Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1965

Д. Ф. КУРДГЕЛАИДЗЕ

ТЕОРИЯ СЛИЯНИЯ НА ОСНОВЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Развивается «теория слияния» полей на базе гиперкомплексных чисел. Показывается, что релятивистски-инвариантное уравнение при $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ ($A(\gamma_\mu)$ — алгебра Дирака) может содержать описание полей спина $s=0$, $s=1$, а при $\Gamma_\mu=\beta_\mu$ ($A(\beta_\mu)$) — алгебра Кеммера—Дуффина) — поля спина $s=2$. В последнем случае дается нелинейное обобщение уравнения поля и показывается, что структура полученного при этом уравнения поля весьма близка к структуре уравнения Эйнштейна (для свободного поля).

В основе единой теории поля, как известно, лежит так называемая «теория слияния де Бройля». Согласно этой теории все поля (мезонные, гравитационные) следует получать в результате слияния спинорных полей. Математическая реализация указанной идеи требует решения по крайней мере двух вопросов: 1) построения, исходя из спиноров, тензоров любых рангов и 2) получения, исходя из уравнения спинорного поля, уравнения других полей.

Решение первого вопроса хорошо известно. Для решения второго вопроса задачу ставят следующим образом. Пусть задано релятивистско-инвариантное уравнение вида

$$\left\{\Gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + k_0\right\}\psi = 0 \tag{1}$$

и известно, что, если ψ при преобразовании Лоренца преобразуется по спинорному представлению ($D_{\text{спин}} = D_{(0,1/2)} + D_{(1/2,0)}$), то величины $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ образуют алгебру Дирака $A(\gamma_\mu)$, ($\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$). Следует разыскать алгебру $A(\Gamma_\mu)$ в других случаях. Под «другими случаями» понимаются следующие три возможности: 1) задано представление D_a, по которому преобразуется ψ, требуется определить алгебру $A(\Gamma_\mu)$ [1]; 2) задан максимальный спин поля, описываемого уравнением (1), следует определить $A(\Gamma_\mu)$ [2] и 3) представление D_a, по которому преобразуется ψ, задано как прямое произведение спинорных представлений $D_a = \prod^{j} D^{(j)}_{\text{спин}}$ и требуется определить алгебру $A(\Gamma_\mu)$ [3].

При подобной постановке задачи предполагается, что: а) представлениям D_a и $D_a \times D_a$ обязательно соответствуют разные алгебры $A^{(a)}(\Gamma_\mu)$ и $A^{(b)}(\Gamma_\mu)$ и б) исходное релятивистски-инвариантное уравнение поля является линейным. На самом же деле ни первое, ни второе требования не являются обязательными. Рассмотрим случай «а», когда ограничение снято; случай слияния нелинейных уравнений будет рассмотрен отдельно.

Уравнение Дирака в гиперкомплексных числах

Как известно, величины γ_μ в уравнении Дирака

$$\left\{\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + k_0\right\}\psi = 0 \tag{1'}$$

образуют алгебру $A(\gamma_\mu)$ с 16 независимыми элементами, определенную соотношением $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. В связи с этим в общем случае решение уравнения (1) (обозначим его как $\psi_{(16)}$) будет общим вектором алгебры $A(\gamma_\mu)$ и будет иметь 16 независимых компонентов [4]. Его можно записать в виде

$$\psi_{(16)} = \sum_{j=1}^{16} \theta_j \varphi_j, \tag{2}$$

где θ_j — элементы алгебры $A(\gamma_\mu)$; φ_j — 16 независимых компонентов вектора $\psi_{(16)}$.

В алгебре $A(\gamma_\mu)$ можно образовать так называемые операторы делителей нуля Γ_p, порядка $p = {}^1/_2$; ${}^1/_4$; ${}^1/_8$ [4]. Применение, например, $\Gamma_{1/2}$ к (2) приводит к бикватернионам, $\Gamma_{1/4}$ — кватернионам, $\Gamma_{1/8}$ — к комплексному числу (т. е. срезает все другие компоненты). Аналогичным образом если к (1') применим $\Gamma_{1/4}$, то придем к обычному уравнению Дирака с четырехкомпонентной функцией $\psi_{(4)}$ ($\psi_{(4)} = \psi_{(16)}\Gamma_{1/4}$).

Функция $\psi_{(4)}$, как известно, преобразуется по спинорному представлению. Для определения представления, по которому преобразуется $\psi_{(16)}$, следует элементы алгебры $A(\gamma_\mu)$ расклассифицировать по тензорным представлениям. При этом получаем скаляр I, вектор γ_μ, псевдоскаляр γ_5, псевдовектор $\gamma_\mu\gamma_5$ и антисимметричный тензор 2-го ранга $S_{\mu\nu}^{(-)} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Тогда (2) можно записать в виде

$$\psi_{(16)} = I\varphi + \gamma_5\varphi_5 + \gamma_\mu\varphi_\mu + \gamma_\mu\gamma_5\psi_{\mu 5} + S_{\mu\nu}^{(-)}\varphi_{[\mu\nu]}. \tag{2'}$$

Таким образом, $\psi_{(16)}$ преобразуется по приводимому представлению

$$D_{(16)} = D_{(0,0)} + \widetilde{D}_{(0,0)} + D_{({}^1/_2,\, {}^1/_2)} + \widetilde{D}_{({}^1/_2 - {}^1/_2)} + D_{(0,1)} + D_{(1,0)}$$

и содержит скаляр φ, вектор φ_μ, псевдоскаляр φ_5, псевдовектор $\varphi_{\mu 5}$ и антисимметричный тензор 2-го ранга $\varphi_{[\mu\nu]}$. Если (2') подставить в (1'), то для каждого компонента φ_j в отдельности можно получить уравнение мезонного поля в обычном виде [5, 6].

Функцию $\psi_{(16)}$ и представление $D_{(16)}$ можно связать со спинорами $\psi_{(4)}$ и их представлениями. Так, $D_{(16)}$ можно представить как прямое произведение спинорных представлений:

$$D_{(16)}^{\gamma} = D_{\text{спин}} \times D_{\text{спин}}.$$

С другой стороны, если взять всевозможные произведения компонентов $\bar{\psi}_{(4)\alpha}$, $\psi_{(4)\beta}$ и записать их в виде компонентов тензоров вида $(\bar{\psi}_{(4)}\theta_j\psi_{(4)})$, то независимыми будут только $(\bar{\psi}_{(4)}\psi_{(4)})$, $(\bar{\psi}_{(4)}\gamma_5\psi_{(4)})$, $(\bar{\psi}_{(4)}\gamma_\mu\psi_{(4)})$, $(\bar{\psi}_{(4)}S_{\mu\nu}^{(-)}\psi_{(4)})$. Функцию $\psi_{(16)}$ можно представить в виде

$$\psi_{(16)} = C_0 I\,(\overline{\psi}_{(4)}\psi_{(4)}) + C_1\gamma_5\,(\overline{\psi}_{(4)}\gamma_5\,\psi_{(4)}) + C_2\gamma_\mu\,(\overline{\psi}_{(4)}\gamma_\mu\psi_{(4)}) +$$
$$+ C_3\gamma_\mu\gamma_5\,(\overline{\psi}_{(4)}\gamma_\mu\psi_{(4)}) + C_4 S_{\mu\nu}^{(-)}\,(\overline{\psi}_{(4)} S_{\mu\nu}^{(-)}\psi_{(4)}). \qquad (2'')$$

В общем случае $\psi_{(16)}$ в (2), (2′) существует независимо от спинорных полей. Однако если мезонные поля согласно теории слияния рассматривать как результат слияния спинорных полей, то, учитывая (2″), получаем

$$\varphi_j = \text{const}\,(\overline{\psi}_{(4)}\theta_j\,\psi_{(4)}). \qquad (3)$$

Таким образом, в зависимости от числа компонентов решение уравнения Дирака описывает или мезонные поля [7] (16-компонентная функция $\psi_{(16)}$) или спинорные поля [4] (4-компонентная функция $\psi_{(4)}$).

Уравнение (1′) является релятивистски-инвариантным и в случае $\psi_{(16)}$. Действительно, после подстановки (2) в (1′) получаем уравнение, представляющее собой равенство нулю гиперкомплексного числа, т. е. систему 16 независимых (линейных) уравнений. При этом каждое уравнение представляет собой равенство нулю компонентов тензора только данного ранга, что и обеспечивает инвариантность уравнения. Полученная при этом система уравнения, как уже было сказано, сводится к обычным уравнениям известных мезонных полей.

Если взять две алгебры $A(\gamma_\mu)$ и $A(\gamma'_\mu)$, где $\gamma_\mu\gamma'_\nu = \gamma'_\nu\gamma_\mu$ и рассмотреть пару уравнений (1′) соответственно в $A(\gamma_\mu)$ и $A(\gamma'_\mu)$ и сложить их, то придем к уравнению Кеммера—Дуффина [8, 9]:

$$\left\{\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + k_0\right\}\psi = 0, \quad \beta_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu + \gamma'_\mu), \qquad (4)$$

где β_μ удовлетворяет соотношению алгебры Кеммера—Дуффина $A(\beta_\mu)$

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \beta_\lambda\delta_{\mu\nu} + \beta_\mu\delta_{\lambda\nu}. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение (1′) в случае $\psi_{(16)}$ является как бы промежуточным звеном между обычным уравнением Дирака (для $\psi_{(4)}$) и уравнением Кеммера — Дуффина. Оно соответствует случаю, когда для функции уже был совершен переход к пространству функций $\overline{\psi}_{(4)\alpha}\psi_{(4)\beta}$ —соответствующее произведению представлений, но в алгебре такого перехода еще не было проведено. Подобный промежуточный этап при решении определенных задач оказывается целесообразным. Изложенные выше результаты обычно приводят на языке матричного исчисления. Тогда $\psi_{(16)}$ является ундором, а уравнение Дирака с $\psi_{(16)}$ ундорным уравнением [7]. При этом γ_μ в случае $\psi_{(4)}$ — четырехрядная матрица, в случае $\psi_{(16)}$ — 16-рядная матрица (но удовлетворяет алгебре Дирака A (γ_μ)).

Так как в алгебре A (γ_μ) не содержится симметричного тензора 2-го ранга, то и в (2)—(2′) не содержится поля симметричного тензора 2-го ранга $h_{(\mu\nu)}$. Кроме того, поскольку поле $h_{(\mu\nu)}$ должно обладать спином $s=2$, то его и нельзя получить в результате слияния двух спиноров (без орбитального момента). Поле симметричного тензора 2-го ранга представляет большой интерес как в связи с тем, что метрическое (гравитационное) поле Эйнштейна описывается симметричным тензором 2-го ранга, так и в связи с недавно открытым мезонным резононом со спином $s=2$ (с массой покоя $m_f=1200$ *Мэв*). Последний, как известно, должен описываться уравнением Фирца—Паули для симметричного тензора 2-го ранга [11]. Согласно теории слияния поле спина $s=2$ может возникнуть в результате слияния двух векторных мезонов и тем самым вопрос должен быть сформулирован в рамках уравнения Кеммера—Дуффина.

Уравнение Кеммера—Дуффина в гиперкомплексных числах

Уравнение Кеммера—Дуффина можно получить из уравнения Дирака указанным выше путем или на базе теории групп. В последнем случае следует исходить из того, что произведению представлений соответствует произведение алгебр [3] (т. е. $A(\beta_\mu) = A(\gamma_\mu) \times A(\gamma'_\mu)$). После того как из уравнения Дирака было получено уравнение Кеммера—Дуффина, можно все приведенные рассуждения повторить уже на случай уравнения Кеммера—Дуффина.

Величины β_μ в (4), подчиняющиеся (5), образуют алгебру Кеммера—Дуффина $A(\beta_\mu)$ с 126 независимыми элементами [10, 2]. Следовательно, в общем случае решение уравнения (4) будет общим вектором алгебры $A(\beta_\mu)$ и будет иметь 126 независимых компонентов. Его можно записать в виде

$$\Phi_{(126)} = \sum_{j=1}^{126} \theta_j \varphi_j, \tag{6}$$

где θ_j — элементы алгебры $A(\beta_\mu)$, φ_j — 126 независимых компонентов вектора $\Phi_{(126)}$.

Поскольку в алгебре $A(\beta_\mu)$ содержится симметричный тензор 2-го ранга $S^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu)$, то среди компонентов $\Phi_{(126)}$ имеются и компоненты симметричного тензора 2-го ранга $h_{(\mu\nu)}$. Последний можно выделить из (6) в явном виде

$$\Phi_{(126)} = \prod + S^{(+)}_{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где в П включены все остальные члены выражения (6).

Для того чтобы получить уравнения для φ_j компонентов в отдельности (и в частности, для симметричного тензора 2-го ранга $h_{(\mu\nu)}$), выражение (6) или (7) следует подставить в (4) и проанализировать полученную при этом систему 126 линейных уравнений.

Для простоты целесообразно уравнение Кеммера—Дуффина сначала квадрировать, и (6) или (7) подставить уже в квадрированное уравнение.

В этом случае компоненты φ_j (и в частности, $h_{(\mu\nu)}$) будут удовлетворять обычному уравнению Клейна—Гордона

$$(\Box - k_0^2)\varphi_j = 0. \tag{8}$$

Полученные при этом уравнения в случае линейного уравнения Кеммера—Дуффина будут независимыми.

Если дополнительно требовать выполнения условия $\hat{\hat{\Phi}}_{(126)} = \Phi_{(126)}$, то из уравнения (4), в частности в случае поля $h_{(\mu\nu)}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\beta_\mu S^{(+)}_{\alpha\beta} + S^{(+)}_{\alpha\beta}\beta_\mu)\, h_{(\alpha\beta)} = 0, \tag{9}$$

$$\hat{\hat{\Phi}}_{(126)} = \eta_4 \tilde{\Phi}^* \eta_4, \quad \hat{\hat{\psi}}_{(16)} = \gamma_4 \tilde{\psi}^*_{16} \gamma_4,$$

$$\overline{\Phi}_{(16)} = \Phi^*_{(16)}\eta_4, \quad \overline{\psi}_4 = \psi^*_{(4)}\gamma_4, \quad \eta_4 = 2\beta_4^2 - 1.$$

Последнее приводит к условию положительности энергии поля Фирца—Паули [11]:

$$\frac{\partial h_{\mu\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{9'}$$

Таким образом, для $h_{\mu\nu}$ получаем известное уравнение Фирца—Паули поля со спином $s=2$ с нужным дополнительным условием. Как известно, поле $h_{\mu\nu}$ при $k_0=0$ совпадает со слабым гравитационным полем Эйнштейна (без космологического члена) [6].

Для того чтобы в данном случае решить вопрос слияния и, в частности, поле $h_{(\mu\nu)}$ представить как результат слияния мезонных полей, следует исходить из обычного уравнения Кеммера—Дуффина.

Как известно, в обычной теории Кеммера—Дуффина ограничиваются рассмотрением 16-компонентной функции $\Phi_{(16)}$. Последняя содержит псевдоскалярные (скалярные) и векторные (псевдовекторные) поля (и еще один тривиальный компонент—скаляр) и преобразуется по приводимому представлению

$$D^{(\beta)}_{(16)} = D_{(0,0)} + (D_{(0,0)} + D_{(1/2,\,1/2)}) + (D_{(1/2,\,1/2)} + D_{(0,1)} + D_{(0,1)}).$$

Кроме того, известно, что в алгебре $A(\beta_\mu)$ можно образовать тензора [2, 9]

$$p = \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2, \quad p_\mu = p\beta_\mu, \tag{10}$$

и

$$R_\mu = \begin{cases} -\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_\mu\beta_4, & \mu = 1, 2, 3, \\ \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2(1-\beta_4^2), & \mu = 4, \end{cases} \tag{11}$$

$$R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu} = R_\mu\beta_\nu,$$

где p, R_μ или скаляр и псевдовектор или псевдоскаляр и вектор. С помощью указанных тензоров 16-компонентную функцию обычного уравнения Кеммера—Дуффина можно записать в виде гиперкомплексного числа

$$\Phi_{(16)} = I\varphi^\circ + p\varphi + p_\mu\varphi_\mu + R_{\mu\nu}F_{[\mu\nu]}, \tag{12}$$

где φ° — тривиальный компонент, φ — скалярное (или псевдоскалярное) мезонное поле, $\varphi_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$, A_μ — векторное поле, $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$. Если (12) подставить в (4) и учесть, что $p_\mu p_\nu = p\delta_{\mu\nu}$, $R_\mu\beta_\nu\beta_\lambda = R_\mu\delta_{\nu\lambda} - R_\nu\delta_{\mu\lambda}$, то получим обычные уравнения мезонных полей (2-го порядка, без матриц) [2].

Рассмотрим совокупность всевозможных произведений компонентов $\overline{\Phi}_{(16)\alpha}$, $\Phi_{(16)\beta}$ и запишем их как компоненты тензоров вида $(\overline{\Phi}_{(16)}\theta_j\Phi_{(16)})$, где θ_j — элементы алгебры $A_{(\beta_\mu)}$. Так как $A_{(\beta_\mu)}$ имеет только 126 независимых элементов, то из $(16\times16) = 256$ компонентов вида $\overline{\Phi}_{(16)\alpha}\Phi_{(16)\beta}$ только 126 компонентов будут независимыми. Можно и $\Phi_{(126)}$ записать в виде

$$\Phi_{(126)} = \sum_{j=1}^{126} c_j\theta_j(\overline{\Phi}_{(16)}\theta_j\Phi_{(16)}), \tag{13}$$

$$c_j = \text{const},$$

сравнивая (6) с (13), находим, что

$$\varphi_j = \text{const}\,(\overline{\Phi}_{(16)}\theta_j\Phi_{(16)}). \tag{14}$$

В частности, для симметричного тензора 2-го ранга получаем

$$h_{(\mu\nu)} = \text{const}\,(\overline{\Phi}_{(16)}S^{(+)}_{\mu\nu}\Phi_{(16)}), \tag{15}$$

$$S^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu).$$

Как следует из (13), условие $\hat{\bar{\Phi}}_{(126)} = \Phi_{(126)}$ (использованное нами) равносильно требованию $c_j^* = c_j$.

Если $\bar{\Phi}_{(16)}$ и $\Phi_{(16)}$ в (13) или (14), (15) выразить через спиноры согласно (3) (учитывая, что $\Phi_{(16)}$ в качестве компонентов содержит как функции поля, так и их некоторые первые производные), то получаем связь симметричного тензора 2-го ранга со спинорным полем.

Функция $\Phi_{(126)}$ преобразуется по приводимому представлению, и так как она является вектором в алгебре $A(\beta_\mu)$, то в ней содержатся те же тензоры, что и в алгебре $A(\beta_\mu)$. В $A(\beta_\mu)$ можно образовать следующие независимые тензоры:

		число компонентов
1	скаляр	1
β_μ	вектор	4
$\beta_\mu\beta_\nu \equiv \left(S^{(+)}_{\mu\nu} + S^{(-)}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} S^{(+)}_{\lambda\lambda}\delta_{\mu\nu}\right)$	тензор 2-го ранга (симметр. + антисимметр. + + скаляр)	16 = (9+6+1)
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda$	тензор 3-го ранга	64 = 4(9+6+1)
$\beta_5 \equiv \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$	псевдоскаляр (антисимметр. тензор 4-го ранга)	1
$\beta_\mu\beta_5$	псевдовектор	4
$\beta_5\left(S^{(-)}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} S^{(+)}_{\lambda\lambda}\delta_{\mu\nu}\right)$	—	7 = (6+1)
$\beta_\mu\beta_5\left(S^{(-)}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} S^{(+)}_{\rho\rho}\delta_{\mu\nu}\right)$	—	28 = 4(6+1)
$p = \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2$	—	1
	Всего . . .	126

Величину $\Phi_{(126)}$ можно записать в явном виде

$$\Phi_{(126)} = p\varphi^\circ + I\varphi + \beta_\mu\varphi_\mu + S^{(+)}_{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} + S^{(-)}_{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} + \frac{1}{4} S^{(+)}_{\lambda\lambda}\varphi_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} +$$
$$+ \beta_\mu S^{(+)}_{\nu\lambda}\varphi_{\mu(\nu\lambda)} + \beta_\mu S^{(+)}_{\lambda\nu}\varphi_{\mu[\lambda\nu]} + \frac{1}{4}\beta_\mu S^{(+)}_{\lambda\lambda}\delta_{\nu\mu}\varphi_{\mu\nu} +$$
$$+ \beta_5\tilde{\varphi} + \beta_\mu\beta_5\tilde{\varphi}_\mu + \beta_5 S^{(-)}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \frac{1}{4}\beta_5 S^{(+)}_{\lambda\lambda}\delta_{\nu\mu}\tilde{\varphi}_{\mu\nu} +$$
$$+ \beta_5\beta_\mu S^{(-)}_{\nu\lambda}\tilde{\varphi}_{\mu[\nu\lambda]} + \beta_5\beta_\mu \frac{1}{4} S^{(+)}_{\rho\rho}\delta_{\nu\lambda}\tilde{\varphi}_{\mu(\nu\lambda)}, \qquad (16)$$

где $\varphi_{(\mu\nu)}$, $\varphi_{[\mu\nu]}$ — симметричные и антисимметричные тензоры 2-го ранга.

Нелинейное уравнение поля симметричного тензора 2-го ранга

Нелинейное обобщение уравнения поля симметричного тензора 2-го ранга без метрических свойств представляет интерес по крайней мере в двух отношниях: как нелинейное обобщение уравнения поля (уже реально существующего мезона спина $s=2$) в рамках общей программы нелинеаризации уравнения полей и как переход к нелинейному уравнению для поля, отличного от поля Эйнштейна только отсутствием метрических свойств (при $k_0=0$). Путем сопоставления свойств указанных двух нелинейных полей (симметричного тензора 2-го ранга с метрическими и без метрических свойств), возможно, удастся в какой-то мере разделить в поле Эйнштейна свойства, связанные с его метрическим и нелинейным характером.

Нелинейное обобщение поля спина $s=2$ можно начать с нелинейного обобщения уравнения Фирца—Паули. Обычно таким путем идут при построении нелинейных уравнений слабого гравитационного поля (при $k_0=0$). Однако нас интересует нелинейное обобщение в рамках релятивистски-инвариантных уравнений первого порядка. Как было показано, поле $h_{(\mu\nu)}$ содержится в уравнении Кеммера — Дуффина, если решение последнего рассмотреть в рамках полной алгебры $A(\beta_\mu)$. При этом решение $\Phi_{(126)}$ согласно (10), (14) при $c_j^*=c_j$ обладает свойством $\hat{\hat{\Phi}}_{(126)} = \Phi_{(126)}$. Мы ограничимся рассмотрением случая $c_j^*=c_j$. В алгебре $A(\beta_\mu)$ нелинейной добавкой в уравнении (4) может быть любая дифференцируемая функция $f(\Phi_{(126)})$, т. е. соответствующее нелинейно-обобщенное уравнение может иметь вид *

$$\beta_\mu \frac{\partial \Phi_{(126)}}{\partial x_\mu} + f(\Phi_{(126)}) = 0. \tag{17}$$

Подставляя (6) или (14) в (17), получаем систему 126 нелинейных уравнений. Среди указанных уравнений будут и нелинейные уравнения для компонент $h_{(\mu\nu)}$. Однако ввиду сложности анализа полученной системы целесообразно исходить из квадрированного нелинейного уравнения.

Уравнение (17) можно квадрировать обычным путем.

Тогда получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(126)}}{\partial x_\mu^2} + D(\Phi_{(126)}) \left(\frac{\partial \Phi_{(126)}}{\partial x_\mu} \right)^2 = 0(\lambda_0^2), \tag{18}$$

где

$$D(\Phi_{(126)}) \equiv \frac{f''}{f'}, \quad f(\Phi_{(126)}) \equiv \lambda_0 \int\limits_0^{\Phi_{(126)}} \exp\left\{ \int\limits_0^{\eta} D(\xi)\, d\xi \right\} d\eta,$$

$$f' \equiv \frac{df}{d\Phi_{(126)}}, \quad 0(\lambda_0^2) \equiv -f^2 \left\{ \frac{f''}{f'} + \frac{f'}{f} \right\} \simeq \lambda_0^2 \{\ldots\}. \tag{19}$$

---

* Затравочная масса покоя в явном виде в уравнении не содержится. Масса покоя должна определяться из уравнения поля. При этом возможны как состояния с $k_0 \neq 0$, так и с $k_0=0$. В случае поля симметричного тензора 2-го ранга $h_{(\mu\nu)}$ состояние с $k_0 \neq 0$ экспериментально уже обнаружено (f — резононон, $s=2$, $m_f \approx 1250$ *Мэв*). Однако возможно существование еще и состояния с $k_0=0$. Последнее будет дальнодействующим полем (но без метрических свойств).

При этом $D(\Phi_{(126)})$ — произвольная нелинейная функция, λ_0 — произвольный постоянный параметр. Правая сторона уравнения $\sim\lambda_0^2$, в то время как левая от λ_0 не зависит. Если теперь рассмотреть случай $\lambda_0 \to 0$ ($\lambda_0 \neq 0$), то правой частью в (18) можно пренебречь.

Подставляя (6) или (13) в (18), можно выделить уравнения для отдельных компонентов $\Phi_{(126)}$. Однако уравнения будут нелинейными и будут содержать члены, учитывающие взаимодействие разных полей друг с другом. Уравнения, учитывающие только самовоздействия, можно выделить только приближенно (отбрасывая члены, учитывающие взаимодействие с другими полями).

Если в (18) подставить $D_{(126)}$ в виде (7) и отбрасывать члены, содержащие П, то получаем

$$S_{\alpha\beta}^{(+)} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu^2} + S_{\gamma\delta}^{(+)} S_{\lambda\eta}^{(+)} D\left(S_{\rho\sigma}^{(+)} h_{\rho\sigma}\right) \frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial h_{\lambda\eta}}{\partial x_\mu} = 0\left(\lambda_0^2\right). \tag{20}$$

Выделяя из второго слагаемого только члены, удовлетворяющие условию

$$S_{\gamma\delta}^{(+)} S_{\lambda\eta}^{(+)} D\left(S_{\rho\sigma}^{(+)} h_{\rho\sigma}\right) = S_{\alpha\beta}^{(+)}\left(h_{..} \cdots h_{..}\right), \tag{21}$$

получаем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu^2} + \sum_a \left(D\left(h_{..} \cdots\right) \frac{\partial h_{..}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial h_{..}}{\partial x_\mu}\right)_{\alpha\beta} = \underset{\alpha\beta}{0}\left(\lambda_0^2\right), \tag{22}$$

где суммирование ведется по членам, допускаемым соотношением (21).

Если уравнение (22) переписать в криволинейной гармонической ($\Gamma^{(\mu)} = 0$) системе координат [12], то получаем

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_a g^{\mu\nu} \left(D\left(h_{..} \cdots\right) \left(\frac{\partial h_{..}}{\partial x_\mu}\right) \left(\frac{\partial h_{..}}{\partial x_\mu}\right)\right)_{\alpha\beta} = 0_{\alpha\beta}\left(\lambda_0^2\right). \tag{23}$$

Напомним, что уравнение Эйнштейна в той же ($\Gamma^\mu = 0$) системе координат имеет вид [12]

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 2\Gamma^{\alpha,\mu\nu} \Gamma_{,\mu\nu}^{\beta} \equiv \sum_j \varepsilon_j p_j g^{\alpha\cdot} g^{\beta\cdot} g^{\cdot\cdot} \left(\frac{\partial g_{..}}{\partial x_.}\right) \left(\frac{\partial g_{..}}{\partial x_.}\right), \tag{24}$$

где $\sum_j$ — знак суммирования, ε_j — знаковая функция, p_j — оператор упорядочения индексов (обеспечивающий нужные тензорные размерности). Если действия операторов $\sum_j$, ε_j, p_j определены подобающим образом, то имеем точное уравнение Эйнштейна, в противном случае получаем только структуру уравнения.

Сравнивая (23) и (24), находим, что структуры обоих уравнений фактически совпадают. Другими словами, из трех основных свойств поля Эйнштейна: метрического характера, тензорной размерности и нелинейности поля — структуру уравнения поля определяют в основном два последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И., Яглом А. ЖЭТФ, 18, 703, 1948; Федоров Ф. И. ДАН СССР, 79, 787, 1951, ЖЭТФ, 35, 493, 1958.
2. Умэдзава Х. Квантовая теория поля. ИЛ, М., 1956.
3. Шелепин А. ЖЭТФ, 34, 1574, 1958; 37, 1626, 1959; 40, 1369, 1961.

4. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры, т. II. ИЛ, М., 1956, стр. 203.
5. Klein A. Phys. Rev., **82**, 639, 1951; М. Мерианошвили, диссертация. Госуниверситет, Тбилиси, 1958.
6. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля. Гостехиздат, 1952.
7. Belinfante F. Physica, **6**, 849, 1939; **6**, 870, 1939.
8. Соколик Г. ЖЭТФ, **28**, 13, 1955; ДАН СССР, **106**, 429, 1956.
9. Боргарт А. ЖЭТФ, **30**, 335, 1956; Nuovo cim., **10** (5), 102, 1957.
10. Kemmer H. Proc. Roy. Soc., **A173**, 91, 1939.
11. Pauli W., Hierz M. Proc. Roy. Soc., **A173**, 212, 1939.
12. Фок В. Теория пространства времени и тяготения. Гостехиздат, 1955, стр. 240.

Поступила в редакцию
10. I 1964 г.

Кафедра
теоретической физики