ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1965

УДИ 531.5

В. Д. ЗАХАРОВ

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ

Дана физическая интерпретация некоторых известных решений уравнений Киллинга как новых точных решений уравнений Эйнштейна (с правой частью), отвечающих гравитационным волнам в пространстве — времени с электромагнитным излучением.

Введение

В статье [1] для рассмотрения ряда известных решений уравнений Эйнштейна в вакууме был применен новый общековариантный критерий гравитационных волн [2], предложенный А. Л. Зельмановым и выражающийся тензорным волновым уравнением *:

$$\Box^{\sigma}_{\sigma} R_{\mu\alpha\beta\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\mu\alpha\beta\nu,\sigma\rho} = K_{\mu\alpha\beta\nu},$$

где тензор $K_{\mu\alpha\beta\nu}$ обладает свойствами симметрии тензора кривизны $R_{\mu\alpha\beta\nu}$ и не содержит производных от $g_{\mu\nu}$ выше третьего порядка.

Будем рассматривать этот критерий в частном случае, когда

$$g^{\rho\sigma} R_{\mu\alpha\beta\nu,\sigma\rho} = 0. \tag{1}$$

В [1] было показано, что некоторые точные решения уравнений Эйнштейна $R_{\alpha\beta} = 0$ типа волн (решения Переса, Такено, Петрова и др.), принадлежащие ко II типу полей тяготения по классификации А. З. Петрова, действительно удовлетворяют нетривиальным образом условию (1). В [3] было в общем виде показано, что пространство Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), нетривиально удовлетворяющее волновому критерию (1), может принадлежать только к типу N (вырожденному второму типу) классификации А. З. Петрова полей тяготения по алгебраической структуре тензора кривизны.

В настоящей работе мы продолжаем исследование волновых (в смысле критерия А. Л. Зельманова) метрик пространства—времени V_4 сигнатуры —2, однако уже для уравнений Эйнштейна с отличной от нуля правой частью

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\lambda T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

---

* Запятая с n последующими индексами здесь и в дальнейшем обозначает n-кратное ковариантное дифференцирование; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Будем рассматривать только римановы пространства V_4, допускающие движения, причем воспользуемся классификацией V_4 по группам движений, представленной в наиболее полном виде в книге А. З. Петрова [4]. Некоторым метрикам, известным по этой классификации как решения групповых уравнений Киллинга, будет дана физическая интерпретация как новых решений уравнений Эйнштейна (2), описывающих гравитационные волны. При этом тензор $T_{\mu\nu}$ будет интерпретирован как тензор энергии—импульса изотропного [5] электромагнитного поля (ein Nullfeld)

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{.\nu}, \tag{3}$$

определяемого условиями

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu}{}^{*}F^{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор (антисимметрический) электромагнитного поля, ${}^{*}F^{\mu\nu}$ — дуальный ему тензор:

$${}^{*}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad \eta^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{5}$$

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметрический тензор, причем $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1$ для четной подстановки индексов (μ, ν, ρ, σ) и -1 для нечетной подстановки. Как известно, физически изотропное электромагнитное поле соответствует случаю электромагнитного излучения, когда для наблюдателя 4—вектор Пойнтинга равен нулю только в системе координат, движущейся с фундаментальной скоростью.

Для того чтобы тензор энергии — импульса $T_{\mu\nu}$ описывал изотропное электромагнитное поле (4), необходимо [6], чтобы метрический тензор $g_{\mu\nu}$, отвечающий ему в соответствии с уравнениями (2), удовлетворял следующим ковариантным требованиям:

$$R = 0, \; R_{\alpha\rho}R^{\rho\beta} = \frac{1}{4}\delta^{\beta}_{\alpha}(R_{\rho\sigma}R^{\sigma\rho}) = 0. \tag{6}$$

Согласно результату Нордтведта и Пагельса [7], уравнения (6) плюс дополнительное ковариантное уравнение

$$\eta_{\mu\varepsilon\gamma\sigma}(R^{\varepsilon\gamma,\sigma}R^{\delta\tau} + R^{\delta\gamma,\sigma}R^{\varepsilon\tau} - R^{\delta\varepsilon,\sigma}R^{\gamma\tau}) = 0 \tag{7}$$

являются достаточными условиями того, чтобы уравнения Максвелла однозначным образом определяли изотропное электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$.

Приведем некоторые решения уравнений Киллинга, которые и ранее интерпретировались рядом авторов как решения уравнений (2), описывающие сосуществование гравитационного и электромагнитного излучения.

1. $$ds^2 = 2dx^0dx^1 + \alpha(x^0)\,dx^{2^2} + 2\beta(x^0)\,dx^2dx^3 + \gamma(x^0)\,dx^{3^2}. \tag{8}$$

Эта метрика (см. в [4], стр. 273, 288, 299) допускает разрешимые группы движений G_3, G_4 и G_5, действующие транзитивно на изотропных трехмерных гиперповерхностях ${}^{*}V_3$, с операторами

$$G_3: X_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3; \tag{9}$$

$$G_4: X_i = p_i\,(i = 1, 2, 3), \; X_4 = x^2p_1 + \varphi p_2 + \psi p_3; \tag{10}$$

$$G_5: X_i = p_i\,(i = 1, 2, 3), \; X_4 = x^2p_1 + \varphi p_2 + \psi p_3,$$

$$X_5 = x^3 p_1 + \psi p_2 + \nu p_3, \quad (11)$$

где

$$\varphi = -\int \frac{\gamma}{m} dx^0, \quad \psi = \int \frac{\beta}{m} dx^0,$$

$$\nu = -\int \frac{\alpha}{m} dx^0, \quad m = \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0.$$

2. Частный случай этой метрики ([4], стр. 288)

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 + \alpha(x^0)(dx^{2^2} + dx^{3^2}), \quad (12)$$

допускающий 4-параметрическую группу G_4, действующую транзитивно на $^*V_3$, с операторами

$$X_i = p_i \, (i = 1, 2, 3), \quad X_4 = x^3 p_2 - x^2 p_3, \quad (13)$$

но определяющий существенно новое пространство—время, поскольку структуры (10) и (13) неизоморфны.

Непосредственная подстановка показывает, что метрики (8) и (12) удовлетворяют как волновому критерию (1), так и условиям (6) и (7). В работах [8, 9] отмечалось (правда, без обоснования с помощью условий (6) и (7)), что метрика (8) может описывать гравитационные волны электромагнитного поля.

§ 1. Новые волновые решения уравнений Эйнштейна

В этом параграфе мы приводим некоторые метрики пространства—времени сигнатуры —2 (известные ранее лишь как решения уравнений Киллинга), которые удовлетворяют следующей совокупности требований: а) допускают группу Ли движений, действующую на некоторой изотропной гиперповерхности транзитивности; б) являются решениями тензорного волнового уравнения (1); в) удовлетворяют условиям (6) и (7) и, следовательно, г) являются точными решениями уравнений Эйнштейна (2), правая часть которых удовлетворяет условиям (3) и (4), определяющим изотропное электромагнитное поле (т. е. поле электромагнитного излучения). Метрики, удовлетворяющие этим требованиям, описывают одновременное существование электромагнитных и гравитационных волн в пространстве—времени без источников.

В выбранной системе отсчета плотность электромагнитного излучения ρ, плотность потока энергии J^k и давление излучения p будем характеризовать следующими хронометрически инвариантными величинами [10]:

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \quad \frac{1}{c} J^k = \frac{T_0^k}{\sqrt{g_{00}}}, \quad ph^{ik} = c^2 T^{ik}, \quad (14)$$

где $h^{ik} = -g^{ik}$; $i, k = 1, 2, 3$. Тогда требование, чтобы плотность и давление были положительными, приводит к дополнительному условию

$$R_{00} < 0. \quad (15)$$

1. Пространство—время с метрикой ([4], стр. 287)

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - 2x^3 dx^2 (dx^0 + dx^1) + \alpha(x^0 + x^1)(dx^{2^2} + dx^{3^2}) \quad (16)$$

допускает группу G_4 с операторами

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2 p_1 + p_3, \quad (17)$$

$$X_4 = \frac{1}{2}(x^{2^2} - x^{3^2})p_1 - x^3p_2 + x^2p_3,$$

действующую на изотропной гиперповерхности транзитивности $*V_3$.

Условие (15) вместе с сигнатурными условиями приводят к требованию

$$\alpha < 0, \quad \alpha_0^2 - 2\alpha\alpha_{00} > -1 \tag{18}$$

(введем обозначения: $f_0 \equiv \partial f/\partial u$, $f_{00} \equiv \partial^2 f/\partial u^2 \ldots$, где $u = x^0 + x^1$).

Для метрики (16) только три компонента тензора $T_{\alpha\beta}$ отличны от нуля

$$T_{00} = T_{01} = T_{11}, \tag{19}$$

причем

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2\lambda\alpha^2}(1 + \alpha_0^2 - 2\alpha\alpha_{00}), \tag{20}$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$ (см. уравнения (2)).

2. Пространство—время с метрикой ([4], стр. 274)

$$ds^2 = du dv - 2x^3 du dx^2 + \alpha(u) dx^{2^2} + 2\beta(u) dx^2 dx^3 + \gamma(u) dx^{3^2}, \tag{21}$$

где $u = x^0 + x^1$, $v = x^0 - x^1$, или в развернутом виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x^3 & 0 \\ 0 & -1 & -x^3 & 0 \\ -x^3 & -x^3 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

допускает группу движений G_3 с операторами

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2p_1 + p_3, \tag{22}$$

действующую на изотропной гиперповерхности транзитивности $*V_3$.

Условия (15) вместе с сигнатурными условиями приводят к требованиям

$$\alpha < 0, \; m > 0, \; 2m(m_{00} + \beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - 1) - m_0^2 < 0, \tag{23}$$

где $m = \alpha\gamma - \beta^2$. Требования (23), очевидно, легко удовлетворяются выбором функций α, β, γ.

Подстановкой метрики (21) в уравнения Эйнштейна (2) убеждаемся, что только три компонента тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$ отличны от нуля:

$$T_{00} = T_{01} = T_{11} = \frac{1}{4\lambda m^2}[m_0^2 + 2m(1 + \alpha_0\gamma_0 - \beta_0^2 - m_{00})], \tag{24}$$

а из компонентов T_0^k $(k = 1, 2, 3)$ тензора T_μ^ν только один отличен от нуля:

$$T_0^1 = -T_{00}. \tag{25}$$

На основании формул (24), (25) и (14), имеем следующие выражения для плотности энергии ρ и плотности импульса J^k:

$$\rho = \frac{1}{4\lambda m^2}[m_0^2 + 2m(1 + \alpha_0\gamma_0 - \beta_0^2 - m_{00})], \tag{26}$$

$$J^1 = -c\rho, \quad J^2 = 0, \quad J^3 = 0. \tag{27}$$

Для метрики (16) аналогичные выражения для величин ρ и J^k (в частности, и формула (20)) могут быть получены как частный случай формул (26) и (27). Хотя метрика (16) и является частным случаем метрики (21), она определяет существенно иное пространство — время и не может быть получена из (21) преобразованием координат, поскольку группы (17) и (22) обеих метрик совершенно различны.

Рассмотрим конкретный пример пространства — времени с метрикой типа (21). Полагая $\alpha=-Au^{2/3}$, $\gamma=-Bu^{2/3}$, $\beta=Cu^{-2/3}$, где A, B, C — положительные постоянные, причем $M=AB-C^2>0$, получаем пространство — время с плотностью энергии электромагнитного поля вида

$$\rho=\frac{1}{2\lambda}u^{-2}\left(\frac{8}{9}+\frac{1}{M}u^{2/3}\right).$$

3. Метрика

$$ds^2=a(u)\left(dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}\right)+b(u)\,dx^{3^2}, \tag{28}$$

где $u=x^0+x^1$, является частным случаем метрики ([4], стр. 261), для которой пространство — время допускает группу движений G_3, действующую транзитивно на $^*V_2$, с операторами

$$X_1=p_1, \quad X_2=p_2, \quad X_3=x^2p_1+x^0p_2. \tag{29}$$

Условие (15) и сигнатурные условия приводят к неравенствам

$$a>0,\ b<0,\ \frac{3a_0^2}{2a^2}+\frac{b_0^2}{b^2}>\frac{a_{00}}{a}+\frac{b_{00}}{b}-\frac{a_0b_0}{ab}. \tag{30}$$

Компоненты $T_{\mu\nu}$, отличные от нуля, имеют вид

$$T_{00}=T_{01}=T_{11}=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{a_{00}}{a}+\frac{b_{00}}{b}\right)+\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{3a_0^2}{2a^2}+\frac{b_0^2}{b^2}+\frac{a_0b_0}{ab}\right), \tag{31}$$

а отличные от нуля компоненты T_μ^ν — вид

$$T_0^0=-T_0^1=-T_1^1=T_1^0=\frac{1}{a}T_{00}, \tag{32}$$

откуда, на основании формул (14), имеем

$$\rho=\frac{1}{2\lambda a}\left(\frac{3a_0^2}{2a^2}+\frac{b_0^2}{b^2}-\frac{a_{00}}{a}-\frac{b_{00}}{b}+\frac{a_0b_0}{ab}\right), \tag{33}$$

$$J^1=-\frac{\rho c}{\sqrt{a}}, \quad J^2=0, \quad J^3=0. \tag{34}$$

Полагая, например, $a=-b=Ae^u$, где $A=\text{const}>0$, получаем экспоненциально убывающее значение для плотности

$$\rho=\frac{3}{4\lambda A}e^{-u}.$$

Опуская индекс в выражениях (27) и (34) для вектора J^k по формуле

$$J_i=J^kh_{ik}, \quad i, k=1, 2, 3,$$

где $h_{ik}=-g_{ik}+\frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}$ есть хронометрически инвариантная пространственная метрика [10], имеем, на основании формул (14), для всех трех исследуемых метрик (16), (21) и (28):

$$J^i J_i = \rho^2 c^2, \quad p = \frac{1}{3} \rho c^2, \tag{35}$$

что и следовало ожидать для поля электромагнитного излучения.

Идея интерпретации исследованных здесь метрик как полей электромагнитного излучения на основе формул (35) была предложена автору А. Л. Зельмановым, которому пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Д. Сообщения ГАИШ, № 131, 42, 1964.
2. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, М., 1962. Вступит. статья Д. Д. Иваненко, стр. 10—12.
3. Захаров В. Д. ДАН СССР, **161**, № 3, 69, 1965.
4. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., 1961.
5. Ehlers J., Sachs R. K. Z. Phys., **155**, No. 4, 498, 1959.
6. Peres A. Ann. Phys. (USA), **14**, 419, 1961.
7. Nordtvedt K., Pagels H. Ann. Phys. (USA), **17**, No. 3, 426, 1962.
8. Peres A. Phys. Rev., **118**, No. 4, 1105, 1960.
9. Takeno H. Tensor, **12**, No. 3, 197, 1962.
10. Зельманов А. Л. Труды VI совещания по вопросам космогонии. Изд-во АН СССР, М., 1959.

Поступила в редакцию
14. 3 1964 г.

Кафедра
астрофизики