\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v,
\end{aligned} \tag{27}$$

где $a_{k,j}$, $b_{k,j}$, $c_{k,j}$, $d_{k,j}$, $e_{k,j}$ и $f_{k,j}$ — постоянные величины. Определение этих постоянных сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Произвольные постоянные, возникающие при решении дифференциальных уравнений (20) — (25), выбирались так, чтобы функции $\alpha_{3,j}$, $\beta_{3,j}$, $\gamma_{3,j}$, $\delta_{3,j}$, $\varepsilon_{3,j}$ и $\sigma_{3,j}$ имели по возможности простой вид.

Для получения решения уравнений (14) и (15), определяющих функции $\Delta_5\rho$, $\Delta_5\nu$ и $\Delta_5\zeta$, выполнялась такая же процедура.

§ 3. Сводка полученных результатов

Для краткости мы не будем выписывать выражений каждой из функций $\alpha_{k,j}$, $\beta_{k,j}$, $\gamma_{k,j}$, $\delta_{k,j}$, $\varepsilon_{k,j}$ и $\sigma_{k,j}$, полученных по способу, описанному в предыдущем параграфе, а приведем окончательные формулы для $\Delta_k\rho$, $\Delta_k\nu$ и $\Delta_k\zeta$ ($k = 3,5$), используя равенства вида (18) и (19).

В случае $k = 3$ мы имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_3\rho &= q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\left(\frac{3}{4}\sin i - \frac{15}{16}\sin^3 i\right)\left[\left(2\frac{p}{r^{(0)}}v + \right.\right.\\
&\left.\left. + \frac{8}{3}\frac{p}{r^{(0)}}e\sin v\right)\cos u + \left(6\frac{p}{r^{(0)}} - \frac{4}{3}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right)\sin u\right] + \\
&+ q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\sin^3 i\left[-\frac{1}{6}\frac{p}{r^{(0)}}e\sin v\cos 3u - \left(\frac{3}{32}\frac{p}{r^{(0)}} - \frac{1}{4}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right)\sin 3u\right],
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3\nu &= q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\left(\frac{3}{4}\sin i - \frac{15}{16}\sin^3 i\right)\left\{\left(-8e\sin v\cdot v + 4\frac{p}{a} - 4\frac{p}{r^{(0)}} + \right.\right.\\
&\left. + \frac{10}{3}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right)\cos u + \left[\left(-10 + 6\frac{p}{r^{(0)}}\right)v + \right.\\
&\left.\left. + \left(-4 + \frac{8}{3}\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v\right]\sin u\right\} + q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\sin^3 i\left[\left(-\frac{5}{32} - \right.\right.\\
&\left. - \frac{1}{4}\frac{p}{a} + \frac{27}{32}\frac{p}{r^{(0)}} - \frac{13}{24}\frac{p^2}{r^{(0)2}}\right)\cos 3u + \left(\frac{3}{8} - \right.\\
&\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v\sin 3u\right] - (\Delta_3\lambda + \Delta_3\mu\cos i)\,v,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\Delta_3\zeta = q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\left(\frac{3}{2}-\frac{15}{4}\sin^2 i\right)\cos i\left(e\sin v\cdot v+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\,\frac{p}{a}+\frac{2}{3}\,\frac{p}{r^{(0)}}-\frac{1}{3}\,\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right)+q_3\left(\frac{a_0}{p}\right)^3\sin^2 i\cos i\times$$

$$\times\left\{\left(-\frac{15}{8}e\sin v\cdot v-\frac{17}{32}+\frac{3}{2}\,\frac{p}{a}-\frac{127}{32}\,\frac{p}{r^{(0)}}+\frac{7}{4}\,\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right)\times\right.$$

$$\times\cos 2u+\left[\left(-\frac{15}{8}+\frac{15}{8}\,\frac{p}{r^{(0)}}\right)v+\left(-\frac{49}{32}+2\frac{p}{r^{(0)}}\right)e\sin v\right]\times$$

$$\left.\times\sin 2u\right\}+\Delta_3\mu\sin i\cos u\cdot v. \qquad (30)$$

В случае $k=5$ добавочные члены в ρ, ν и ζ определяются следующими формулами:

$$\Delta_5\rho = q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{15}{8}\sin i-\frac{105}{16}\sin^3 i+\frac{315}{64}\sin^5 i\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+6\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-3\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]\cos u+\left(3\frac{p}{r^{(0)}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-3\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right)e\sin v\sin u\right\}v+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{105}{16}\sin^3 i-\frac{945}{128}\sin^5 i\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}-2\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]\cos 3u-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{p}{r^{(0)}}-\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right)e\sin v\sin 3u\right\}v+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\times$$

$$\times\left(\frac{15}{8}\sin i-\frac{105}{16}\sin^3 i+\frac{315}{64}\sin^5 i\right)\left\{\left[\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{15}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{8}{15}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]e\sin v\cos u+\left[\left(-\frac{25}{3}+\frac{8}{5}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{6}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}+\frac{4}{5}\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\sin u\right\}+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\times$$

$$\times\left(\frac{105}{16}\sin^3 i-\frac{945}{128}\sin^5 i\right)\left\{\left[\left(-\frac{32}{21}+\frac{32}{105}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\frac{24}{35}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]\times\right.$$

$$\times e\sin v\cos 3u+\left[\left(-\frac{43}{42}-\frac{1}{6}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{41}{21}-\frac{24}{35}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\frac{31}{42}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}-\frac{68}{105}\,\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\sin 3u\right\}+$$

$$+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\sin^5 i\left\{\left[\left(-\frac{69}{1024}-\frac{1}{20}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\frac{325}{1024}\,\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{5}{16}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]e\sin v\cos 5u+\left[\left(-\frac{35}{2048}-\frac{195}{2048}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{135}{512}+\frac{3}{16}\,\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-\frac{615}{1024}\,\frac{p^3}{r^{(0)^3}}+\frac{11}{32}\,\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\sin 5u\right\}, \qquad (31)$$

$$\Delta_5\nu = q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{15}{8}\sin i-\frac{105}{16}\sin^3 i+\frac{315}{64}\sin^5 i\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\left(-28+9\frac{p}{a}\right)+3\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right]e\sin v\cos u+\left[\left(-\frac{63}{2}+\frac{21}{2}\frac{p}{a}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{49}{2}-\frac{15}{2}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+3\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-3\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]\sin u\right\}v+$$

$$+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{105}{16}\sin^3 i-\frac{945}{128}\sin^5 i\right)\left\{\left[\left(-4-\frac{p}{a}\right)+8\frac{p}{r^{(0)}}-\right.\right.$$

$$\left.-3\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right]e\sin v\cos 3u+\left[\left(-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\frac{p}{a}\right)+\left(\frac{21}{2}+\frac{5}{2}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}-\right.$$

$$\left.\left.-11\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+3\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]\sin 3u\right\}v+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\times$$

$$\times\left(\frac{15}{8}\sin i-\frac{105}{16}\sin^3 i+\frac{315}{64}\sin^5 i\right)\left\{\left[\left(-56+\frac{85}{3}\frac{p}{a}-\frac{8}{3}\frac{p^2}{a^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{33}{2}-\frac{44}{15}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\frac{7}{10}\frac{p^3}{r^{(0)^3}}-\frac{7}{15}\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\cos u+$$

$$+\left[\left(\frac{49}{2}-\frac{9}{4}\frac{p}{a}\right)+\left(14-\frac{32}{15}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}-\frac{1}{5}\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{8}{15}\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]e\sin v\sin u\right\}+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{105}{16}\sin^3 i-\frac{945}{128}\sin^5 i\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\left(-\frac{1033}{280}-\frac{4777}{840}\frac{p}{a}+\frac{8}{21}\frac{p^2}{a^2}\right)+\left(\frac{5337}{280}+\frac{99}{280}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1321}{105}+\frac{4}{5}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\frac{29}{35}\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\cos 3u+$$

$$+\left[\left(\frac{7177}{840}+\frac{379}{840}\frac{p}{a}\right)+\left(-\frac{1189}{105}+\frac{32}{35}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{59}{70}\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+\frac{88}{105}\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]e\sin v\sin 3u\right\}+$$

$$+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\sin^5 i\left\{\left[\left(-\frac{63}{2048}-\frac{483}{2048}\frac{p}{a}-\frac{1}{16}\frac{p^2}{a^2}\right)+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{1225}{2048}+\frac{1625}{2048}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\left(-\frac{1819}{1024}-\frac{83}{160}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)^2}}+$$

$$\left.+\frac{1795}{1024}\frac{p^3}{r^{(0)^3}}-\frac{75}{128}\frac{p^4}{r^{(0)^4}}\right]\cos 5u+\left[\left(\frac{35}{256}+\frac{195}{1024}\frac{p}{a}\right)+\right.$$

$$+\left(-\frac{105}{128}-\frac{1}{4}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}}+\frac{1241}{1024}\frac{p^2}{r^{(0)^2}}-$$

$$\left.\left.-\frac{9}{16}\frac{p^3}{r^{(0)^3}}\right]e\sin v\sin 5u\right\}-(\Delta_5\lambda+\Delta_5\mu\cos i)\cdot v, \qquad (32)$$

$$\Delta_5\zeta=q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\left(\frac{15}{8}-\frac{105}{8}\sin^2 i+\frac{945}{64}\sin^4 i\right)\cos i\times$$

$$\times\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\frac{p}{a}\right)e\sin v\cdot v+q_5\left(\frac{a_0}{p}\right)^5\times$$

$$\times\left(\frac{105}{8}\sin^2 i-\frac{315}{16}\sin^4 i\right)\cos i\left\{\left(-1+\frac{p}{a}-2\frac{p}{r^{(0)}}+\frac{p^2}{r^{(0)^2}}\right)\times\right.$$

$$\times e \sin v \cos 2u + \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{p}{a}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \right.$$

$$\left. + 3\frac{p^2}{r^{(0)2}} - \frac{p^3}{r^{(0)3}}\right] \sin 2u \Big\} \cdot v + q_5 \left(\frac{a_0}{p}\right)^5 \times$$

$$\times \frac{315}{64} \sin^4 i \cos i \left\{\left[\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{p}{a}\right) + 2\frac{p}{r^{(0)}} - \frac{p^2}{r^{(0)2}}\right] e \sin v \cos 4u + \right.$$

$$+ \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{p}{a}\right) + \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} - 3\frac{p^2}{r^{(0)2}} + \frac{p^3}{r^{(0)3}}\right] \sin 4u \Big\} v +$$

$$+ q_5 \left(\frac{a_0}{p}\right)^5 \left(\frac{15}{8} - \frac{105}{8}\sin^2 i + \frac{945}{64}\sin^4 i\right) \cos i \times$$

$$\times \left[\left(7 - \frac{16}{3}\frac{p}{a} + \frac{8}{3}\frac{p^2}{a^2}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \left(-\frac{7}{6} + \frac{4}{15}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)2}} - \frac{7}{30}\frac{p^3}{r^{(0)3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{15}\frac{p^4}{r^{(0)4}}\right] + q_5 \left(\frac{a_0}{p}\right)^5 \left(\frac{105}{8}\sin^2 i - \frac{315}{16}\sin^4 i\right) \cos i \times$$

$$\times \left\{\left[\left(-\frac{43}{15} + \frac{331}{105}\frac{p}{a} - \frac{8}{21}\frac{p^2}{a^2}\right) + \left(-\frac{23}{5} + \frac{23}{35}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{68}{15} - \frac{68}{105}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)2}} - \frac{19}{105}\frac{p^4}{r^{(0)4}}\right] \cos 2u + \left[\left(\frac{67}{15} - \frac{64}{105}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{10}\frac{p^2}{r^{(0)2}} - \frac{16}{105}\frac{p^3}{r^{(0)3}}\right] e \sin v \sin 2u \Big\} + q_5 \left(\frac{a_0}{p}\right)^5 \cdot \frac{315}{64} \sin^4 i \cos i \times$$

$$\times \left\{\left[\left(-\frac{461}{720} - \frac{301}{240}\frac{p}{a} + \frac{8}{63}\frac{p^2}{a^2}\right) + \left(\frac{3029}{720} - \frac{79}{5040}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{563}{180} + \frac{212}{315}\frac{p}{a}\right)\frac{p^2}{r^{(0)2}} + 2\frac{p^3}{r^{(0)3}} + \frac{31}{64}\frac{p^4}{r^{(0)4}}\right] \cos 4u +$$

$$+ \left[\left(\frac{599}{360} + \frac{251}{2520}\frac{p}{a}\right) + \left(-\frac{128}{45} + \frac{128}{315}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{128}{45} + \frac{128}{315}\frac{p}{a}\right)\frac{p}{r^{(0)}} + \frac{32}{64}\frac{p^3}{r^{(0)3}}\right] e \sin v \sin 4u +$$

$$+ \Delta_5 \mu \sin i \cos u \cdot v. \qquad (33$$

Легко видеть, что

$$\Delta_3 \mu = \Delta_3 \lambda = \Delta_5 \mu = \Delta_5 \lambda = 0.$$

Выводы

В настоящей работе получены формулы для представления возмущений первого порядка относительно q_3 и q_5 в выражениях координат спутника несферической планеты. При выводе этих формул не использовались разложения в ряды по степеням эксцентриситетов наклонностей невозмущенных орбит.

Окончательный результат представлен в виде сумм членов двух видов: (а) периодических членов, зависящих только от синусов или косинусов различных кратностей величин, и (б) смешанных членов, равных произведению периодических членов на невозмущенную истинную аномалию v.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А. А. Влияние сфероидальности планеты на движение ее спутника. «Сообщения ГАИШ», № 112, стр. 3—32, 1961.