Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1965

УДИ 539.126

Ю. П. ПЫТЬЕВ

КЛАССИЧЕСКИЕ СКАЛЯРНЫЕ МЕЗОННЫЕ ПОЛЯ

Рассматривается пятимерная скалярная теория поля. Соответствующие классические частицы являются сингулярностями поля. Динамические переменные частиц определяются как динамические переменные сингулярной части поля, при этом классические уравнения движения следуют из уравнений поля. Обсуждается вопрос о спектральном условии на массы и связь пятимерных уравнений поля с уравнениями квантовой механики.

В настоящей работе рассматриваются поля скалярных мезонов с точки зрения представления о наблюдаемых классических частицах как сингулярностях поля. Как и в работе [1], поведение сингулярностей описывается уравнением Якоби—Гамильтона*

$$G^{\sigma\mu}\varphi_\sigma\varphi_\mu = 0;\ G^{\sigma\mu} = \begin{pmatrix} \delta^{ik} & -g^i \\ -g^k & 1+\delta_{ik}g^ig^k \end{pmatrix},$$
$$\varphi_\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma},\ g^i = \frac{e}{m_0c^2}A^i,\ x^0 = ict,\ x^4 = \frac{s}{m_0c};\quad i = 0 \div 3, \tag{1}$$

которое должно быть уравнением характеристических многообразий для уравнения поля (здесь s — действие). Для электромагнитных потенциалов A^i, входящих в $G^{\sigma\mu}$, мы принимаем калибровку Лоренца, поэтому

$$\frac{\partial G^{\sigma\mu}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{2}$$

Так как, кроме того, $\det G^{\sigma\mu} = \lambda/G = 1$, то главную линейную часть уравнения распространения, имеющего (1) своим характеристическим уравнением, можно представить в следующем инвариантном виде:

$$L[W] = \partial/\partial x^\sigma\,(\sqrt{G}\,G^{\sigma\mu}\partial W/\partial x^\mu)/\sqrt{G} = G^{\sigma\mu}W_{\sigma\mu}.$$

В настоящей работе рассматривается простейшее уравнение распространения

$$L[W] = 0. \tag{3}$$

Это уравнение описывает скалярные мезонные поля, сингулярности

* В дальнейшем греческие индексы принимают значения от 0 до 4; по индексам, встречающимся дважды, подразумевается суммирование.

этих полей соответствуют классическим частицам — мезонам. В конце работы кратко обсуждаются свойства уравнения

$$L[W] = SW. \tag{4}$$

Канонический формализм, законы сохранения

Рассмотрим следующий лагранжиан:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} G^{\sigma\mu} W_\sigma W_\mu, \quad W_\sigma = \frac{\partial W}{\partial x^\sigma}. \tag{5}$$

При условии (2) уравнение поля (3) является уравнением Эйлера вариационной проблемы $\delta \int\limits_{(s)} \mathscr{L}\, d\Omega = 0$, $\underset{(s)}{d\Omega} = dx^0\, dx^1 \ldots dx^4$. Канонический тензор, соответствующий лагранжиану (5), определим равенствами

$$T^\sigma_\mu = \delta^\sigma_\mu \mathscr{L} - W_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial W_\sigma}.$$

Тензор T^σ_μ удовлетворяет соотношению *.

$$\frac{\partial T^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (x^\mu)}, \tag{6}$$

которое выполняется в силу уравнения поля (3). В случае, когда электромагнитное поле отсутствует, $g^i = 0$, правые части в (6) обращаются в нуль, и для свободного поля имеем

$$\frac{\partial T^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma} = 0. \tag{7}$$

Интегрируя соотношения (7) по некоторой области 5-ти пространства, мы приходим к выводу, что равен нулю интеграл по гиперповерхности, охватывающей рассматриваемую область 5-ти пространства

$$\int \frac{\partial T^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma} \underset{(s)}{d\Omega} = \oint T^\sigma_\mu\, dS_\sigma = 0. \tag{8}$$

Отсюда немедленно следует, что вектор

$$\mathscr{P}_\mu = \int T^\sigma_\mu\, dS_\sigma, \tag{9}$$

где интеграл берется по гиперповерхности, содержащей все пространство $x^1, \ldots x^4$, при известных ограничениях на T^σ_μ не зависит от x^0. Вектор (9) назовем вектором энергии—импульса—массы W-поля. Равенства $\mathscr{P}_\mu = \mathrm{const}$ формулируют, таким образом, закон сохранения этого вектора в отсутствие внешнего электромагнитного поля. Заметим, что вектор (9) можно записать в виде интеграла по гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$

$$\mathscr{P}_\mu = \int T^0_\mu\, dS_0 = \int T^0_\mu\, dx^1 \ldots dx^4, \tag{10}$$

что позволяет назвать $\pi_\mu = T^0_\mu$ вектором плотности энергии — импульса — массы W-поля.

Если присутствует внешнее электромагнитное поле, то интегрируя

* (x^μ) означает производную по явно входящему x^μ.

соотношение (6) по области пространства, заключенной между бесконечно близкими гиперплоскостями $x^0=\text{const}$ и $x^0+dx^0=\text{const}$, получаем уравнения, описывающие изменение вектора $\mathscr{P}_\mu$ вследствие взаимодействия W-поля с электромагнитным полем

$$\frac{d}{dx_0}\mathscr{P}_\mu = \int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (x^\mu)} dS_0 = \int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^i} \frac{\partial g^i}{\partial x^\mu} dS_0. \tag{11}$$

Пользуясь выражением, стоящим справа под знаком интеграла, определяем, как обычно, вектор плотности тока W-поля: $j^k = \partial\mathscr{L}/\partial A_k = = \frac{e}{m_0c^2}\partial\mathscr{L}/\partial g_k$, $k = 0 \div 3$. Этим соотношением определяются первые четыре компонента. Однако имеет место равенство: $\partial\mathscr{L}/\partial g_k = T^k_4$, которое позволяет определить пятимерную плотность тока $j^\sigma = \frac{e}{m_0c^2}T^\sigma_4$. Определенный таким образом вектор j^σ (и в случае внешнего поля) в силу (7) удовлетворяет закону сохранения $\partial j^\sigma/\partial x^\sigma = 0$*.

Введенный вектор плотности тока позволяет переписать формулу (10) в следующем виде, который будет удобен в дальнейшем:

$$\frac{e}{m_0c^2}\frac{d}{dx^0}P_\mu = \int \frac{\partial g_\sigma}{\partial x^\mu} j^\sigma dS_0; \quad g_4 \equiv 0. \tag{12}$$

Сингулярности W-поля

Нас будет интересовать решение уравнения (3) в форме обобщенной распространяющейся волны [2]

$$W(x^\sigma) = \sum_{i=0} f_i(\varphi(x^\sigma))\, q^i(x^\sigma); \quad \frac{df_i}{d\varphi} = f_{i-1}. \tag{13}$$

Здесь φ — фазовая функция (как будет видно из дальнейшего — эйконал, решение уравнения (1)); последовательность функций f_j (возрастающей гладкости) определяется заданием f_0—формы волны. Мы имеем, таким образом, дело с семейством решений уравнения (3), зависящим от произвольной функции. Разложение (13) является асимптотическим в следующем смысле (аналогично разложениям геометрической оптики): разность между точным решением и конечной суммой (13) может быть сделана произвольно гладкой функцией, если взять достаточно большое число членов разложения. С помощью (13) мы можем, иными словами, выделить сингулярную часть решения (3).

Подставляя разложение (13) в уравнение (3) и требуя, чтобы коэффициенты при f_j обращались по отдельности в нуль, мы получим, прежде всего, соотношение на $\varphi(x^\sigma)$. Нетрудно проверить, что этим соотношением оказывается уравнение (1) и фазовая функция является эйконалом. Для коэффициента $q^0(x^\sigma)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение, справедливое вдоль характеристического луча

$$2G^{0\sigma}\varphi_\sigma \frac{dq^0}{dx^0} + q^0 L[\varphi] = 0. \tag{14}$$

* Как здесь, так и в остальных аналогичных случаях название «вектор» следует понимать в следующем ограниченном смысле, который, впрочем, ясен из обозначений: $\pi_{1\div 4}$ образуют вектор в пространстве $x^{1\div 4}$, а $j^{0\div 3}$ образуют вектор в пространстве $x^{0\div 3}$ и т. п.

В свою очередь совокупность всех характеристических лучей на поверхности $\varphi=\text{const}$ определяется, как известно, системой уравнений (характеристической системой уравнения (1))

$$\frac{dx^k}{dx^0} = \frac{G^{k\sigma}\varphi_\sigma}{G^{0\mu}\varphi_\mu}, \quad k = 1 \div 4. \tag{15}$$

Пусть $x^k = x^k(x^0, \xi^k)$ — общий интеграл этой системы. Тогда для определителя $D = |\partial x^i/\partial \xi^k|$ имеет место равенство $d/dx^0 (\ln|D|) = \partial/\partial x^i \times \times \{G^{i\sigma}\varphi_\sigma/(G^{0\mu}\varphi_\mu)\}$, $i = 1 \div 4$. Отсюда и из (14) следует, что $q^0 = Q(\xi^i)(DG^{0\sigma}\varphi_\sigma)^{-\frac{1}{2}}$, где Q — произвольная функция интегралов системы (15). Этим соотношением определяется поведение коэффициента при главной особенности в W.

Рассмотрим вектор $\mathscr{P}_\sigma$. Пусть пока внешнее поле отсутствует. Область интегрирования в (10) разобьем на две части. К первой части отнесем область, в которой поле W регулярно. Вторая часть области интегрирования, в которой W имеет особенность, представляется некоторой окрестностью характеристической поверхности $\varphi=0$. Эта окрестность в окончательном выражении стремится к нулю; интеграл (10) по этой области даст вектор $\mathscr{P}_\sigma$ для сингулярной части W-поля. Рассмотрим этот интеграл. Прежде всего перейдем к новым переменным интегрирования $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \varphi$, где ξ^i — интегралы системы (15) (например, начальные координаты характеристического луча).

Тогда

$$dS_0 = \left|\frac{\partial(x^1 \ldots x^4)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \varphi)}\right| d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3\, d\varphi = D\, dS_0^* . \tag{16}$$

Выделяя далее главную особенность в выражении для T_σ^0 вблизи $\varphi = 0$, имеем

$$T_\sigma^0 = -\varphi_\sigma(\varphi_0 - g_0\varphi_4)\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2 + \ldots \tag{17}$$

Здесь

$$\partial W/\partial\varphi = f_{-1}(\varphi)\, q^0 + \ldots = f_{-1}(\varphi)\, Q(\xi^i)(DG^{0\sigma}\varphi_\sigma)^{-\frac{1}{2}} + \ldots$$

Подставляя (16) и (17) в интеграл (10) и стягивая область интегрирования к нулю (по φ к $\varphi = 0$ и по ξ^i к $\xi^i = x^i_{\text{нач}}$) так, чтобы $\int (Qf_{-1})^2\, dS_0^* = 1$, получаем вектор $\mathscr{P}_\sigma$ для сингулярной части W-поля: $\mathscr{P}_\sigma^* = -\varphi_\sigma$. Это соответствует следующему 5-ти вектору для свободной частицы, описываемой уравнением эйконала

$$P_\sigma = \mathscr{P}_\sigma^* = \left\{\frac{i}{c}E, p_1, p_2, p_3, -m_0 c\right\}$$

(этим оправдывается название, данное вектору $\mathscr{P}_\mu$). Таким образом, если у поля W имеются особенности, то закон сохранения вектора $\mathscr{P}_\sigma$ как закон сохранения энергии, импульса и массы W-поля принимает вид

$$\sum \mathscr{P}_\sigma^* + \mathscr{P}_\sigma = \text{const}, \tag{18}$$

где в сумму выделены векторы, соответствующие сингулярностям W. Уравнение (18) формулирует закон сохранения энергии, импульса и массы в виде суммы регулярной и сингулярной частей. Произвольное изменение регулярной части W не изменяет $\mathcal{P}^*_\sigma$, отсюда следует, что сохраняются в отдельности как $\mathcal{P}_\sigma$, так и $\mathcal{P}^*_\sigma$.

Рассмотрим поведение W-поля с особенностями во внешнем электромагнитном поле. Подставив в интеграл (12) выражение для тензора $T^\sigma_4 = -\varphi_4 G^{\sigma\mu}\varphi_\mu (\partial W/\partial\varphi)^2 + \ldots$ и действуя точно так же, как и в случае свободного поля, придем к равенствам

$$\frac{e}{m_0c^2}\left[\frac{d}{dx^0}(\mathcal{P}^*_\sigma + \mathcal{P}_\sigma) + \varphi_4 \frac{G^{\lambda\mu}\varphi_\mu}{G^{00}\varphi_0}\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\sigma}\right] = \int \frac{\partial g_\nu}{\partial x^\sigma} j^\nu dS_0.$$

Предыдущее рассуждение в данном случае позволяет утверждать, что эти равенства могут быть записаны в отдельности для $\mathcal{P}_\sigma$ и $\mathcal{P}^*_\sigma$ (для $\mathcal{P}_\sigma$ в виде (12)). Что касается уравнений для $\mathcal{P}^*_\sigma$, то они имеют вид

$$\frac{e}{m_0c^2}\frac{d}{dx^0}\mathcal{P}^*_\sigma = -\frac{e}{m_0c^2}\frac{d}{dx^0}\varphi_\sigma = -\varphi_4\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{G^{\lambda\mu}\varphi_\mu}{G^{00}\varphi_0}\frac{e}{m_0c^2} \tag{19}$$

и представляют уравнения движения Лоренца для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Рассмотрим выражение для полного тока сингулярной части W-поля: $J^\sigma = \int j^\sigma dS_0$. Этот интеграл можно вычислить точно так же, как, скажем, интеграл (9). Но проще воспользоваться правой частью в равенстве (19), откуда немедленно следует, что сингулярная часть полного тока W-поля имеет вид*

$$\frac{i}{c}J^{*\sigma} = ie\frac{dx^\sigma}{dx^0} = \left\{ie, e\beta^1, e\beta^2, e\beta^3, \frac{e}{m_0c^2}l\right\},\ \beta^i = \frac{v^i}{c}. \tag{20}$$

Первые четыре компонента соответствуют обычному току, связанному с движением заряженной частицы. Последний компонент (20) соответствует функции Лагранжа l этой частицы, умноженной на e/m_0c^2.

Уравнения (3), (4) и спектральное условие на массы частиц

Вопрос о спектре масс тесно связан с обсуждаемыми уравнениями. В этом нетрудно убедиться, проследив связь решений уравнений (3) и (4) с соответствующими уравнениями квантовой механики. Формально связь уравнения (3) с уравнением Клейна—Гордона состоит в следующем: мы вводим оператор массы $\hat{m} = -\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial x^4}$ и рассматриваем реше-

---

*Заметим, что полный ток, связанный с движением сингулярности, дается правильным 5-ти вектором

$$J^{*\sigma} = e\dot{x}^\sigma = \left\{ie\frac{dx^0}{d\tau}, e\frac{dx^1}{d\tau}, e\frac{dx^2}{d\tau}, e\frac{dx^3}{d\tau}, e\frac{dx^4}{d\tau}\right\},$$

если интеграл, определяющий полный ток, вычисляется по пространственно подобной гиперповерхности одновременных состояний $\tau(x^\sigma) = \text{const}$, где $\tau(x^\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$G^{\sigma\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu} = 1.$$

Если в (11) интегралы записать на указанной гиперповерхности, то уравнения движения сингулярности примут вид

$$\frac{d\varphi_\mu}{d\tau} = \frac{dP^*_\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\varphi_\alpha\varphi_\beta.$$

ния уравнения (3), являющиеся собственными функциями этого оператора

$$\widehat{m}W = -\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial W}{\partial x^4} = m_0 W.$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{m}^2 W = -\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial (x^4)^2} = m_0^2 W,$$

и, следовательно, W как функция $x^0 \div x^3$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона [1]

$$\Box W = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} W.$$

Этот вывод означает, что уравнения квантовой механики описывают W-поля с фиксированной массой.

Рассмотрим уравнение (4). Так как соответствующий лагранжиан имеет вид $\mathcal{L} = (G^{\sigma\mu} W_\sigma W_\mu + SW^2)/2$, то даже в случае свободного поля в силу уравнения (6) мы не имеем закона сохранения полного импульса поля. Тем не менее что касается сингулярной части, то все выводы предыдущих разделов остаются верными (в частности уравнение (19)), так как вклад члена SW^2 в сингулярную часть динамических переменных поля равен нулю (член SW^2 не обладает должной сингулярностью).

Основную идею мы поясним на максимально упрощенной модели. Рассмотрим свободное незаряженное поле. Чтобы обеспечить сохранение обычного четырехимпульса, будем считать, что S не зависит от координат $x^0 \div x^4$. Так как для незаряженного поля требование градиентной инвариантности излишне, можно считать S некоторой функцией пятой координаты x^4. При этом не будет сохраняться компонент P_4, соответствующий массе поля. Решение уравнения (4) будем искать в виде $W = \Psi(x^0 \ldots x^3)\Theta(x^4)$. Разделяя переменные, находим $\mu^2 = (S\Theta - \Theta_{44})/\Theta = \Box\Psi/\Psi$. Уравнение для Θ удобно переписать, введя новую безразмерную переменную $\xi = s/\hbar$ вместо $x^4 = s/m_0 c$

$$\Theta_{\xi\xi} + (\lambda^2 - \Phi(\xi))\Theta = 0, \quad \mu = \frac{m_0 c}{\hbar}\lambda, \quad \Phi = \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} S. \qquad (21)$$

Потребуем далее, чтобы уравнение (4) было инвариантным относительно сдвига $x^4 \to x^4 + \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}$. В этом случае Φ оказывается периодической функцией ξ и для уравнения (21) может быть сформулирована задача на собственные значения. Для этого следует потребовать периодичности Θ с периодом 4π. Это требование определит последовательность значений $\lambda = \lambda_n$. Соответствующая λ_n функция Ψ_n будет удовлетворять уравнению Клейна—Гордона для частицы с массой $m_n = m_0\lambda_n : \Box\Psi_n = \mu_n^2\Psi_n$. Таким образом, уравнение (4) позволяет описать всю совокупность нейтральных скалярных частиц со спектром масс m_n.

Отметим в заключение, что, как показано в работах [13], уравнение (3) также описывает совокупность скалярных частиц с дискретным спектром масс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. ДАН СССР, **149**, № 2, 1963.
2. Ludwig B. Comm. Pure Appl. Math., **13**, No. 3, 1960.
3. Румер Ю. Б. Исследования по 5-ти оптике. ГТТИ, М., 1956; Кард П. ЖЭТФ, 27, 263, 1954.

Поступила в редакцию
3. 3 1964 г.

Кафедра
теоретической физики