Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1965

В. В. АЛЕКСЕЕВ, В. И. ГРИГОРЬЕВ

ОБ ОПИСАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается вопрос об описании в представлении взаимодействия таких физических систем, для которых метод адиабатического включения и выключения взаимодействий не является оправданным. Записываются уравнения для S-матрицы, собственные значения которых определяют энергию, и т. д.

Аппарат S-матрицы и представление взаимодействия весьма удобны для исследования процессов «типа рассеяния», когда оправдано представление об асимптотическом включении и выключении взаимодействия. Однако, вопреки высказывавшимся подчас утверждениям (см., например, [1, 2]), стационарные состояния можно изучать, также пользуясь весьма близкими методами. Более конкретно можно, как мы постараемся показать, сохранить в значительной степени аппарат представления взаимодействия, видоизменяя лишь условия, играющие роль начальных. Эти условия и отражают специфику задачи о стационарных состояниях.

Проиллюстрируем это сначала на самом простом примере — нерелятивистской частицы во внешнем классическом поле. Будем проводить описание методами вторичного квантования. В представлении Гейзенберга операторы ψ_H удовлетворяют уравнению

$$i\frac{\partial\psi_H}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi_H + v(\vec{x})\,\psi_H, \tag{1}$$

а вектор состояния ψ_H не зависит от времени. Если задача поставлена так, что энергия определена, то это означает определенный выбор Ψ_H, при котором

$$i\frac{\partial\psi_H}{\partial t}\Psi_H = E\psi_H\Psi_H. \tag{2}$$

Соотношение (2) играет в данной задаче роль «начального условия».

Переход к представлению взаимодействия с операторами ψ и вектором состояния $\Psi(t)$ проводится обычным способом *:

$$\psi_H = S_1'\psi S,\quad \Psi = S\Psi_H. \tag{3}$$

* Вопрос о существовании обратной матрицы S^{-1} и об унитарности рассматривается ниже.

Используя (1) и (3), а также то, что $\psi(\vec{x}, t)$ и $\overline{\psi}(\vec{x}', t)$ имеют коммутатор, равный трехмерной δ-функции, нетрудно, подчинив S уравнению

$$\begin{gathered} i\frac{\partial S}{\partial t} = H(t)S, \ H(t) = \int d^3x\overline{\psi}(x, t)v(\vec{x})\psi(\vec{x}, t), \\ -i\frac{\partial S^+}{\partial t} = S^+H(t), \end{gathered} \tag{4}$$

найти для $\psi(x, t)$ уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\widehat{p^2}}{2m}\psi. \tag{5}$$

Это вполне обычный результат — в представлении взаимодействия операторы должны удовлетворять «свободным» уравнениям.

Заметим, что для перехода из одного представления в другое мы пока использовали лишь уравнения (1), (4) и условия (3), но не начальные условия или то, что их заменяет. Учтем эти условия, т. е. рассмотрим (2). В представлении взаимодействия оно дает

$$\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} + v(\vec{x})\psi\right)\Psi = E\psi\Psi, \tag{6}$$

или с учетом (5)

$$E\overline{\psi}\Psi = \left(\frac{\widehat{p^2}}{2m}\psi + v(\vec{x})\psi\right)\Psi. \tag{7}$$

Кроме того, вектор состояния удовлетворяет, разумеется, уравнению

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(t)\Psi. \tag{8}$$

Запишем общее решение (5)

$$\psi = \int d^3\vec{k}a_k\psi(k)e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}, \tag{9}$$

где $\omega = \frac{k^2}{2m}$, a_k — оператор, удовлетворяющий коммутационным соотношениям

$$[a_k, \overline{a}_{k'}] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{10}$$

а $\psi(k)$ — весовая функция, которая определится из дальнейшего.

Вектор состояния Ψ (здесь существенно используется то, что мы рассматриваем одночастичную задачу) ищется в виде

$$\Psi = \int d^3\vec{k}\overline{a}_k c(k, t)\Phi_0 \tag{11}$$

(Φ_0 — вакуумный вектор состояния).

С учетом (9) и (11) уравнение (7) принимает вид

$$\begin{gathered} \int d^3\vec{k}E\psi(k)c(k, t)e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} = \int d^3k\frac{k^2}{2m}\psi(k)c(k, t)e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t} + \\ + v(\vec{x})\int d^3\vec{k}\psi(k)c(k, t)e^{ikx-iat} \end{gathered} \tag{12}$$

(в (12) можно опустить Φ_0, так как все стоящие перед ним величины являются с-численными).

Чтобы (12) было справедливо для любого момента времени, достаточно принять

$$c(k, t) = c(k)\, e^{i\omega t + \alpha t}. \tag{13}$$

Поскольку Ψ должно наряду с (12) удовлетворять (8), получаем

$$\left(i\alpha - \frac{k^2}{2m}\right) c(k) = \int d^3x \int d^3\vec{k}'\, \psi^+(k)\, v(\vec{x})\, \psi(k')\, e^{i\vec{x}(\vec{k}'-\vec{k})}. \tag{14}$$

Сопоставляя (12) и (14), получаем

$$\alpha = -iE, \quad |\psi(k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}. \tag{15}$$

Уравнение типа (14) для (ck) в рассматриваемой нерелятивистской задаче хорошо известно. Оно просто получается и без аппарата вторичного квантования, если перейти в уравнении Шредингера к Фурье-изображениям.

Перейдем к обсуждению вопроса об S-матрице. Разобьем ее на две части

$$S = S_0 + S_1 + \ldots, \tag{16}$$

где S_0 является с-численным, а S_1 представляет собой нормальное произведение с одним оператором порождения и одним поглощения. Уравнение (4) можно заменить эквивалентной ему системой

$$i\frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad i\frac{\partial S_1}{\partial t} = H(t)\, S_0 + \overline{H(t)\, S_1}, \tag{17}$$

дужка обозначает наличие свертки между оператором рождения из S_1 и оператором поглощения из H. Принимая, как обычно, $S_0|_{t=t_0} = 1$ и записывая S_1 в виде

$$S_1 = \int d^3k\, d^3k'\, \bar{a}_{k'} S(k', k, t)\, a_k,$$

где $S(k, k', t)$, подлежащая определению с-численная функция с помощью (17), приходим к уравнению

$$\int d^3k\, d^3k'\, \bar{a}_{k'} i\, \frac{\partial S(k', k, t)}{\partial t}\, a_k = \int d^3k\, d^3k'\, \bar{a}_{k'} U(k', k)\, a_k e^{it(\omega-\omega')} + \tag{18}$$

$$+ \int d^3k\, d^3k'\, d^3k''\, \bar{a}_{k'} U(k'k'')\, e^{-it(\omega''-\omega')} S(k'', k, t)\, a_k,$$

где

$$U(k', k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x\, v(x)\, e^{-ix(k'-k)}.$$

Первый из членов в правой части (18) не имеет зависимости от E. Однако при фиксированном значении энергии вектор состояния, а значит и $S(k', k, t)$, должен содержать такую зависимость. Это заставляет искать $S(k', k, t)$ в таком виде, чтобы не зависящий от E член в (18) был компенсирован. Другими словами, следует принять

$$S(k', k, t) = q(k', k, t) - \delta^3(k' - k). \tag{19}$$

Покажем, что $q(k', k, t)$ следует взять в виде

$$q(k', k, t) = \sum_E C_E(k')\, C_E^+(k)\, e^{i\omega' t - i\omega t_0 - iE(t-t_0)}. \tag{20}$$

Учитывая (18) и (19), получим уравнение

$$\sum_E (E-\omega')\, C_E(k')\, C_E^+(k) + \int d^3k'' U(k',k'') \sum C_E(k'')\, C_E^+(k)\, e^{-iE(t-t_0)}. \tag{21}$$

Оно совпадает с (14). Действительно, $C_E(k)$ обладает следующими свойствами:

$$\int d^3k C_E^+(k)\, C_{E'}(k) = \delta_{EE'}. \tag{22}$$

$$\sum_E C_E^+(k)\, C_E(k') = \delta^3(k'-k). \tag{23}$$

Поэтому, умножая (21) на $C_E(k)$ и интегрируя по d^3k, получим

$$(E-\omega')\, C_E(k') = \int d^3k'' U(k',k'')\, C_E(k''),$$

что совпадает с (14).

Таким образом, можно записать S-матрицу в виде

$$S = 1 + \int d^3k\, d^3k' \bar{a}_{k'} \left\{ \sum_E C_E(k')\, C_E^+ e^{i\omega' t - i\omega t_0 - iE(t-t_0)} - \delta^3(k'-k) \right\} a_k + \ldots \tag{24}$$

Небезынтересно, используя (24), переписать соотношение (3), связывающее вектор состояния в гейзенберговском представлении и вектор состояния в представлении взаимодействия

$$\int d^3k \bar{a}_k C_E(k)\, e^{i\omega t - iEt} \Phi_0 = \left(1 - \int d^3k \bar{a}_k a_k + \int d^3k' \bar{a}_{k'} q(k', k, t)\, a_k\right) \Psi_H.$$

Первые два члена в правой части сокращаются. Равенство же остающихся членов обеспечивается, если гейзенберговский вектор состояния совпадает с вектором состояния в представлении взаимодействия в момент t_0. Таким образом, полученная S-матрица имеет обычный смысл: она связывает векторы состояния в различные моменты времени. Впрочем, это является очевидным следствием того, что записанная S-матрица удовлетворяет единичным начальным условиям. Единичные начальные условия (поскольку гамильтониан эрмитов), разумеется, обеспечивают и унитарность S-матрицы, что без труда проверяется и непосредственно.

Заметим в заключение, что (24) имеет совершенно ясный физический смысл. Поскольку в представлении взаимодействия мы пользуемся операторами порождения и поглощения свободных частиц, то появление в S-матрице членов $1 - \int d^3k \bar{a}_k a_k$ означает, что в выбранной нами задаче о связанных состояниях исключаются такие процессы, когда в начальном и конечном состоянии присутствует свободная частица. Существенную роль в S-матрице играет член $q(k', k, t)$, он и описывает непрерывное «обновление» того волнового пакета, который соответствует связанному состоянию.

Обращает на себя внимание следующее обстоятельство: уравнение (14), определяющее как $C_E(k)$, так и энергии, может быть формально получено, если изменить начальные условия для S-матрицы, а именно принять

$$S_0 |_{t=t_0} = 0. \tag{25}$$

Такой прием сразу же освобождает нас от необходимости рассматривать несущественные члены в уравнении для S-матрицы и приводит к однородному уравнению, из которого и должны определяться как собственные значения, так и соответствующие им функции. Полную же (унитарную) S-матрицу нетрудно восстановить, добавив в нее соответствующие члены, приводящие к виду (24).

Указанный прием позволяет получать однородные уравнения и в задачах с переменным числом частиц. Проиллюстрируем это на примере модели не испытывающих отдачи частиц, взаимодействующих с полем вторично квантованных бозонов. Будем интересоваться тем случаем, когда и в начальном и в конечном состоянии бозонов нет, а имеются по две частицы. Поскольку ввиду отсутствия отдачи все вершины переста-

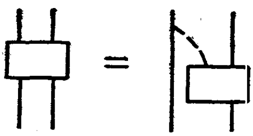

Рис. 1

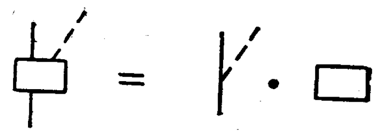

Рис. 2

вимы, перенормировка производится особено просто (см. [3, 4]) и уравнение для интересующего нас процесса графически записывается в форме (см. рис. 1).

Возникает необходимость записать уравнение для вершинной части. Соответствующие графические соотношения имеют вид (см. рис. 2), причем здесь опять учтена переставимость вершин и произведена перенормировка. Если дополнительно применить условие $S_0/t_0=0$ (графически это соответствует $\square = 0$), то вершинная часть исчезает, и в уравнении для «четырехвостки» выпадает свободный член, так что приходим к тому однородному уравнению, о котором говорилось выше (см. рис. 3).

Более детальный анализ задачи о связанных состояниях в теории с переменным числом частиц выходит, однако, за рамки данной статьи и должен быть предметом особой публикации. Существенные моменты, подмеченные нами на примере простой нерелятивистской задачи, должны, можно полагать, сохранить свою силу и в более общем случае: имеется в виду возможность описания в представлении взаимодействия с той, однако, существенной оговоркой, что нигде не используется идея включения и выключения взаимодействия. Кроме того, необходимо изменение начальных условий, подобное тому, которое было указано выше.

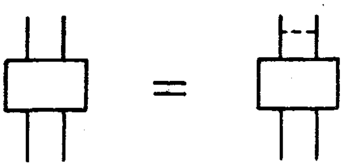

Рис. 3

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. М. Широкову за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belinfante F. J., Moller C. Rgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys; Medd., 28, No. 6, 1954.
2. Ekstein H. Phys. Rev., **101**, 880, 1956.
3. Городцов В. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 75, 1963.
4. Вавилов Б. Т., Григорьев В. И. ЖЭТФ, **39**, 794, 1960.

Поступила в редакцию
3. 2 1964 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой
теории