Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1965

Ю. И. ИВАНОВ

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Задача двух неподвижных центров принадлежит к числу немногих интегрируемых задач динамики. Последнее время в работах Е. П. Аксенова, Е. А. Гребеникова, В. Г. Демина [1, 2] было показано, что силовая функция двух неподвижных центров при подходящем выборе параметров может хорошо аппроксимировать потенциал притяжения Земли. Возможность практических приложений стимулирует разностороннее теоретическое исследование этой задачи: выбор наиболее удобных переменных, качественный анализ, получение приближенных рабочих формул и т. п. Некоторым из этих вопросов посвящена данная статья.

§ 1

Наша цель — исследовать движение материальной точки в консервативном поле с силовой (вещественной) функцией [2]:

$$U = f\left\{ \frac{\frac{M}{2}(1-i\sigma)}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(-\sigma+i)]^2}} + \frac{\frac{M}{2}(1+i\sigma)}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(-\sigma-i)]^2}} \right\}, \tag{1}$$

где M, c, σ — данные постоянные. Отметим, что силовая функция (1) обращается в ∞ на окружности $x^2+y^2=c$, $z=-c\sigma$ и при обходе вокруг этой окружности меняет знак. Чтобы устранить двузначность, запретим траекториям пересекать круг

$$x^2+y^2 \leqslant c, \quad z=-c\sigma, \tag{2}$$

который будем называть «поглощающим».

Перейдем теперь к сфероидальным координатам по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2+c^2}\cos\varphi\cos w, \\ y &= \sqrt{r^2+c^2}\cos\varphi\sin w, \\ z &= -c\sigma + r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь w — обычная долгота. Не разъясняя геометрического значения переменных r и φ [3], укажем только, что при $c=0$ сфероидальные координаты вырождаются в сферические.

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать вместо φ переменную $\mu=\sin\varphi$. В новых координатах r, μ, w «поглощающий» круг аналитически записывается уравнением $r=0$, а запрещение его пересечения сводится к условию $r \geqslant 0$.

Окончательно границы изменения новых переменных запишутся

$$r \geqslant 0, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant w < 2\pi.$$

Используем и то обстоятельство, что при $c=0$ имеем $U=\frac{fm}{r}$, наша задача сводится к задаче одного неподвижного центра. Общее решение этой задачи, полученное по способу Гамильтона—Якоби [4, 5], содержит как произвольные постоянные канонические элементы Якоби, имеющие прозрачный геометрический смысл и легко выражающиеся через обычные кеплеровские элементы. Постараемся, насколько это возможно, обобщить получающиеся соотношения на случай $c \neq 0$.

Легко видеть, что в сфероидальных координатах силовая функция (1) имеет вид

$$U = fM\,\frac{r+\sigma c\mu}{r^2+c^2\mu^2}\,, \tag{4}$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{r^2+c^2\mu^2}{r^2+c^2}\,\dot{r}^2 + \frac{r^2+c^2\mu^2}{1-\mu^2}\,\dot{\mu}^2 + (r^2+c^2)(1-\mu^2)\,\dot{w}^2\right]. \tag{5}$$

Таким образом, уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{r^2+c^2}{r^2+c^2\mu^2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1-\mu^2}{r^2+c^2\mu^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{(r^2+c^2)(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2\right] - fM\,\frac{r+\sigma c\mu}{r^2+c^2\mu^2} = 0 \tag{6}$$

и нетрудно проверить, что полный интеграл уравнения (6) можно представить формулой [6]

$$W = -ht + \alpha_3 w + \int\limits_{\bar{r}}^{r} \frac{\sqrt{R(r)}\,dr}{r^2+c^2} + \int\limits_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2}\,, \tag{7}$$

где

$$R(r) = (r^2+c^2)(2hr^2+2fMr-\alpha_2)+\alpha_3^2c^2, \tag{8}$$

$$M(\mu) = (1-\mu^2)(2hc^2\mu^2-2fMc\sigma\mu+\alpha_2)-\alpha_3^2, \tag{9}$$

$\alpha_1=h$, α_2, α_3 — канонические постоянные, а $\bar{r}$ и $\bar{\mu}$ могут быть выбраны произвольно. Мы будем только требовать, чтобы производные каждого из интегралов по нижнему пределу равнялись нулю. Это осуществимо в двух случаях: во-первых, если мы придадим нижнему пределу фиксированное числовое значение и, во-вторых, если мы возьмем в качестве нижнего предела один из корней подрадикального выражения.

Общий интеграл нашей задачи напишется в виде

$$\int\limits_{\bar{r}}^{r} \frac{r^2\,dr}{\sqrt{R(r)}} + \int\limits_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{c^2\mu^2\,d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = t+\beta_1, \tag{10}$$

$$-\int\limits_{\bar{r}}^{r} \frac{dr}{2\sqrt{R(r)}} + \int\limits_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{d\mu}{2\sqrt{M(\mu)}} = \beta_2, \tag{11}$$

$$w+\alpha_3\int\limits_{\underline{r}}^{r}\frac{c^2\,dr}{(r^2+c^2)\sqrt{R(r)}}-\alpha_3\int\limits_{\underline{\mu}}^{\mu}\frac{\alpha\mu}{(1-\mu^2)\sqrt{M(\mu)}}=\beta_3, \tag{12}$$

где β_1, β_2, β_3 — вторая группа канонических постоянных.

Выпишем выражения канонических постоянных через кеплеровские элементы в случае, когда $c=0$ [4, 5]:

$$\begin{gathered} h=-\frac{fM(1-e^2)}{2p},\quad \alpha_2=fMp,\quad \alpha_3=\sqrt{fMp}\cos i,\\ \beta_1=-T,\quad \beta_2=\frac{\omega}{2\sqrt{fMp}},\quad \beta_3=\eta. \end{gathered} \tag{13}$$

Обобщим соотношения (13) на случай, когда $c\neq 0$.

Положим

$$p=\begin{cases}\dfrac{\alpha_2}{fM} & \alpha_2>0,\\ 1 & \alpha_2=0,\\ \dfrac{|\alpha_2|}{fM} & \alpha_2<0\end{cases} \tag{14}$$

и при любых α_2

$$a=-\frac{fM}{2h},\quad \varepsilon=-\frac{p}{a}=\frac{2h\,|\alpha_2|}{(fM)^2},\quad I^2=\frac{\alpha_3^2}{p}, \tag{15}$$

$$T=-\beta_1,\quad \omega=2\beta_2\sqrt{fMp},\qquad \eta=\beta_3 \tag{16}$$

очевидно, что при $c=0$ имеем $\varepsilon=e^2-1$ и $I=\cos i$.

Подстановка (14) и (15) в (8) и (9) дает

$$R(r)=fMp\left[(r^2+c^2)\left(\varepsilon\frac{r^2}{p^2}+2\frac{r}{p}-sgn\alpha_2\right)+c^2I^2\right], \tag{8$'$}$$

$$M(\mu)=fMp\left[(1-\mu^2)\left(\varepsilon\frac{c^2\mu^2}{p^2}-2\sigma\frac{c\mu}{p}+sgn\alpha_2\right)-I^2\right]. \tag{9$'$}$$

Очень удобным является введение следующих переменных:

$$\rho=\frac{r}{p},\quad \frac{c\sigma\mu}{p}=m,\quad \frac{c_2}{p^2}=\alpha,\quad \varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\sigma^2},\quad \alpha'=\alpha\sigma^2. \tag{17}$$

Выражения (8) и (9) примут тогда вид

$$R(r)=fM\rho^3R_1(\rho), \tag{8$''$}$$

$$R_1(\rho)=(\rho^2+\alpha)(\varepsilon\rho^2+2\rho-sgn\alpha_2)+\alpha I^2, \tag{8$'''$}$$

$$M(\mu)=\frac{fMp^3}{c^2\sigma^2}M_1(m), \tag{9$''$}$$

$$M_1(m)=(\alpha'-m^2)(\varepsilon'm^2+2m+sgn\alpha_2)-\alpha'I^2. \tag{9$'''$}$$

Следуя аналогии с кеплеровской задачей, введем еще две новые переменные

$$v=\sqrt{fMp}\int\limits_{\underline{r}}^{r}\frac{dr}{\sqrt{R(r)}}=\int\limits_{\underline{\rho}}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{R_1(\rho)}}, \tag{18}$$

$$u = \sqrt{fMp}\int\limits_{\underline{\mu}}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \int\limits_{\underline{m}}^{m}\frac{dm}{M_1(m)}. \tag{19}$$

Обращение интегралов (18) и (19) дает ρ и m как функции v, u, α, ε, I^2. Отложив на время изучение этих функций, посмотрим, как запишутся в новых переменных интегралы (10), (11) и (12). Очевидно, мы имеем

$$u - v = \omega, \tag{11'}$$

$$w + I\int\limits_0^v \frac{\alpha}{\rho^2(v)+\alpha}\,dv - I\int\limits_0^u \frac{du}{1-\mu^2(u)} = \eta, \tag{12'}$$

$$\int\limits_0^v \rho^2(v)\,dv + \int\limits_0^u \frac{m^2(u)}{\sigma^2}\,du = \frac{\sqrt{fM}}{p^{3/2}}(t-T). \tag{10'}$$

Соотношение (11′) показывает, что u и v не являются существенно различными. Учитывая, что $du=dv$, получаем из (10′):

$$dv = \frac{\sqrt{fM}}{p^{3/2}}\,\frac{1}{\rho^2(v)+\dfrac{m^2(v+\omega)}{\sigma^2}}\,dt. \tag{20}$$

Очевидно, v (а следовательно, и u) монотонно зависит от времени. Замечаем, что (10′) определяет v как функцию времени, а (18′), (19′) и (12′) определяют ρ, m и w как функции v. Тем самым исходные координаты, r, μ и w могут быть выражены как функции элементов и времени.

§ 2

Качественный и количественный анализ движения в своих самых существенных чертах зависит от свойств полиномов $R_1(\rho)$ и $M_1(m)$. Оказывается достаточно рассмотреть и изучить свойства всего лишь одного полинома при фиксированном значении sgn α_2, так как все другие полиномы легко выражаются через выделенный. В самом деле, рассмотрим функцию четырех аргументов

$$p(x;\ \alpha,\ \varepsilon,\ I^2) = (x^2+\alpha)(\varepsilon x^2 + 2x - 1) + \alpha I^2. \tag{21}$$

Видим, что

$$(\rho^2+\alpha)(\varepsilon\rho^2+2\rho-1)+\alpha I^2 = p(\rho;\ \alpha,\ \varepsilon,\ I^2), \tag{22}$$

$$(\rho^2+\alpha)(\varepsilon\rho^2+2\rho+1)+\alpha I^2 = -p(-\rho;\ \alpha,\ -\varepsilon,\ I^2), \tag{23}$$

$$(m^2-\alpha')(-\varepsilon' m^2+2m-1)-\alpha' I^2 = p(m,\ -\alpha',\ -\varepsilon',\ I^2), \tag{24}$$

$$(m^2-\alpha')(-\varepsilon' m^2+2m+1)-\alpha' I^2 = -p(-m;\ -\alpha',\ \varepsilon';\ I^2), \tag{25}$$

$$(\rho^2+\alpha)(\varepsilon\rho^2+2\rho)+\alpha I^2 = \lim_{\gamma\to 0}\gamma^3 p\left(\frac{\rho}{\gamma},\ \frac{\alpha}{\gamma^2},\ \varepsilon\gamma,\ \frac{I^2}{\gamma}\right). \tag{26}$$

Аналогичные выражения можно получить и для вещественных вариантов задачи двух неподвижных центров, так что существует тесная связь между функцией $p(x;\ \alpha,\ \varepsilon,\ I^2)$ и общей проблемой двух неподвижных центров.

§ 3

Займемся изучением вопросов, связанных с обращением эллиптического интеграла. Хотя во многих руководствах [7, 8, 9] даются алгоритмы обращения интегралов, но при этом предполагается, что корни подрадикального полинома заданы численно и не исследуется зависимость результата от переменных параметров. Поэтому и по ряду других причин мы считаем полезным изложить краткую теорию обращения, приспособленную специально к интересующему нас случаю и несколько отличающуюся по стилю от даваемых в вышеназванных руководствах.

Пусть имеется эллиптический интеграл вида

$$\int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}} = \varphi \tag{33}$$

и требуется выразить x как функцию φ.

Эта задача может считаться решенной, если нам удастся привести интеграл (33) к виду

$$\int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{dy}{l\sqrt{\pm(y^2 \pm h^2)(y^2 \pm g^2)}} = \varphi. \tag{34}$$

В самом деле, обращение интеграла (34) не представляет труда. Результаты хорошо изучены и можно воспользоваться таблицами в [8].

Отметим, что дробнолинейные преобразования оставляют инвариантной форму интеграла (33).

Если $x = Ty = \dfrac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$, то

$$\int\limits_{\overline{x}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}} = \int\limits_{\overline{y}}^{y} \frac{dy}{\pm\sqrt{b_0(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}}, \tag{35}$$

в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой. Легко при этом понять, что новые корни выражаются через старые соотношения

$$y_i = T^{-1}x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{36}$$

Задачу о переходе от (33) к (34) можно сформулировать так. Ищется дробнолинейное преобразование, которое переводило бы 4 точки комплексной плоскости x_1, x_2, x_3, x_4 на крест действительной и мнимой осей в симметричные относительно начала координат пары. Решая эту задачу, сначала преобразованием инверсии добьемся, чтобы корни были попарно симметричны относительно некоторой точки действительной оси b и затем произведем преобразование сдвига на b.

Положим

$$x_1 + x_2 = -2m, \ x_1x_2 = n, \ x_3 + x_4 = -2p, \ x_3x_4 = q. \tag{37}$$

Преобразование инверсии определяется формулой

$$y_i = \frac{1}{x_i - a}. \tag{38}$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_3+y_4}{2} \tag{39}$$

или, выражая через x,

$$-\frac{m+a}{a^2+2ma+n}=-\frac{p+a}{a^2+2pa+q}. \qquad (40)$$

Отсюда a удовлетворяет квадратному уравнению

$$(p-m)a^2-(n-q)a+mq-np=0. \qquad (41)$$

После того как корни уравнения (41) будут найдены, для каждого a вычисляем b по формуле

$$b=\frac{m+a}{a^2+2ma+n}, \qquad (42)$$

и тогда преобразование

$$y=b+\frac{1}{x-a} \qquad (43)$$

решает поставленную задачу, а следовательно, обратное преобразование

$$x=a+\frac{1}{y-b}$$

переводит интеграл вида (33) к каноническому виду (34).

Исследование дискриминанта $\Delta=(x_1-x_2)(x_2-x_3)\times(x_1-x_4)(x_2-x_4)$ уравнения (42) показывает, что это уравнение допускает действительные решения, если пары (x_1, x_2) и (x_3, x_4) правильно подобраны: так комплексно-сопряженные корни должны включаться в одну пару, а если все корни действительные различны, необходимо, чтобы либо $[x_1x_2]\cap\cap[x_3x_4]=\varnothing$, либо $[x_1x_2]\subset[x_3x_4]$, либо $[x_3x_4]\subset[x_1x_2]$. Симметризация корней невозможна при наличии тройного корня, не являющегося четырехкратным. Все это легко усматривается и из геометрических свойств дробнолинейных преобразований.

Отметим, что неподвижные точки преобразования (43) $\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ лежат на действительной оси. Будучи действительным, это преобразование оставляет инвариантной действительную ось и поэтому по классификации Пуанкаре принадлежит к классу гиперболических фуксовых преобразований [10].

Важно заметить, что некоторые особенности расположения корней остаются инвариантными при действительных дробнолинейных преобразованиях. Это позволяет по начальному расположению корней предвидеть общий вид канонической формы (34). В самом деле, каждой паре комплексно-сопряженных корней x_i отвечает пара чисто мнимых корней y_i и, следовательно, знак плюс перед g^2. Паре действительных x_i — пара действительных (но симметрично расположенных) y_i и минус перед g^2. Таким образом, можно сразу установить, какой из трех видов канонической формы установится в конечном итоге:

2 пары комплексно-сопряженных корней

$$(y^2+g^2)\ (y^2+h^2),$$

все корни действительные

$$(y^2-g^2)\ (y^2-h^2),$$

пара комплексных и два действительных корня

$$(y^2-g^2)\ (y^2+h^2).$$

При этом знак перед произведением скобок совпадает со знаком полинома от x при $x=a$.

Укажем еще, что модуль эллиптического интеграла k в канонической форме Лежандра во всех вариантах выражается просто через отношение $\frac{g}{h}$, а именно возможны только следующие случаи:

$$k^2 = \frac{g^2}{h^2}, \quad \frac{1}{1+\frac{g^2}{h^2}}, \quad 1-\frac{g^2}{h^2}$$

или получающиеся из них циклической заменой h и g. С другой стороны, как показывает проверка, двойное отношение корней во всех трех вариантах может быть выражено через $\frac{g}{h}$. Но двойное отношение является инвариантом группы дробнолинейных преобразований, поэтому k может быть выражено непосредственно через двойное отношение корней x_i.

После сделанных замечаний, полученных из самых общих соображений, приведем окончательную каноническую форму (34) для интеграла (33)

$$\varphi = -\int\limits_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{p(a)\left[y^2 - \frac{m^2-n}{p_1^2(a)}\right]\left[y^2 - \frac{p^2-q}{p_2^2(a)}\right]}}, \tag{34'}$$

где

$$p_1(x) = x^2 + 2mx + n,$$

$$p_2(x) = x^2 - 2px + q,$$

$$p(x) = a_0 p_1(x)\, p_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Прилагая рассматриваемую схему к задаче о движении спутников в поле тяготения Земли, мы можем воспользоваться тем, что α в случае реальных движений мало ($p \sim 1$, $c \sim \frac{1}{30}$ [1], $\alpha < 10^{-3}$), и получить некоторые приближенные формулы, применяя разложения в ряды по степеням α. Пренебрегая величинами порядка α^2, находим, что интеграл

$$v = \int\limits_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{p(\rho;\alpha,\varepsilon,I^2)}} \tag{18'}$$

заменой

$$\rho = -(1-2I^2)\alpha + \frac{1}{1+\alpha(2+\varepsilon)(4I^2-1)+J} \tag{45}$$

приводится к виду

$$v = \int\limits_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{[\alpha(1-J^2)y + 1 + \alpha(1-6J-e^2J^2)] \times [e^2 + \alpha(J^2 - 4e^2 + 14e^2J^2 + e^4J^2) - y^2]}. \tag{46}$$

Здесь символ $e^2 = \varepsilon + 1$ может быть и отрицательным.

Положим $\bar{\rho} = \frac{1}{1+e} + O(\alpha)$, тогда $\bar{y} = e + O(\alpha)$ и обращение интеграла (46) дает

$$y = \sqrt{e^2 + \alpha(J^2 - 4e^2 + 14eJ^2 + e^4J^2)}\quad k^2 = \alpha e^2(1-J^2). \tag{48}$$

Формулы (45) и (48) устанавливают связь x с v.

Для координаты m имеем

$$u = \int\limits_{\bar{m}}^{m} \frac{dm}{\sqrt{p(m; -\alpha', -\varepsilon', I^2)}}, \tag{19'}$$

На первом этапе можем воспользоваться заменой, аналогичной (45):

$$m = (1 - 2I^2)\alpha' + \frac{1}{1 - \alpha'(2 - \varepsilon')(4I^2 - 1) + z}. \tag{45'}$$

Приходим к выражению, аналогичному (46):

$$u = \int\limits_{\bar{z}}^{z} \frac{dz}{[-\alpha'(1-I^2)z^2+1-\alpha'(1-7I^2+\varepsilon' I^2)][1-\varepsilon'+\alpha'(16I^2-4+4\varepsilon'-16\varepsilon' I^2+\varepsilon'^2 I^2)-z^2]}. \tag{46'}$$

Пусть $\bar{m} = 0(\alpha)$, тогда

$$z = \frac{1}{\sqrt{\alpha'(1-I^2)}\,\mathrm{sn}\left[1 - \frac{\alpha'}{2}(1 - 7I^2 + \varepsilon' I^2)\right]u}, \quad k^2 = (1 - \varepsilon')\,\alpha'(1 - I^2). \tag{49}$$

Формулы (45') и (49) дают выражение m через u. Если учесть, что $\alpha' \sim \alpha^2$, $\alpha'\varepsilon' = \alpha\varepsilon \sim \alpha$ и что $\mu = \frac{m}{\sqrt{\alpha'}}$, с точностью до α получаем выражение для μ

$$\mu = (1 - 2I^2)\sqrt{\alpha\sigma^2} + \sqrt{1 - I^2}\,\mathrm{sn}\left(1 - \frac{\alpha\varepsilon}{2} I^2\right) \text{ и } k^2 = -\varepsilon\alpha(1 - I^2). \tag{50}$$

Подставляя найденные для ρ и m выражения в (10'), получим v как функцию времени и элементов с точностью до α. Даже в кеплеровском случае приходится варьировать методы решения уравнения (10') в зависимости от эксцентриситета, в общем случае задача еще более осложняется. Мы не занимались этой проблемой, но, по-видимому, решение ее надо искать на пути замены с заданной точностью эллиптических функций функциями тригонометрическими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.
2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел. Изд-во АН СССР, 1963.
3. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
4. Дубошин Г. Н. Небесная механика, Основные задачи и методы. ГИТТЛ, 1963.
5. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. 2. Гостехиздат, 1937.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., 1961.
7. Appell P., Lacour E. Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications. Paris. Gauthier — Villars et Fils, 1897.
8. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.—Л., 1941.
9. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. М.—Л., 1936.
10. Стойлов С. Теория функций комплексного переменного, т. 1. М., 1962.

Поступила в редакцию
3.1 1964 г.

Кафедра
небесной механики и
гравиметрии