Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1965

А. С. ДАВЫДОВ, В. С. РОСТОВСКИЙ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МОНОПОЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В НЕСФЕРИЧЕСКИХ АТОМНЫХ ЯДРАХ

Рассчитаны энергетические состояния несферических четно-четных атомных ядер, имеющих в основном состоянии аксиальную симметрию. Показано, что волновые функции и относительные энергии возбужденных состояний при полном учете взаимодействий вращения с β- и γ-колебаниями выражаются через два параметра, характеризующие амплитуды нулевых β- и γ-колебаний поверхности ядра. Вычислены относительные вероятности $E0$- и $E2$-переходов как функции этих параметров. Теория сравнивается с экспериментом.

Введение

Хорошо известно, что в окруженном электронами ядре возможны электрические монопольные $E0$-переходы между состояниями одинакового спина и четности. При таких переходах энергия возбуждения ядра уносится электронами конверсии. Вероятность $E0$-переходов определяется изменением радиального распределения электрических зарядов внутри ядра в момент квантового перехода. Поэтому экспериментальное и теоретическое изучение $E0$-переходов может служить эффективным средством исследования природы возбужденных состояний атомных ядер и правильности выбора модели для их описания. Теория $E0$-переходов между первыми возбужденными состояниями одинакового спина рассматривалась в ряде работ [1—6] для различных моделей ядер.

В настоящее время установлено, что в четно-четных несферических ядрах наряду с основной последовательностью возбужденных состояний малой энергии со спинами (в единицах $\hbar$), равными 2, 4, 6, 8..., и значениями проекции (K) спина на аксиальную ось, близкими к нулю, имеются возбужденные состояния со спинами 2, 3, 4, ... и $K \approx 2$. В первоначальной теории коллективных возбужденных состояний, развитой Бором и Моттельсоном [7], возбужденные состояния с $K \approx 2$ рассматривались как γ — колебания поверхности ядра, а в работе Давыдова и Филиппова [8] — как состояния аномальной вращательной полосы неаксиального ротатора. Эти две крайние точки зрения отражают разные методы приближенного решения задачи о коллективных возбуждениях, соответствующих квадрупольным колебаниям поверхности атомного ядра, описываемых оператором

$$H = \frac{\hbar^2}{2B}\left\{T_\beta + \frac{1}{\beta^2}\left[T_\gamma + T_{rot}\right]\right\} + V(\beta, \gamma), \qquad (1)$$

где $V(\beta, \gamma)$ — потенциальная энергия β- и γ-колебаний,

$$T_\beta = -\frac{1}{\beta^4} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta \frac{\beta^4 \partial}{\partial\beta}\right), \quad T_\gamma = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\sin(3\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right),$$

$$T_{rot} = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{3} A_l(\gamma) J_l^2,$$

при этом J_l — проекции на главные оси ядра оператора полного углового момента. Обычно зависимость функций $A_l(\gamma)$ от динамической переменной γ определяется выражениями

$$A_l(\gamma) = \left[\sin\left(\gamma - \frac{2\pi l}{3}\right)\right]^{-2}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Для ядер, у которых колебания происходят относительно равновесной сферической формы, такая зависимость получается [7] в результате канонического преобразования оператора

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mu}\{C|\alpha_\mu|^2 + B|\dot{\alpha}_\mu|^2\}, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2$$

коллективных квадрупольных колебаний поверхности ядра к переменным $\theta_1\theta_2\theta_3\beta\gamma$. Собственные функции оператора (1) как функции внутренних динамических переменных β и γ и трех углов Эйлера $\theta \equiv \{\theta_1\theta_2\theta_3\}$ определяются в пространстве с элементом объема

$$d\tau = \beta^4|\sin 3\gamma|\sin\theta_2 \, d\beta d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

В полном виде исследование коллективных возбуждений, описываемых оператором (1), еще не производилось. Во всех предыдущих работах решались задачи, соответствующие определенным упрощениям (1). Так, например, в работах [7, 9] исследовались возбуждения ядра, определяемые оператором

$$H_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B_\gamma}\left[\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) - \frac{J_3^2}{\gamma^2}\right] + \frac{1}{2}C'_\gamma \cdot \gamma^2, \tag{2}$$

который получается из (1) при сохранении членов, зависящих от γ, при следующих дополнительных упрощениях:

$$B\beta^2 \to B\beta_0^2 = B_\gamma, \quad V(\beta, \gamma) \to \frac{C}{2}(\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2}C'_\gamma\gamma^2,$$

$$\frac{\hbar^2}{2B\beta^2}T_{rot} \to \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2}(J^2 - J_3^2) + \frac{\hbar^2}{2B_\gamma} \cdot \frac{J_3^2}{\gamma^2}. \tag{3}$$

Согласно (3) второе слагаемое в кадратных скобках оператора (2) представляет собой часть оператора вращения. Если обозначить через $K = 0, 2, 4...$ собственные значения оператора J_3, то в состояниях с $K \neq 0$ собственные значения оператора (2) характеризуют сложные возбуждения, в которых γ-колебания и вращения ядра вокруг оси 3 неразделимы. В частности, волновые функции этих состояний зависят от γ и угла θ_3. Таким образом, возбужденные состояния, определяемые оператором (2), можно назвать γ-колебаниями только в состояниях с $K \approx 0$. С другой стороны, в адиабатической теории Давыдова и Филиппова [8] возбужденные состояния характеризовались оператором

$$H' = \frac{\hbar^2}{2B\beta^2} T_{rot} = \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \sum_l \frac{J_l^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi l}{3}\right)},$$

в котором динамические переменные β и γ заменяются некоторыми эффективными значениями, играющими роль параметров теории. Формально такая замена сводит H' к оператору энергии жесткого асимметричного волчка. Соответствующие возбужденные состояния назывались вращательными, хотя в действительности они также представляют комбинацию вращения с колебаниями поверхности ядра, которые косвенно учитываются эффективным выбором β и γ. Если рассматривать возбужденные состояния только основной и аномальной вращательных полос и вероятности переходов между ними, то такое адиабатическое приближение является достаточно удовлетворительным.

В более точной теории адиабатическое приближение является неприемлемым. Форма ядра меняется при переходе его в возбужденные состояния. В частности, при переходе в возбужденные состояния с $K \neq 0$ нарушается аксиальная симметрия ядра даже в том случае, когда она имелась в основном состоянии. Изменение формы ядра при его возбуждении приводит к связи вращения с β- и γ-колебаниями. Учет такой взаимосвязи особенно существен при исследовании $E0$-переходов, так как вероятности таких переходов строго запрещены в адиабатическом приближении.

В работе [5] вычисление вероятностей $E0$-переходов производилось без полного учета взаимодействия β- и γ-колебаний. Волновые функции возбужденных состояний писались в виде произведения $F(\beta)\ \Phi(\gamma,\ \theta_1\ \theta_2\ \theta_3)$. В интересной работе Хара [6] используется ряд непоследовательных преобразований оператора (1). С одной стороны, производятся упрощения (3), чтобы получить оператор «γ-колебаний» (2). С другой стороны, учитываются некоторые члены второго порядка малости в разложении моментов инерции по степеням $\beta - \beta_0$ и γ (именно члены $\sim\gamma\ \frac{\beta - \beta_0}{\beta_0}$ $(J_2^2 - J_1^2)$) в последующих вычислениях в [6] не учитываются все члены одинакового порядка малости.

Целью настоящей статьи является попытка вычисления уровней энергии, волновых функций и вероятностей $E0$- и $E2$-переходов на основе оператора (1) с более полным учетом взаимосвязи между коллективными возбуждениями разного типа.

В наиболее общем случае потенциальная энергия может быть записана в виде

$$V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C\beta^2 + \beta\chi(\cos 3\gamma),$$

где χ — некоторая функция. Введем функцию $W(\beta, \gamma) = V(\beta, \gamma) + \frac{\Lambda_0 + 2}{\beta^2}$, где Λ_0 — постоянная величина, значение которой будет определено ниже. Тогда, разлагая $W(\beta, \gamma)$ в ряд по степеням отклонений β и γ от значений β_0 и γ_0, соответствующих минимуму $W(\beta, \gamma)$, получим с точностью до постоянного слагаемого

$$V(\beta, \gamma) + \frac{\Lambda_0 + 2}{\beta^2} = \frac{1}{2} C_\beta (\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2} C_\gamma \cdot \beta\beta_0 (\gamma - \gamma_0)^2. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в оператор (1), можно преобразовать (1) к виду

$$h = \frac{B\beta_0^2}{\hbar^2} H = h_0 + h_1, \tag{5}$$

где

$$h_0 = \frac{\beta_0^2}{2} \left\{ T_\beta - \frac{2}{\beta^2} + \frac{(\beta-\beta_0)^2}{(\mu\beta_0)^4} + \frac{1}{\beta^2} \left[T_\gamma + T_{rot} + \frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{4\Gamma^4} - \Lambda_0 \right] \right\}, \tag{6}$$

$$h_1 = \frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{8\Gamma^4} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta} \right), \tag{7}$$

$$\mu = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\hbar^2}{BC_\beta} \right]^{1/4}, \quad \Gamma = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\hbar^2}{4BC_\gamma} \right]^{1/4}. \tag{8}$$

Величины β_0, γ_0, μ и Γ, входящие в (5), следует рассматривать как параметры теории. Энергии возбужденных состояний далее будут измеряться только в единицах $\frac{\hbar^2}{B\beta_0^2}$, поэтому далее мы будем пользоваться только оператором h.

Как будет показано в § 2, если пренебречь оператором h_1, то волновая функция основного состояния пропорциональна

$$\exp\left[-\left(\frac{\gamma-\gamma_0}{2\Gamma} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta-\beta_0}{\mu\beta_0} \right)^2 \right].$$

Таким образом, величины Γ и $\mu\beta_0$ характеризуют амплитуды нулевых γ- и β-колебаний поверхности ядра. Значения $\Gamma=\mu=0$ соответствуют абсолютно жестким ядрам. Величину μ будем называть параметром неадиабатичности по отношению к β-колебаниям. Величину Γ будем называть параметром неаксиальности, так как она характеризует (при $\gamma_0=0$) амплитуду нулевых γ-колебаний, нарушающих аксиальную симметрию ядра. В § 1 будут найдены собственные функции оператора [6], соответствующие разным коллективным возбужденным состояниям ядер. В § 2 и 3 эти функции будут использованы для вычисления ядерных матричных элементов, определяющих вероятности $E0$- и $E2$-переходов. В § 4 производится сравнение теории с экспериментальными данными.

§ 1. Собственные функции коллективных возбужденных состояний

Собственные функции оператора h (5) могут быть вычислены методом последовательных приближений, если рассматривать h_1 как оператор возмущения. Действительно, если

$$(h_0 - \varepsilon_i)\psi_i = 0, \tag{9}$$

то в первом приближении теории возмущений собственные функции полного оператора h имеют вид

$$|i> = \psi_i + \sum_{l \neq i}' \frac{<\psi_l|h_1|\psi_i>}{\varepsilon_i - \varepsilon_l} \cdot \psi_l. \tag{10}$$

Собственные функции ψ_i можно искать в виде произведения

$$\psi = \beta^{-2} \cdot f_{\nu\Lambda}(\beta) \cdot \Phi_\Lambda(\gamma, \theta), \quad f_{\nu\Lambda}(0) = 0,$$

тогда из (9) получаем систему двух уравнений

$$\left[T_\gamma + T_{rot} + \frac{(\gamma-\gamma_0)^2}{4\Gamma^4} - \Lambda\right]\Phi_\Lambda = 0, \tag{11}$$

$$\left[-\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{(\beta-\beta_0)^2}{(\mu\beta_0)^4} + \frac{\Lambda-\Lambda_0}{\beta^2} - \frac{2\varepsilon(\nu\Lambda)}{\beta_0^2}\right] f_{\nu\Lambda} = 0. \tag{12}$$

Решения уравнения (12) при фиксированном Λ найдены в работе [10]. С точностью до множителя нормировки они имеют вид

$$f_{\nu\Lambda} = H_\nu(\zeta_\Lambda)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\zeta_\Lambda^2\right),$$

где $\zeta_\Lambda \equiv \frac{1}{\mu_\Lambda}\left(\frac{\beta}{\beta_0} - p\right)$. При этом величины μ_Λ и p выражаются через Λ и μ с помощью уравнений

$$p^3(p-1) = (\Lambda-\Lambda_0)\mu^4, \quad p \geqslant 1,$$

$$\mu_\Lambda = \mu\left[1 + 3(\Lambda-\Lambda_0)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}. \tag{13}$$

Функция $H_\nu(\zeta)$ определяется бесконечным степенным рядом

$$H_\nu(\zeta) \equiv [2\Gamma(-\nu)]^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\,\Gamma\left(\frac{l-\nu}{2}\right)\cdot(2\zeta)^l, \tag{14}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ν — корни трансцендентного уравнения

$$H_\nu\left(-\frac{p}{\mu_\Lambda}\right) = 0. \tag{15}$$

Энергия возбуждения $\left(\text{в единицах } \frac{\hbar^2}{B\beta_0^2}\right)$ с учетом энергии нулевых колебаний выражается формулой

$$\varepsilon(\nu\Lambda) = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\mu^2}\sqrt{1+3(\Lambda-\Lambda_0)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4} + \frac{\Lambda-\Lambda_0}{2p^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{\mu^2}\right)^2. \tag{16}$$

Согласно численным расчетам Малмана и др. [11] корни уравнения (15) при значениях $\left(\frac{p}{\mu_\Lambda}\right) \geqslant 4$ с точностью до 10^{-4} совпадают с целыми числами, т. е. $\nu_i = n = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае степенной ряд (16) сводится к полиному Эрмита $H_n(\zeta)$. Если, далее, $\mu^4(\Lambda-\Lambda_0) \ll 1$, то, используя (13), находим приближенные значения

$$p = 1 + \mu^4(\Lambda-\Lambda_0) - 3\mu^8(\Lambda-\Lambda_0)^2 + \ldots,$$

$$\mu_\Lambda = \mu\left[1 - \frac{3}{4}\mu^4(\Lambda-\Lambda_0) + \ldots\right].$$

Следовательно, при $\mu < \frac{1}{3}$ энергия (16) сводится к выражению

$$\varepsilon(n_\beta, \Lambda) \approx \frac{n_\beta+\frac{1}{2}}{\mu^2} + \frac{1}{2}(\Lambda-\Lambda_0)\left[1 + 3\mu^2\left(n_\beta+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\mu^4(\Lambda-\Lambda_0)^2 + \ldots, \tag{17}$$

а нормированная на элемент объема $d\zeta$ функция f_n имеет вид

$$f_n(\zeta) = (2^n, n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \cdot H_n(\zeta) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)^{\beta}.$$

Для вычисления Λ и функций Φ_Λ надо решить уравнение (11). Решение этого уравнения для случая малых колебаний у положения равновесия $\gamma_0 = 0$ рассмотрено в работах [10, 5, 12] методом теории возмущений. Разлагая в (11) оператор T_{rot} в ряд по γ с точностью до линейных членов и рассматривая выражение $\frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma (J_2^2 - J_1^2)$ как оператор возмущения, получаем значение Λ в нулевом приближении:

$$\Lambda = \Gamma^{-2} \cdot \left(2n_\gamma + \frac{K}{2} + 1\right) + \frac{J(J+1)}{3} - \frac{K^2}{4} - 3,$$

где J — полный спин состояния, $K = 0, 2, 4, \ldots$ — проекции спина на аксиальную ось, $n_\gamma = 0, 1, 2, \ldots$ — квантовые числа γ-колебаний. Удобно выбрать введенную ранее постоянную Λ_0 равной значению Λ при $n_\gamma = K = J = 0$, тогда получим

$$\Lambda - \Lambda_0 = \Gamma^{-2} \cdot \left(2n_\gamma + \frac{K}{2}\right) + \frac{J(J+1)}{3} - \frac{K^2}{4}. \tag{18}$$

В нулевом приближении, когда J, K, n_γ являются хорошими квантовыми числами, уравнению (11) удовлетворяют функции, нормированные на элемент объема

$$d\tau = dz \cdot \sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3,$$

$$\varphi_{JK}^{(n_\gamma)}(z, \theta) = \left[\frac{\left(\frac{K}{2} + n_\gamma\right)!}{n_\gamma!}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{K}{4}}}{\left(\frac{K}{2}\right)!} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot F\left(-n_\gamma, 1 + \frac{K}{2}, z\right) \cdot |JK\rangle, \tag{19}$$

где $z = \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}$, $F(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$|JK\rangle = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2J+1}{1+\delta_{0K}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \{D_{MK}^J(\theta) + (-1)^J D_{M,-K}^J(\theta)\}.$$

Функции $\Phi_{JK}^{(n_\gamma)}$, удовлетворяющие уравнению (11), в первом приближении выражаются через функции (19) следующими формулами:

а) при $n_\gamma = K = 0$, $J = 0, 2, 4, \ldots$

$$\Phi_{J0}^{(0)} = \varphi_{J0}^{(0)} + \frac{a(J)\Gamma^3}{1-\Gamma^2} \varphi_{J2}^{(0)};$$

б) при $n_\gamma = 0$, $K = 2$, $J = 2, 3, 4, \ldots$

$$\Phi_{J2}^{(0)} = \varphi_{J2}^{(0)} - a(J) \left[\frac{\Gamma^3}{1-\Gamma^2} \varphi_{J0}^{(0)} + \frac{\Gamma^3}{1+\Gamma^2} \varphi_{J0}^{(1)}\right] + \frac{b(J)\Gamma^3}{1-3\Gamma^2} \varphi_{J4}^{(0)};$$

в) при $n_\gamma = 1$, $K = 0$, $J = 0, 2, 4, \ldots$

$$\Phi_{J0}^{(1)} = \varphi_{J0}^{(1)} + a(J) \left[\frac{\Gamma^3}{1+\Gamma^2} \varphi_{J2}^{(0)} + \frac{\sqrt{2}\Gamma^3}{1-\Gamma^2} \varphi_{J2}^{(1)}\right],$$

где

$$a(J) = \frac{1+(-1)^J}{3\sqrt{3}}[(J-1)J(J+1)(J+2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$b(J) = \frac{2}{3\sqrt{3}}[(J-3)(J-2)(J+3)(J+4)]^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, собственные функции оператора h_0 при $\mu < \frac{1}{3}$ определяются произведениями

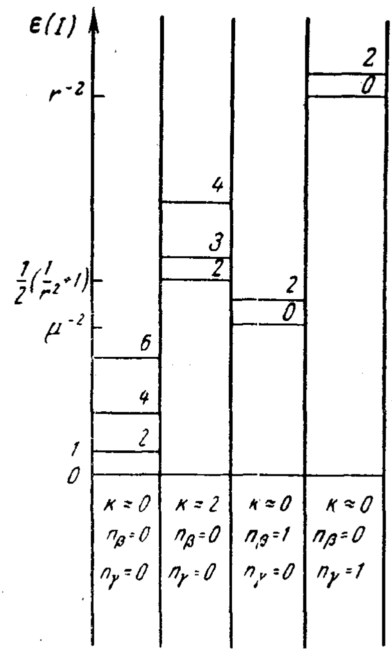

Рис. 1

$$\psi = \psi(n_\beta n_\gamma JK) = f_{n_\beta}(\xi)\,\Phi_{JK}^{n_\gamma}(z, \theta), \qquad (20)$$

где n_β, n_γ — квантовые числа соответственно β- и γ-колебаний, пробегающие значения $0, 1, 2, \ldots$; J — полный спин состояния, $K=0, 2, 4, \ldots$ — приближенные квантовые числа. При этом энергия возбужденных состояний согласно (17) и (18) равна

$$\Delta E(n_\beta n_\gamma JK) = \varepsilon(n_\beta n_\gamma JK) - \varepsilon(0000), \qquad (21)$$

где

$$\varepsilon(n_\beta n_\gamma JK) = \frac{n_\beta + \frac{1}{2}}{\mu^2} + \left[1 + 3\mu^2\left(n_\beta + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\Gamma^{-2}\left(n_\gamma + \frac{K}{4}\right) + \frac{J(J+1)}{6} - \frac{K^2}{8}\right] - 2\mu^4 \cdot \left[\Gamma^{-2}\cdot\left(n_\gamma + \frac{K}{4}\right) + \frac{J(J+1)}{6} - \frac{K^2}{8}\right]^2. \qquad (22)$$

При значениях μ и $\Gamma > \frac{1}{3}$ следует в (21) подставлять значения (16), в которых $\Lambda - \Lambda_0$ определяется с помощью (18). В очень грубом приближении, при μ и $\Gamma < \frac{1}{3}$, (22) сводится к простому выражению

$$\Delta E(n_\beta, n_\gamma, JK) = n_\beta \cdot \mu^{-2} + \left(n_\gamma + \frac{K}{4}\right)\cdot\Gamma^{-2} + \frac{J(J+1)}{6} - \frac{K^2}{8}. \qquad (23)$$

Зная собственные функции (20) оператора h_0, можно с помощью формулы (10) определить собственные функции полного оператора (5). Эти собственные функции характеризуются квантовыми числами n_β, n_γ, J и приближенным квантовым числом K. Энергии возбужденных состояний в нулевом приближении определяются (21).

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 1 изображена грубая схема уровней ядра при различных значениях квантовых чисел. Состояния с квантовыми числами $n_\beta = n_\gamma = 0$, $K \approx 0$, $J = 0, 2, 4, \ldots$ обычно называют основной вращательной полосой. Состояния с $n_\beta = n_\gamma = 0$, $K \approx 2$, $J = 2, 3, 4, \ldots$ будем называть аномальной полосой. В грубом приближении эта полоса начинается уровнем с энергией $\varepsilon(22) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma^2} + 1\right)$.

Состояния с квантовыми числами $n_\beta = 1$, $n_\gamma = 0$, $K \approx 0$, $J = 0, 2, 4, \ldots$ будем называть β-колебательной полосой. Эта полоса начинается с уровнем с энергией $\varepsilon(0_\beta) \approx \frac{1}{\mu^2}$. Наконец, состояния с квантовыми числами $n_\beta = 0$, $n_\gamma = 1$, $K \approx 0$, $J = 0, 2, 4, \ldots$ будем называть полосой γ-колебаний. Эта полоса начинается уровнем с энергией $\varepsilon(0_\gamma) \approx \frac{1}{\Gamma^2}$. Следовательно, среди первых коллективных возбуждений имеются два типа состояний со спином нуль и четыре типа состояний со спином 2. Они отличаются друг от друга энергией и вероятностями $E0$- и $E2$-переходов. Поэтому теоретическое и экспериментальное изучение $E0$- и $E2$-переходов весьма необходимо для определения природы коллективных возбуждений.

§ 2. Монопольные электрические переходы

Как показали Черч и Венесер [1], вероятность $E0$-переходов может быть записана в виде произведения $w = \Omega \cdot \langle f | \mathfrak{M}(E0) | i \rangle$, где Ω — множитель (явный вид его дан в [1]), зависящий от электронных волновых функций,

$$\langle f | \mathfrak{M}(E0) | i \rangle \tag{24}$$

«ядерный матричный элемент монополя», зависящих от функций $|i>$ и $|f>$ начального и конечного состояний ядра и от оператора $\mathfrak{M}(E0)$ монопольного электрического перехода. В случае однородного распределения протонов по объему ядра этот оператор выражается через внутренние переменные β и γ с помощью формулы

$$\mathfrak{M}(E0) = A(\beta^2 + B\beta^3 \cos 3\gamma), \tag{25}$$

где $A = \frac{3Z}{4\pi}$, $B = \frac{5\sqrt{5}}{21\sqrt{\pi}}$, Z — заряд ядра. Оператор (25) не может вызвать переходов между вращательными состояниями ядра, рассчитанными в адиабатическом приближении (когда β и γ постоянны). Реальные возбужденные состояния всегда связаны с изменением значений β и γ относительно из равновесных значений β_0 и γ_0 в нулевом состоянии. Рассматривая случай $\gamma_0 = 0$ и $\mu < \frac{1}{3}$, можно с точностью до постоянной преобразовать (25) к виду

$$\mathfrak{M}(E0) = A\beta_0^2(2\mu\zeta - 9B\beta_0\Gamma^2 z + \mu^2\zeta^2 - 27B\beta_0\mu\Gamma^2\zeta z + \ldots).$$

Подставляя (10) в (24), находим ядерный силовой параметр для переходов между состояниями $|i> \equiv |n_\beta^i n_\gamma^i J^i K^i>$ одинакового спина

$$\rho(i \to f) = \langle \psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \psi_i \rangle +$$
$$+ \sum_l{}' \left\{ \frac{<\psi_f | h_1 | \psi_l> <\psi_l | \mathfrak{M}(E0) | \psi_i>}{\varepsilon_f - \varepsilon_l} + \frac{<\psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \psi_l> <\psi_l | h_1 | \psi_i>}{\varepsilon_i - \varepsilon_l} \right\}, \tag{26}$$

где оператор h_1, определенный формулой (5), при $\gamma_0 = 0$ в переменных ζ и z имеет вид

$$h_1 \approx \frac{3}{4} \frac{\mu}{\Gamma^2} \zeta z. \tag{27}$$

Матричные элементы типа $\langle \psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \psi_l \rangle$ между состояниями, определяемыми оператором h_0, уже рассчитывались в [5]. Вычислив (26), можно учесть роль оператора h_1, характеризующего связь β- и γ-колебаний, в $E0$-переходах.

Ниже указаны значения матричных элементов монополя. Если ввести обозначения

$$\rho(i \to f) \equiv \frac{3Z}{4\pi} \beta_0^2 \cdot R(i \to f), \tag{28}$$

$$\frac{1}{\mu^2} \approx q \equiv \frac{\varepsilon(0_\beta)}{\varepsilon(20)}, \quad \frac{1}{\Gamma^2} \approx 2s - 1, \quad s \equiv \frac{\varepsilon(22)}{\varepsilon(20)}, \tag{29}$$

то переходы с уровней β-колебательных полос на уровни того же спина основной вращательной полосы определяются значениями

$$R(J_\beta \to J0) \equiv R(10J0 \to 00J0) = \mu\sqrt{2} \approx \left(\frac{2}{q}\right)^{1/2},$$

$$R(J_{2\beta} \to J0) \equiv R(20J0 \to 00J0) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2}} \approx (q\sqrt{2})^{-1}.$$

Для переходов между уровнями двух β-колебательных полос

$$R(J_{2\beta} \to J_\beta) \equiv R(20J0 \to 10J0) = 2\mu \approx 2q^{-\frac{1}{2}}.$$

Для переходов между уровнями аномальной вращательной полосы и уровнями основной вращательной полосы

$$R(J2 \to J0) \equiv R(00J2 \to 00J0) = -\frac{2\sqrt{(J-1)J(J+1)(J+2)}}{\sqrt{3(2s-1)} \cdot [q^2 - (s-1)^2]}.$$

В частности,

$$R(22 \to 20) = -4\left(s - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot [q^2 - (s-1)^2]^{-1}.$$

Для переходов между уровнями γ-колебательной полосы и уровнями основной вращательной полосы

$$R(J_\gamma \to J0) \equiv R(01J0 \to 00J0) = 3\,\frac{s - \frac{1}{2}}{q^2 - (2s-1)^2}.$$

Для переходов между уровнями γ-колебательной и β-колебательной полос

$$R(J_\gamma \leftrightarrows J_\beta) \equiv R(01J0 \leftrightarrows 10J0) = \frac{45\sqrt{5}}{14\sqrt{2\pi}}, \quad \beta_0 \frac{q - s + \frac{1}{2}}{q^{3/2}\left(s - \frac{1}{2}\right)}.$$

Все написанные выше формулы справедливы только при значении $q \geqslant 9$ и $s \ll \frac{1}{3} q^2$.

§ 3. Электрические квадрупольные переходы

Приведенная вероятность $E2$-переходов между коллективными состояниями i и j определяется равенством

$$B(E2, i \to f) = \frac{5}{16\pi} \sum_{m, m_f} |\langle f | Q_{2m} | i \rangle|^2, \tag{30}$$

где Q_{2m} при малых колебаниях β и γ около равновесных значений $\gamma_0 = 0$ и β_0 можно записать в следующем виде:

$$Q_{2m} = eQ_0 t_{2m},$$

при этом

$$t_{2m} = (1 + \mu\zeta)\left\{(1 - \Gamma^2 z + \ldots) D^2_{m0} + \Gamma Z^{1/2}\left(1 - \frac{1}{3}\Gamma^2 z\right)(D^2_{m2} + D^2_{m-2})\right\},$$

$$Q_0 = \frac{3ZR_0^2\beta_0}{\sqrt{5\pi}}, \quad \zeta = \frac{\beta - \beta_0}{\mu\beta_0}, \quad z = \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}. \tag{31}$$

Пользуясь (30) и (10), получаем явное выражение приведенных вероятностей $B(E2, i \to f)$ $\left(\text{в единицах } \frac{e^2Q_0^2}{16\pi}\right)$ через волновые функции (18) и операторы (31) и (7)

$$b(E2,\ i \to f) = 5 \sum_{m, m_f} \cdot \left| \langle \psi_f | t_{2m} | \psi_i \rangle + \sum_l{}' \left\{ \frac{\langle\psi_f | h_1 | \psi_l\rangle \langle\psi_l | t_{2m} | \psi_i\rangle}{\varepsilon_f - \varepsilon_l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\langle\psi_f | t_{2m} | \psi_l\rangle \langle\psi_l | h_1 | \psi_i\rangle}{\varepsilon_i - \varepsilon_l} \right\}\right|^2. \tag{32}$$

Вычисления приводят к следующим результатам (значения q и s определены в (29)):

а) для переходов внутри основной вращательной полосы

$$b(E2,\ J0 \to J'0) = 5 \cdot (2J00 | J'0)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{q^2}\right)^2,$$

где $(2JmM | J'M')$ — коэффициенты векторного сложения. В частном случае при переходе с первого возбужденного состояния в основное

$$b(E2,\ 20 \to 0) = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{q^2}\right)^2;$$

б) переходы внутри аномальной полосы

$$b(E2,\ J2 \to J'2) = 5 \cdot (2J02 | J'2)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{s}\right)\left(1 - 3\frac{s}{q^2}\right)^2;$$

в) переходы с аномальной на основную вращательную полосу

$$b(E2,\ J2 \to J'0) = 10 \cdot (2J - 2, 2 | J'0)^2 \cdot (2s - 1)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{s}{q^2}\right)^2 \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{2}{3(2s - 1)}\left[\frac{(2J02 | J'2)}{(2J - 22 | J'0)} \sqrt{\frac{2(J' - 1) J' (J' + 1)(J' + 2)}{3}} - 2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1 + (-1)^J}{2} \cdot \frac{(2J00 | J'0)}{(2J - 22 | J'0)} \cdot \sqrt{\frac{2(J - 1) J (J + 1)(J + 2)}{3}}\right]\right\}.$$

Частные случаи:

$$b(E2,\ 22 \to 20) = \frac{10}{7s}\left(1 + \frac{5}{2s}\right)\left(1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{s}{q^2}\right)^2,$$

$$b(E2,\ 22 \to 0) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \frac{3}{2s}\right)\left(1 - \frac{9}{4} \cdot \frac{s}{q^2}\right)^2;$$

г) переходы с уровней β-колебательных полос на основную вращательную полосу

$$b(E2,\ J_\beta \to J0) = \frac{5}{2q}\cdot(2J_\beta 00\,|\,J0)^2\cdot\left(1-\frac{1}{s}\right);$$

в частности,

$$b(E2,\ 0_\beta \to 20) = \frac{5}{2q}\left(1-\frac{1}{s}\right);\ b(E2,\ 2_\beta \to 20) = \frac{2}{7}\,b(E2,\ 0_\beta \to 20);$$

$$b(E2,\ 2_\beta \to 0) = \frac{1}{5}\,b(E2,\ 0_\beta \to 20);$$

д) переходы с уровней γ-колебательной полосы ($K \approx 0$) на уровни основной вращательной полосы

$$b(E2,\ J_\gamma \to J0) = \frac{5}{4s^2}(2J_\gamma 00\,|\,J0)^2\cdot\left[\frac{q^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{q^2-4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}\right]^2.$$

Частные случаи:

$$b(E2,\ 0_\gamma \to 20) = \frac{5}{4s^2}\cdot\left[\frac{q^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{q^2-4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}\right]^2;$$

$$b(E2,\ 2_\gamma \to 20) = \frac{2}{7}\,b(E2, 0_\gamma \to 20);$$

$$b(E2,\ 2_\gamma \to 0) = \frac{1}{5}\,b(E2,\ 0_\gamma \to 20).$$

§ 4. Сравнение теории с экспериментом

Определим «ядерную вероятность» монопольного электрического перехода с помощью равенства

$$B(E0,\ i \to f) \equiv e^2R_0^4\rho^2(i \to f). \tag{33}$$

При сравнении теоретических и экспериментальных данных удобно использовать введенные Расмуссеном [14] и Райнером [4] безразмерные отношения

$$X\left(\frac{E0,\ i \to f}{E2,\ i \to f'}\right) \equiv \frac{B(E0,\ i \to f)}{B(E2,\ i \to f')} = \frac{5\beta_0^2R^2(i \to f)}{b(E2,\ i \to f')}. \tag{34}$$

Подставляя в (34) значения, вычисленные в разделах 3 и 4, получаем для двух типов $0 \to 0$ переходов

$$X\left(\frac{E0, 0_\beta \to 0}{E2, 0_\beta \to 20}\right) = 4\beta_0^2\left(1+\frac{1}{s}\right);\ X\left(\frac{E0, 0_\gamma \to 0}{E2, 0_\gamma \to 20}\right) = 36\beta_0^2\left(1-\frac{q^2}{s^2}\right)^{-2}.$$

Представляет интерес также отношение

$$\frac{B(E0, 0_\gamma \to 0_\beta)}{B(E0, 0_\gamma \to 0)} = \frac{2250}{49\pi}\cdot\beta_0^2\cdot\frac{\left(q-s+\frac{1}{2}\right)^2}{q^2}\left[1-\left(\frac{q}{2s-1}\right)^2\right]^2.$$

Приведем далее значения отношений (34) для $E0$-переходов между уровнями разного типа, имеющими спин 2:

$$X\left(\frac{E0,22\to 20}{E2,22\to 20}\right)=56\beta_0^2\cdot[q^2-(s-1)^2]^{-2}\left(1-\frac{2}{s}\right)\left(1+\frac{9}{2}\frac{s}{q^2}\right),$$

$$X\left(\frac{E0,2_\beta\to 20}{E2,2_\beta\to 20}\right)=\frac{7}{10}X\left(\frac{E0,2_\beta\to 20}{E2,2_\beta\to 0}\right)=\frac{7}{2}X\left(\frac{E0,0_\beta\to 0}{E0,0_\beta\to 20}\right),$$

$$X\left(\frac{E0,2_\gamma\to 20}{E2,2_\gamma\to 20}\right)=\frac{7}{10}X\left(\frac{E0,2_\gamma\to 20}{E2,2_\gamma\to 0}\right)=\frac{7}{2}X\left(\frac{E2,0_\gamma\to 0}{E2,0_\gamma\to 20}\right).$$

Приведенные выше формулы использованы в табл. 1 при сравнении экспериментальных и теоретических данных, относящихся к $E0$-переходам между возбужденными состояниями ядер, имеющими спин 0. В таблице указаны теоретические значения ρ и X как для случая, когда переход происходит с β-колебательного состояния, так и для случая перехода с γ-колебательного состояния. Сравнение с экспериментом подтверждает, что рассмотренные в таблице возбужденные состояния относятся к β-колебательным.

В табл. 2 приведено сравнение теоретических и экспериментальных значений ρ и X для переходов между возбужденными состояниями, имеющими спин 2. Теоретические значения ρ выписаны для трех случаев соответственно переходам на первое возбужденное состояние с уровней

Таблица 1

$E0$-переходы между состояниями со спинном 0

Ядро	β_0	$s=\frac{\varepsilon(22)}{\varepsilon(20)}$	$q=\frac{\varepsilon(0_\beta)}{\varepsilon(20)}$	$E0$-переход, *Кэв*	Теория: $\rho(0_\beta-0)$	Теория: $\rho(0_\gamma-0)$
Sm^{152}	0,29	8,91	5,60	$685\,(0_\beta)\to 0$	0,75	—0,13
Gd^{154}	0,28	8,10	5,52	$680\,(0_\beta)\to 0$	0,72	—0,14
Gd^{156}	0,32	0,13	11,4	$1010\,(0_\beta)\to 0$	0,65	—0,12
Hf^{173}	0,26	17,3*	12,8	$1197\,(0_\beta)\to 0$	0,46	—0,061
Pu^{238}	0,28	23,3	21,2	$935\,(0_\beta)\to 0$	0,53	—0,075
Pu^{240}	0,27	23,7	20,0	$858\,(0_\beta)\to 0$	0,52	—0,066

Продолжение

Ядро	Эксперимент: $\rho(0\to 0)$	Эксперимент: $X\left(\frac{E0,0\to 0}{E2,0\to 20}\right)$	Теория: $X\left(\frac{E0,0_\beta\to 0}{E2,0_\beta\to 20}\right)$	Теория: $X\left(\frac{E0,0_\gamma\to 0}{E2,0_\gamma\to 20}\right)$	Литература
Sm^{152}	—	0,077 0,016	0,36	8,2	[15, 14, 16, 17]
Gd^{154}	—	0,077 0,016	0,34	10	[15, 18]
Gd^{156}	—	0,8	0,45	66	[15, 18]
Hf^{178}	—	0,18±0,04	0,29	12	[14, 16]
Pu^{238}	—	0,14	0,32	110	[14, 16]
Pu^{240}	—	0,13÷0,30	0,30	31	[19]

β-вибрационной, γ-вибрационной или аномальной полосы. Теоретические значения X приведены для двух случаев соответственно переходам на первое возбужденное состояние с уровней β-вибрационной или аномальной полосы. Значения s и q, отмеченные звездочками в табл. 1 и 2, получены из теоретических оценок.

Таблица 2

$E0$-переходы между состояниями со спином 2

Ядро	β_0	$s \equiv \frac{\varepsilon(22)}{\varepsilon(20)}$	$q = \frac{\varepsilon(0_\beta)}{\varepsilon(20)}$	$E0$-переход, *Кэв*	Теория		
					$\rho(2\beta \to 20)$	$\rho(2\gamma \to 20)$	$\rho(22 \to 20)$
Sm^{152}	0,29	8,91	5,60	$807(2_\beta) \to 122$	0,75	—0,13	+0,053
Gd^{154}	0,28	8,1	5,52	$816(2_\beta) \to 123$	0,72	—0,14	+0,088
Gd^{156}	0,32	13	11,4	$1130(2_\beta) \to 89$	0,65	—0,12	+0,126
W^{182}	0,24	12,2	11,6*	$1222(22) \to 100$	0,43	—0,084	—0,133
W^{184}	0,22	8,13	21*	$904(22) \to 111$	0,26	+0,084	—0,003
Os^{188}	0,18	4,07	11,4	$634(22) \to 155$	0,24	+0,079	—0,011
Os^{190}	0,16	2,98	18*	$557(22) \to 187$	0,16	+0,012	—0,004
Pt^{196}	0,12	1,91	6,2*	$685(22) \to 354$	0,15	+0,036	—0,023
Hg^{198}	0,10	2,64	4*	$1087(22) \to 412$	0,13	—0,55	—0,034
Th^{232}	0,24	15,8	14,5*	$775(2_\beta) \to 50$	0,47	—0,080	+0,15
U^{238}	0,27	23,8	22,2	$1036(2_\beta) \to 45$	0,48	—0,067	+0,054

Продолжение табл. 2

Ядро	Эксперимент		Теория		Литература
	$\rho(2 \to 2)$	$X = \left(\frac{E0, 2 \to 2}{E2, 2 \to 2}\right)$	$X = \left(\frac{E0, 22 \to 20}{E2, 2 \to 20}\right)$	$X = \left(\frac{E0, 2_\beta \to 20}{E2, 2_\beta \to 20}\right)$	
Sm^{152}	0,34±0,05	>0,7	0,0088	1,30	[15,20]
Gd^{154}	—	>0,3	0,020	1,23	[15]
Gd^{156}	—	>0,4	0,036	1,54	[15]
W^{182}	—	0,032	0,046	0,88	[21]
W^{184}	—	0,015	$1,3 \cdot 10^{-5}$	0,75	[21]
Os^{188}	0,022±0,011	0,003—0,011	$8,5 \cdot 10^{-5}$	0,56	[22]
Os^{190}	0,025±0,028	0,0007—0,0065	$7,5 \cdot 10^{-6}$	0,48	[22]
Pt^{196}	0,009—0,050	0,0002—0,0012	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,30	[23]
Hg^{198}	0,064—0,390	0,0001—0,0015	0,0024	0,19	[22]
Th^{232}	0,08±0,02 0,25 0,17	—	0,050	0,89	[24, 25, 13]
U^{238}	0,097	—	0,0063	1,06	[25]

ЛИТЕРАТУРА

1. Church E. L., Weneser J. Phys. Rev., **103**, 1035, 1956.
2. Ростовский В. С. ЖЭТФ, **39**, 854, 1960.
3. Rasmussen J. O. Nucl. Phys., **24**, 682, 1961.
4. Reiner A. S. Nucl. Phys., **27**, 115, 1961.
5. Давыдов А. С., Ростовский В. С., Чабан А. А. Nucl. Phys., **27**, 134, 1961; «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 66, 1961.
6. Hara K. Nucl. Phys, **46**, 385, 1963.
7. Bohr A. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **26**, No. 14, 1952. Bohr A., Mottelson B. R. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **27**, No. 16 1953.
8. Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф. Nucl. Phys., 8, 237, 1958.

9. Бирбраир Б. Л., Пекер Л. К., Слив Л. А. ЖЭТФ, **36**, 803, 1961.
10. Давыдов А. С. Nucl. Phys., **24**, 682, 1961; «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 1, 56, 1961.
11. Day P., Klema E. D., Mallman C. A. Argonne Nat. Labor. Report ANL-6220, Now., 1960; Nucl. Phys., **25**, 266, 1961.
12. Беляк В. Н., Заикин Д. А. «Изв. АН СССР», сер. физическая, **25**, 1663, 1961; Nucl. Phys., **30**, 142, 1962.
13. Stephens F. S., Diamond R. M., Perlman I. Phys. Rev. Lett., **3**, 435, 1959.
14. Rasmussen J. O. Nucl. Phys., **19**, 85, 1960.
15. Луценко В. Н. Nucl. Phys., **47**, 42, 1963.
16. Gallagher C. J., Nielsen H. L., Nielsen O. B. Phys. Rev., **122**, 1590, 1962.
17. Marclund I., Nathan O., Nielsen O. B. Nucl. Phys., **15**, 199, 1960.
18. Грошев Л. В., Демидов А. М., Иванов В. А., Луценко В. Н., Пелехов В. И. «Изв. АН СССР», сер. физическая, **26**, 1119, 1962.
19. Bunker M. E., and all. Phys. Rev., **116**, 143, 1960.
20. Sheline R. K., Nielsen H. L., Sperduto A. Nucl. Phys., **16**, 518, 1959.
21. Sakai M. Preprint, Oct., 1961.
22. Yamazaki Y., Nucl. Phys., **44**, 353, 1963.
23. Gerholm T. R., Petterson B. G. Phys. Rev., **110**, 1119, 1958.
24. Mo Gewen F. K., Stelson P. H. Phys. Rev., **120**, 1803, 1960.
25. Durham F. E., Rester D. H., Class C. M. Phys. Rev. Lett., **5**, 202, 1960.

Поступила в редакцию
12. 2 1964 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой
теории