Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1965

Ф. И. ФЕДОРОВ

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛАХ — СРАВНЕНИЕ С ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

Определен тензор упругих констант поперечно-изотропной среды, наименее отличающейся в среднем по своим упругим свойствам от заданного кристалла. На этой основе введено понятие поперечной анизотропии упругих свойств кристалла. Полученные результаты применяются к тетрагональным и тригональным кристаллам.

Как показано в [3], сравнение кристалла с ближайшей к нему по упругим свойствам изотропной средой позволяет развить в инвариантной форме теорию распространения в нем упругих волн, удобную, в частности, для приближенного решения задачи. Распространение упругих волн в кристалле описывается с помощью тензора $\Lambda = (\Lambda_{kl}) = (\lambda_{ikjl} n_i n_j)$*, где λ_{ikjl} — тензор упругих констант, разделенный на плотность среды, n_i — компоненты единичного вектора волновой нормали $\vec{n}$. Для изотропной среды $\Lambda = \Lambda^0 = a + b\vec{n}\cdot\vec{n}$, где $\vec{n}\cdot\vec{n}$ — диада $(\vec{n}\cdot\vec{n})_{ik} = n_i n_k$. Ближайшей по упругим свойствам к кристаллу мы называем изотропную среду, характеризуемую таким тензором Λ^0, для которого [3]

$$F = \langle (\Lambda - \Lambda^0)^2 \rangle_c = \frac{1}{4\pi} \int ((\Lambda - \Lambda^0)^2)_c \, d\Omega = \text{minimum}. \tag{1}$$

Индекс c означает след тензора, угловые скобки обозначают усреднение по всем направлениям $\vec{n}$. Найдя Λ^0 с помощью (1), можем представить тензор Λ для данного кристалла в виде суммы двух слагаемых: $\Lambda = \Lambda^0 + \Lambda^1$. Если Λ^1 достаточно мало, то такое представление позволяет развить простую приближенную теорию, в которой анизотропия кристалла проявляется в некоторых добавочных членах к величинам, характеризующим упругие волны в изотропных средах. Очевидно, эффективность такого подхода прямо зависит от малости Λ^1, т. е. от того, насколько близким к Λ можно подобрать Λ^0. Возможность выбора тензора Λ^0 в соответствии с условием (1) ограничена тем, что мы можем распорядиться лишь двумя параметрами a и b, входящими в тензор Λ^0, в то время как тензор Λ может содержать до 18 независимых параметров (в триклинных кристаллах). Однако для кубических кристаллов [3] такой подход оказывается вполне эффективным.

* По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Очевидно, можно достичь лучшего приближения, если тензор сравнения Λ^0 будет зависеть от большего числа параметров. Но в то же время среда, характеризуемая тензором Λ^0, должна обладать достаточно простыми упругими свойствами. Такой средой, помимо изотропной, является *поперечно-изотропная* среда, для которой основное уравнение

$$\Lambda\vec{u} = \lambda\vec{u}, \quad \lambda = v^2, \tag{2}$$

($\vec{u}$ — вектор смещения упругой волны, v — фазовая скорость) допускает достаточно простое точное решение. Поперечно-изотропной называется среда, обладающая по отношению к некоторому свойству симметрией вращения вокруг фиксированного направления. По отношению к оптическим свойствам поперечно-изотропными являются все кристаллы средних сингоний (одноосные). По отношению к упругим свойствам такой средой является гексагональный кристалл, для которого компоненты тензора Λ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Lambda_{11} = c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2, \quad \Lambda_{12} = (c_{11} - c_{66})\, n_1 n_2, \\ &\Lambda_{22} = c_{66}n_1^2 + c_{11}n_2^2 + c_{44}n_3^2, \quad \Lambda_{13} = (c_{13} + c_{44})\, n_1 n_3, \\ &\Lambda_{33} = c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{33}n_3^2, \quad \Lambda_{23} = (c_{13} + c_{44})\, n_2 n_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Однако мы перейдем от обычных выражений (3) для компонентов тензора Λ к инвариантному его представлению, более компактному и удобному для расчетов. Для этого используем тот факт, что вследствие поперечной изотропии в среде имеются лишь два выделенных направления — ось симметрии 6-го порядка, которую мы будем задавать единичным вектором $\vec{e}$, и направление волновой нормали $\vec{n}$. Из соображений ковариантности следует, что всякий симметричный тензор, зависящий от двух векторов $\vec{e}$ и $\vec{n}$, может быть представлен в виде

$$\Lambda^0 = a_0' + a_1'\vec{n}\cdot\vec{n} + a_2'\vec{e}\cdot\vec{e} + a_3^1(\vec{e}\cdot\vec{n} + \vec{n}\cdot\vec{e}), \tag{4}$$

где a_s' — скаляры, зависящие от $\vec{e}$ и $\vec{n}$. Воспользовавшись соотношением [2]

$$[\vec{e}\vec{n}]\cdot[\vec{e}\vec{n}] = [\vec{e}\vec{n}]^2 + en(\vec{e}\cdot\vec{n} + \vec{n}\cdot\vec{e}) - (\vec{e}\cdot\vec{e} + \vec{n}\cdot\vec{n}),$$

можем написать вместо (4)

$$\Lambda^0 = a_0 + a_1\vec{n}\cdot\vec{n} + a_2\vec{e}\cdot\vec{e} + a_3[\vec{e}\vec{n}]\cdot[\vec{e}\vec{n}]. \tag{5}$$

Поскольку Λ зависит от компонентов вектора $\vec{n}$ квадратично, то скаляры a_s $(s=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ могут выражаться через $\vec{e}$ и $\vec{n}$ лишь следующим образом:

$$\begin{gathered} a_0 = \eta_1 + \eta_2 n_3^2, \quad a_1 = \eta_3, \quad a_2 = \eta_2' + \eta_4 n_3^2, \quad a_3 = \eta_5, \\ n_3 = \vec{e}\vec{n}, \end{gathered} \tag{6}$$

причем η_k не зависят от $\vec{e}$ и $\vec{n}$. Сравнивая (5), (6) с (3), получим

$$\begin{gathered} \eta_1 = c_{11} - c_{44} - c_{13}, \quad \eta_2 = \eta_2' = 2c_{44} + c_{13} - c_{11}, \quad \eta_3 = c_{13} + c_{44}, \\ \eta_4 = c_{11} + c_{33} - 4c_{44} - 2c_{13}, \quad \eta_5 = c_{44} + c_{66} + c_{13} - c_{11}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из выражения (5) видим, что при любом $\vec{n}$ одним из решений уравнения (2) будет чисто поперечная волна, для которой

$$\vec{u} = [\vec{e}\vec{n}], \quad \lambda = v^2 = a_0 + a_3 [\vec{e}\vec{n}]^2. \tag{8}$$

Смещения двух других волн лежат в плоскости $(\vec{n}, \vec{e})$, поэтому можем написать $\vec{u} = \vec{n} + C\vec{e}$. Подставляя это выражение вместе с (5) в (2) и сравнивая коэффициенты при векторах $\vec{e}$ и $\vec{n}$, получим

$$a_1(1 + Cn_3) = \lambda - a_0, \quad a_2(n_3 + C) = (\lambda - a_0)C.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$C = \frac{a_2 - a_1 \pm \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + 4a_1a_2n_3^2}}{2a_1n_3},$$
$$\lambda = a_0 + \frac{a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + 4a_1a_2n_3^2}}{2}. \tag{9}$$

Соотношения (8) и (9) полностью решают задачу определения скоростей и смещений упругих волн в поперечно-изотропной среде.

Обратимся к отысканию тензора Λ^0, имеющего форму (5) и наиболее близкого в среднем к тензору Λ для заданного кристалла, с учетом условия (1). Что касается направления $\vec{e}$, то выбор его может быть сделан из весьма простых и естественных соображений. Так, в кристаллах кубической, три- и тетрагональной сингоний за направление $\vec{e}$ следует выбрать ось симметрии высшего порядка. В моноклинных кристаллах $\vec{e}$ следует направлять вдоль единственного выделенного направления L^2 или нормали к плоскости симметрии. В ромбических кристаллах в качестве $\vec{e}$ следует выбирать ту из осей 2-го порядка, вдоль которой различие скоростей двух поперечных волн минимально. В триклинных кристаллах выбор $\vec{e}$ можно осуществить двояким путем. Во-первых, можно направить e вдоль той из главных осей свергнутого тензора $\mu_{kl} = \lambda_{ikil}$ (см. [1]), перпендикулярно которой собственные значения наименее различаются. Во-вторых, можно в соответствии с [1] выбрать в качестве $\vec{e}$ ту из *продольных нормалей* *, вдоль которой скорости обеих поперечных волн наименее различаются.

После выбора $\vec{e}$ задача сводится к отысканию параметров η_s в соответствии с (1). Для этого, как обычно, полагаем

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_s} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta_s} (\Lambda - \Lambda^0)^2 \right\rangle_c = 2 \left\langle (\Lambda - \Lambda^0) \frac{\partial \Lambda^0}{\partial \eta_s} \right\rangle_c = 0. \tag{10}$$

Поскольку Λ^0 зависит от η_s линейно и однородно, то в силу известной теоремы $\sum_{s=1}^{5} \eta_s \frac{\partial \Lambda^0}{\partial \eta_s} = \Lambda^0$, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{5} \eta_s \frac{\partial F}{\partial \eta_s} = 2 \left\langle (\Lambda - \Lambda^0) \sum \eta_s \frac{\partial \Lambda^0}{\partial \eta_s} \right\rangle_c = 2 \left\langle (\Lambda - \Lambda^0) \Lambda^0 \right\rangle_c = 0,$$

или

$$\langle \Lambda \Lambda^0 \rangle_c = \langle \Lambda^{02} \rangle_c. \tag{11}$$

---

* Продольной нормалью [1] мы называем такое направление в кристалле, вдоль которого может распространяться чисто продольная волна.

Поэтому минимальное значение F согласно (1) можно представить в виде

$$F = \langle(\Lambda - \Lambda^0)\rangle_c = \langle \Lambda^2 - \Lambda^{02} \rangle_c = 0. \qquad (12)$$

Соответствующие значения параметров η_s находятся из условий (10), которые сводятся к следующим уравнениям:

$$\langle \Lambda^0 - \Lambda) \rangle_c = 0, \quad \langle n_3^2 (\Lambda^0 - \Lambda)_c + \vec{e}(\Lambda^0 - \Lambda)\vec{e} \rangle = 0, \qquad (13)$$

$$\langle \vec{n}(\Lambda^0 - \Lambda)\vec{n} \rangle = 0, \quad \langle n_3^2 \vec{e}(\Lambda^0 - \Lambda)\vec{e} \rangle = 0, \quad \langle [\vec{e}\vec{n}](\Lambda^0 - \Lambda)[\vec{e}\vec{n}] \rangle = 0.$$

Пользуясь соотношениями [3]

$$\langle n_i n_k \rangle = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \langle n_i n_k n_l n_m \rangle = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) \qquad (14)$$

и вводя обозначения

$$\langle \Lambda \rangle_c = \frac{1}{3} b_1, \quad \langle n_3^2 \Lambda_c \rangle + \langle \vec{e}\Lambda\vec{e} \rangle = \frac{2}{15} b_2,$$

$$\langle \vec{n}\Lambda\vec{n} \rangle = \frac{1}{15} b_3, \quad \langle n_3^2 \vec{e}\Lambda\vec{e} \rangle = \frac{1}{15} b_4, \quad \langle [\vec{e}\vec{n}]\Lambda[\vec{e}\vec{n}] \rangle = \frac{2}{15} b_5, \qquad (15)$$

получим из (13), (5), (6) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
9\eta_1 + 6\eta_2 + 3\eta_3 + \eta_4 + 2\eta_5 &= b_1, \\
15\eta_1 + 17\eta_2 + 5\eta_3 + 4\eta_4 + \eta_5 &= b_2, \\
15\eta_1 + 10\eta_2 + 15\eta_3 + 3\eta_4 &= b_3, \\
5\eta_1 + 8\eta_2 + 3\eta_3 + 3\eta_4 &= b_4, \\
5\eta_1 + \eta_2 + 4\eta_5 &= b_5.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{3}{112}(71b_1 - 30b_2) - \frac{1}{16}(4b_3 - 11b_4 + 12b_5), \\
\eta_2 &= -\frac{3}{112}(75b_1 - 38b_2) + \frac{1}{16}(4b_3 - 15b_4 + 12b_5), \\
\eta_3 &= \frac{1}{4}(-5b_1 + 2b_2 + b_3 - 2b_4 + b_5), \\
\eta_4 &= \frac{1}{16}(55b_1 - 30b_2 - 8b_3 + 35b_4 - 20b_5), \\
\eta_5 &= \frac{1}{8}(-15b_1 + 6b_2 + 2b_3 - 5b_4 + 8b_5).
\end{aligned} \qquad (17)$$

Соотношения (5), (6), (15) и (16) полностью определяют тонзор Λ^0, ближайший в среднем к тензору Λ для рассматриваемого кристалла. Поскольку Λ^0 описывает поперечно-изотропную среду, то разность $\Lambda^1 = \Lambda - \Lambda^0$ будет, очевидно, характеризовать отклонение от поперечной изотропии, т. е. поперечную анизотропию. Аналогично [3] можем определить $\sqrt{F} = \sqrt{<(\Lambda^1)^2>_c}$ как *среднюю квадратичную поперечную упругую анизотропию*, а $\Delta_t = \sqrt{F}/\sqrt{<\Lambda^2>_c}$ как *относительную среднюю поперечную упругую анизотропию*. Величина Δ_t может служить для общей оценки упругих свойств кристалла.

Наряду с Δ_t для оценки поперечной анизотропии можно использовать аналогичное выражение, отличающееся тем, что значения Λ, Λ^0 и $\Lambda^1=\Lambda-\Lambda^0$ берутся для направлений, лежащих в плоскости, перпендикулярной к $\vec{e}$, т. е. полагается $n_3=0$, и усреднение производится по всем направлениям, лежащим в этой плоскости. При этом вместо (14) получим

$$\langle n_i n_k\rangle_\perp = \frac{1}{2}\,\delta_{ik},\quad \langle n_i n_k n_l n_m\rangle_\perp = \frac{1}{8}\,(\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}). \tag{18}$$

Знак $\perp$ указывает на то, что $n_3=0$ и усреднение производится по всем направлениям, перпендикулярным $\vec{e}$. Соответствующая величина, характеризующая относительную среднюю поперечную анизотропию, определяется формулой

$$\Delta_\perp = \sqrt{\frac{\langle\Lambda'^2\rangle_{\perp c}}{\langle\Lambda^2\rangle_{\perp c}}}\,. \tag{19}$$

Рассмотрим с этой точки зрения свойства тетрагональных и тригональных кристаллов. Соотношения (3) справедливы для всех компонентов Λ_{ik} в тетрагональном кристалле, кроме

$$\Lambda_{12} = (c_{12}+c_{66})\,n_1 n_2. \tag{20}$$

Поэтому мы можем представить тензор Λ в виде суммы двух тензоров $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, причем

$$\Lambda_2 = c n_1 n_2 \mu,\quad c = 2c_{66}+c_{12}-c_{11},\quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

а тензор Λ_1 полностью совпадает с тензором (3) для гексагонального кристалла. Очевидно, если мы найдем тензор Λ_2^0 типа (5), ближайший в смысле условия (1) к тензору Λ_2, то тензор $\Lambda^0=\Lambda_1+\Lambda_2^0$ будет ближайшим к Λ. Поэтому задача сводится к вычислению выражений (15) с заменой Λ на Λ_2. Так как $\vec{e}\parallel L^4$, то

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix},\quad [\vec{e}\vec{n}] = \begin{pmatrix} -n_2\\ n_1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует $\Lambda_{2c}=0$, $\Lambda_2\vec{e}=0$, $\vec{n}\Lambda_2\vec{n} = 2cn_1n_2 = -[\vec{e}\vec{n}]\,\Lambda_2\,[\vec{e}\vec{n}]$, после чего из (15) и (14) получаем $b_5=b_3$ $b_1=b_2=b_4=0$. В результате формулы (17) дают

$$\eta_1=\eta_2=\eta_4=\eta_3=\eta_5=0,$$

и тензор Λ_2^0 согласно (5) и (6) принимает вид

$$\Lambda^0=\Lambda_1. \tag{23}$$

Отсюда следует

$$\Lambda' = \Lambda-\Lambda^0 = cn_1n_2\mu.$$

$$(\Lambda'^2)_c = c^2\, 2n_1^2 n_2^2.$$

Величина (Λ'^2) принимает максимальное значение, равное

$$(\Lambda^2)_c = \frac{c^2}{2} \quad \text{при } n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2},\ n_3 = 0,$$

т. е. для направлений $\vec{n}$, лежащих в экваториальной плоскости, делящих пополам углы между плоскостями симметрии. Эти направления образуют угол 90° с осью L^4. В плоскости, перпендикулярной к L^4, имеем $\langle\Lambda'^2\rangle_{\perp c} = \frac{c^2}{4}$. Для среднего значения получим

$$F = \langle(\Lambda - \Lambda^0)^2\rangle_c = \langle\Lambda'^2\rangle_c = \frac{2c^2}{15}. \tag{24}$$

Таким образом, в тетрагональных кристаллах поперечная анизотропия определяется параметром c (21).

Как уже упоминалось, в работе [3] было использовано сравнение тензора Λ для данного кристалла с тензором Λ^0, характеризующим ближайшую по упругим свойствам изотропную среду. При этом было показано, что для кубических кристаллов

$$\langle(\Lambda - \Lambda^0)^2\rangle_c = \frac{4}{25} c_3^2, \tag{25}$$

где $c_3 = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$. Кубический кристалл можно рассматривать как частный случай тетрагонального при условиях $c_{13} = c_{12}$, $c_{33} = c_{11}$, $c_{66} = c_{44}$; при этом согласно (21) $c = -c_3$. Сравнивая (25) и (24), видим, что, как и следовало ожидать, использование в качестве среды сравнения поперечно-изотропной среды приводит к меньшему среднему квадратичному отклонению, т. е. к меньшей ошибке.

Величина F может служить также для оценки ошибки, совершаемой при приближенном решении уравнения (2). Пользуясь обычным методом теории возмущений, ищем решение (2) в виде $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}'$, $\lambda = \lambda_0 + \lambda'$, причем $\Lambda = \Lambda^0 + \Lambda'$, $\Lambda^0\vec{u}_0 = \lambda_0\vec{u}_0$, $\vec{u}_0^2 = 1$. При этом для поправки первого приближения получается известный результат $\lambda' = \vec{u}_0\Lambda'\vec{u}_0$. Очевидно, $\lambda'^2 = (\vec{u}_0\Lambda'\vec{u}_0)^2 \leqslant \vec{u}_0^2 (\Lambda'\vec{u}_0) = u_0\Lambda'^2 u_0$. Но, как известно, максимум квадратичной формы $\vec{u}_0\Lambda'^2\vec{u}_0$ равен наибольшему собственному значению матрицы Λ'^2. Поскольку все собственные значения Λ'^2 неотрицательны, то этот максимум не превышает суммы собственных значений, т. е. $(\Lambda'^2)_c$; поэтому $|\lambda'| \leqslant \sqrt{(\Lambda'^2)_c} = \sqrt{F}$. Таким образом, величина $\sqrt{F}$ (24) ограничивает сверху среднюю квадратичную поправку первого приближения к собственному значению.

В табл. 1 приведены значения величин, характеризующих попереч-

Таблица 1

Кристалл	Sn	$BaTiO_3$	$(NH_4)H_2PO_4$	KH_2PO_4	In	$ZrSiO_4$
c	−0,48	12,5	−4,37	−6,37	1,94	−3,25
Δ_t	0,017	0,041	0,083	0,1	0,11	0,15
$\Delta_\perp$	0,021	0,13	0,25	0,35	0,15	0,16

ную анизотропию некоторых тетрагональных кристаллов, вычисленных на основе данных работы [4]. Из нее видно, что олово и титанат бария выделяются своей малой поперечной анизотропией.

В случае кристаллов тригональной сингонии тензор Λ также можно представить в виде $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, где Λ_1 совпадает с (3), а Λ_2 имеет следующий вид:

$$\Lambda_2 = c_{14}\begin{pmatrix} 2n_2n_3, & 2n_1n_3, & 2n_1n_2 \\ 2n_1n_3, & -2n_2n_3, & n_1^2-n_2^2 \\ 2n_1n_2, & n_1^2-n_2^2, & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Нетрудно убедиться, что $\Lambda_{2c} = \vec{e}\Lambda\vec{e} = 0$, $\vec{n}\Lambda_2\vec{h} = -2[\vec{e}\vec{n}]\Lambda_2[\vec{e}\vec{n}] = 4c_{14}n_2n_3\times(3n_1^2-n_2^2)$. Усреднение дает для всех b_s (15) нулевые значения, следовательно, для тригональных кристаллов $\Lambda^0 = \Lambda_1$, $\Lambda' = \Lambda_2$.

Из (26) следует

$$(\Lambda'^2)_c = 2c_{14}^2(1-n_3^2)(1+3n_3^2), \tag{27}$$

откуда получаем

$$F = \langle\Lambda'^2\rangle_c = \frac{32}{15}c_{14}^2, \quad (\Lambda'^2)_{\perp c} = 2c_{14}^2. \tag{28}$$

Таким образом, в тригональных кристаллах поперечная анизотропия пропорциональна параметру c_{14}.

Согласно (27) максимум $(\Lambda'^2)_c$ и, следовательно, максимальное отклонение тензора Λ^0 от Λ имеет место при $n_3^2=1/3$, т. е. при $\vartheta=\angle(\vec{n}, L^3)=54°50'$. При этом $(\Lambda'^2)_c=\frac{8c_{14}^2}{3}$. Интересно отметить, что согласно (28) $\langle\Lambda'^2\rangle_c = (\Lambda'^2)_{\perp c}$, в то время как для тетрагонального кристалла имеет место обратное неравенство $\langle\Lambda'^2\rangle_c < (\Lambda'^2)_{\perp c}$. В табл. 2 приведены значения $c_{14}F$ и $\Delta_\perp$ для различных тригональных кристаллов [4]. Из таблицы видно, что гематит и турмалин обладают незначительной поперечной анизотропией и, следовательно, мало отличаются по своим упругим свойствам от гексагональных кристаллов. Из рассмотренных кристаллов корунд, кальцит и кварц обладают наибольшей поперечной анизотропией.

Таблица 2

Кристалл	c_{14}	$\Delta_\perp$	Кристалл	c_{14}	$\Delta_\perp$	Кристалл	c_{14}	$\Delta_\perp$
Корунд Al_2O_3	10,1	0,25	Кальцит $CaCO_3$	—2,03	0,19	α — кварц SiO_2	1,73	0,21
Сурьма Sb	1,05	0,17	Гематит Fe_2O_3	—1,03	0,068	Азотнокислый натрий $NaNO_3$	0,82	0,12
Висмут Bi	—0,42	0,09	Ртуть Hg	0,5	0,18	Турмалин —	—0,68	0,032

Аналогичным образом может быть рассмотрена поперечная анизотропия других кристаллов. Помимо общей характеристики упругих свойств кристалла изложенный подход может быть использован для развития приближенной теории упругих волн в кристаллах, основанной на сравнении с поперечно-изотропной средой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 36, 1964.
2. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Изд-во АН БССР, 1958.
3. Федоров Ф. И. «Кристаллография», 8, 213, 1963.
4. Хантингтон Г. «Успехи физических наук», 74, 461—520, 1961.

Поступила в редакцию
25. 11 1963 г.

Кафедра
физики кристаллов