Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1965

УДИ 538.561

В. Б. БРАГИНСКИЙ

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ВЫСОКОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

Вычислены квантили для распределения амплитуды колебаний в высокодобротной колебательной системе, на которую воздействует стационарная флуктуационная сила. Получены соотношения для минимальных обнаружимых силы и мощности при времени воздействия на такие системы меньшем, чем время установления собственных колебаний. Указаны возможности повышения разрешающей способности в некоторых физических экспериментах.

В целом ряде тонких физических экспериментов, осуществляемых в лабораторных условиях, при обнаружении слабых сигналов на фоне флуктуаций длительность сигнала может быть меньше, чем время установления колебаний в системе, на которую воздействует сигнал. Особенности условий обнаружения таких сигналов и некоторые интересные физические следствия удобно рассмотреть на примере колебательной системы с высокой добротностью.

Рассмотрим колебательную механическую систему с одной степенью свободы, которая находится под воздействием внешней силы $F(\tau)$ в течение некоторого времени $0 \leqslant \tau \leqslant \hat{\tau}$. Кроме силы $F(\tau)$ на колебательную систему воздействует флуктуационная стационарная нормальная сила $F_ф$. В частном случае сила $F_ф$ вызвана тепловыми флуктуациями так, что $\overline{F_ф^2} = 4\varkappa T H \Delta f$, где T — температура, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, Δf — полоса частот, H — коэффициент трения.

О колебательной системе известно, что она обладает высокой добротностью:

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \ll \tau^* = \frac{2m}{H}. \tag{1}$$

Здесь τ_0 — период колебаний, m — масса, κ — жесткость. Под воздействием силы $F_ф$ в колебательной системе возникли колебания с амплитудой $A(\tau)\sin[\omega_0\tau + \Theta(\tau)]$. Для тепловых флуктуаций $\kappa\sigma^2 = \varkappa T$, где $\sigma^2 = \overline{A^2}$. Определим, какое минимальное значение силы $F(\tau)$ можно обнаружить, наблюдая за изменениями амплитуды A. При рассмотрении этой задачи ограничимся случаем, когда время воздействия силы $\hat{\tau}$ не слишком велико, так, что выполняется условие

$$\tau_0 \ll \hat{\tau} \ll \tau^*. \tag{2}$$

Выражение для плотности условного распределения амплитуды колебаний A_τ в момент τ имеет вид [1]

$$W(A_\tau/A) = \frac{A_\tau}{\sigma^2(1-Q^2)} I_0\left(\frac{QAA_\tau}{\sigma^2(1-Q^2)}\right) \exp\left[-\frac{A_\tau^2+QA^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right]. \quad (3)$$

В нашем случае $Q^2 \simeq \frac{r^2(\tau)}{\sigma^4} \simeq e^{-\frac{2|\hat{\tau}|}{\tau^*}}$.

Для того чтобы решить вопрос: обнаружено или не обнаружено воздействие силы $F(\tau)$ на колебательную систему, необходимо определить величину квантили $[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, которая с некоторой выбранной величиной достоверности $(1-\alpha)$ ограничивает возможные значения $A_{\hat{\tau}}$ в момент $\hat{\tau}$ при условии, что при $\tau=0$ амплитуда равнялась A:

$$1-\alpha = \int\limits_A^{[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}} W(A_\tau|A)\,dA_\tau. \quad (4)$$

В выражении (4) α обычно называется ошибкой первого рода. Если в результате наблюдений в конце интервала $\hat{\tau}$ оказалось, что $A_{\hat{\tau}} > [A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, то с достоверностью $1-\alpha$ можно утверждать, что кроме $F_ф$ на колебательную систему воздействовала некоторая сила $F(\tau)$.

При определении $[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$ сначала рассмотрим случай $A(0)=0$. В этом предположении выражение (4) принимает вид

$$1-\alpha = \int\limits_0^{[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}} W(A_\tau|0)\,dA_\tau = \int\limits_0^{[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}} \frac{A_\tau}{\sigma^2 c} \exp\left[-\frac{A_\tau^2}{2c\sigma^2}\right] dA_\tau =$$

$$= 1-\exp\left[-\frac{[A_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha}}{2c\sigma^2}\right],$$

где $c = \frac{2\hat{\tau}}{\tau^*} \ll 1$. (5)

Откуда

$$[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha} = \sigma\sqrt{c}\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \sigma\sqrt{c}\,\psi(\alpha). \quad (6)$$

При вычислении $[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$ мы воспользовались тем обстоятельством, что $I_0(0)=1$. Значение $[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$ не сильно изменится для всех начальных значений $A(0) \leqslant \sigma\sqrt{c}$, и с помощью соотношения (6) можно, задавая α оценивать границы возможного изменения амплитуды колебаний $[A_{\hat{\tau}}-A]_{1-\alpha}$ по истечении времени $\hat{\tau}$. Теперь предположим, что сила $F(\tau)$ в отсутствие $F_ф$ могла бы раскачать колебательную систему за время $\hat{\tau}$ до амплитуды B. Зададимся некоторым значением $\zeta = B/[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$ и вычислим величину ошибки второго рода β-вероятности того, что в предположении $B \neq 0$ осуществится результат $A_{\hat{\tau}} < [A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, при котором мы сделаем вывод $B=0$. При этом положим, что $\zeta \gg 1$. Сдвиг фаз φ между колебаниями, вызванными $F(\tau)$ и $F_ф$, может быть произвольным, так как по условию $A(0)$ близко к нулю. В результате совместного воздействия $F(\tau)$ и $F_ф$ в конце интервала $\hat{\tau}$ амплитуда колебаний будет равна

$$A^2_{\hat{\tau},F} = A^2_{\hat{\tau}} + B^2 + 2A_{\hat{\tau}}B\cos\varphi. \qquad (7)$$

Если окажется, что $A_{\hat{\tau},F} \leqslant [A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, то должен быть сделан вывод, что $B = 0$ и $F(\tau) = 0$. Поэтому вероятность ошибки второго рода β — это вероятность того, что $A_{\hat{\tau},F} \leqslant [A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, или используя (7), вероятность того,

$$A_{\hat{\tau}} \geqslant -B\cos\varphi - \sqrt{[A_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha} - B^2\sin^2\varphi}$$

и

$$A_{\hat{\tau}} \leqslant -B\cos\varphi + \sqrt{[A_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha} - B^2\sin^2\varphi}.$$

Откуда

$$\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi} d\varphi \int\limits_{-B\cos\varphi-\sqrt{[A_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha}-B^2\sin^2\varphi}}^{-B\cos\varphi+\sqrt{[A_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha}-B^2\sin^2\varphi}} W(A_\tau\,|\,0)\,dA_\tau, \qquad (8)$$

где $\sin\varphi_1 = 1/\zeta$.

Произведя замену обозначений $[a_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha} = \frac{[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}}{\sigma}$ и учитывая, что $\zeta = B/[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, выражение (8) можно преобразовать:

$$\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi}\left\{\exp\left[-\frac{[a_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha}(-\zeta\cos\varphi - \sqrt{1-\zeta^2\sin^2\varphi})}{2c}\right] - \right.$$

$$\left. -\exp\left[-\frac{[a_{\hat{\tau}}]^2_{1-\alpha}(-\zeta\cos\varphi + \sqrt{1-\zeta^2\sin^2\varphi})}{2c}\right]\right\}d\varphi, \qquad (9)$$

где так же, как и раньше, $c = \frac{2\hat{\tau}}{\tau^*}$.

Величина $[a_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$ связана с величиной ошибки первого рода α с помощью соотношения (6). Используя его, можно выразить β как функцию α и ζ

$$\beta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi}\left\{\alpha^{[-\zeta\cos\varphi-\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\varphi}]} - \alpha^{[-\zeta\cos\varphi+\sqrt{1-\zeta^2\sin^2\varphi}]}\right\}d\varphi. \qquad (10)$$

При α=0,05 для ζ=1,41 и ζ=2 величина β равна соответственно 0,117 и 0,005. Таким образом, вероятность не обнаружить воздействие силы $F(\tau)$, вызвавшей амплитуду $B = 2[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}$, не превышает 0,5%.

Обратимся к случаю, когда $A(0)$ и $A_{\hat{\tau}}$ не малые по сравнению с σ величины. Учитывая, что $c = \frac{2\hat{\tau}}{\tau^*} \ll 1$, функцию I_0 в (3) можно заменить ее асимптотическим выражением для больших значений аргумента $I_0(x) \simeq \simeq (2\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^x$. При этом выражение для плотности вероятности условного распределения $W(a_\tau\,|\,a)$ принимает простой вид

$$W(a_\tau\,|\,a)\,da_\tau \simeq \sqrt{\frac{a_\tau}{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi c}}\exp\left[-\frac{[a_\tau - a]^2}{2c}\right]da_\tau, \qquad (11)$$

где $a_\tau = \frac{A_\tau}{\sigma}$, $a = \frac{A}{\sigma}$.

Таким образом, при $A \cong \sigma$ нормированное изменение амплитуды $(a_\tau - a)$ подчиняется асимптотически нормальному закону с дисперсией, равной $c = \frac{2\hat{\tau}}{\tau^*}$. Поэтому для того, чтобы найти квантиль $[a_{\hat{\tau}} - a]_{1-\alpha}$, которая ограничит возможные изменения $a_{\hat{\tau}}$ при некоторой фиксированной вероятности ошибки первого рода α, можно воспользоваться обычной процедурой для нормального распределения

$$\alpha = [1 - \Phi(u_{1-\alpha})],$$

где

$$\Phi(u_{1-\alpha}) = \frac{[2]}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_{1-\alpha}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi, \quad u_{1-\alpha} = \frac{[a_{\hat{\tau}} - a]_{1-\alpha}}{\sqrt{c}}. \tag{12}$$

Задавая α и используя хорошо известные таблицы для функции Φ, можно определить квантили $u_{1-\alpha}$. Например, при $\alpha = 0{,}05$ $u_{0,95} = 1{,}96$, откуда

$$[A_{\hat{\tau}} - A]_{0,95} = \sigma \sqrt{c} \cdot 1{,}96. \tag{13}$$

Интересно сравнить близкие функции $\psi(\alpha) = [2 \ln(1/\alpha)]^{1/2}$ (см. выражение (6)) и $u_{1-\alpha}$. В таблице приведены значения $\varphi(\alpha)$ и $u_{1-\alpha}$ для нескольких значений α.

α	$\psi(\alpha)$	$u_{1-\alpha}$
0,05	2,45	1,96
0,01	3,04	2,58
0,005	3,25	2,81
0,001	3,72	3,29
0,0005	3,90	3,48
0,0001	4,29	3,88

Величина ошибки второго рода β для случая $A \simeq \sigma$ может быть рассчитана так, как это обычно делается в случае нормального распределения (см., например, [2]).

Как видно из соотношений (6) и (13), величина квантили $[A_{\hat{\tau}} - A]_{1-\alpha}$, определяющей минимальное обнаружимое изменение амплитуды, вызванное внешним воздействием $F(\tau)$, равна $\sigma\sqrt{c}$, помноженной на величину порядка $2 \div 4$ в зависимости от выбранных значений α и β и от начальных значений $A(0)$. Таким образом, для определения квантили необходима предварительная информация о величинах σ, τ^* и $\hat{\tau}$. Знание этих трех величин является обязательным, если желательно обнаружить однократное воздействие силы $F(\tau)$. Однако, если имеется возможность произвести несколько измерений воздействия одинаковых $F(\tau)$ с одинаковыми $\hat{\tau}$ (не меньше двух), то потребность в предварительной информации о величинах σ и τ^* отпадает. В этом случае вместо $\sigma \sqrt{c}\, u_{1-\alpha}$ следует брать $(s/\sqrt{n}) \cdot t_{1-\alpha}$, где s^2 — оценка дисперсии изменения амплитуды за время $\hat{\tau}$, взятая из опыта, n — число повторений воздействия $F(\tau)$, а $t_{1-\alpha}$ — квантили t-распределения. При большом числе повторений n, как известно [2], $t_{1-\alpha}$ можно заменять на $u_{1-\alpha}$.

Обсудим некоторые физические следствия из полученных выше соотношений. Как видно из выражений (6) и (12), наименьшее значение изменения амплитуды колебаний, вызванных внешним воздействием, которые еще возможно обнаружить, существенно зависят от величин $\hat{\tau}$ и τ^*, а с последней величиной в случае тепловых флуктуаций и от трения в системе. По-видимому, в целом ряде случаев возможна постановка физических экспериментов, в которых будет измеряться изменение амплитуды колебаний много меньшее, чем σ, вызванное тепловыми или иными флуктуациями.

Величины мощности, которые можно различать, наблюдая изменение амплитуды A, вызванной тепловыми флуктуациями для случаев $A(0) \leqslant \sigma\sqrt{e}$ и $A(0) \simeq \sigma$, равны

$$N = \frac{k\{\zeta(\alpha,\beta)[A_{\hat{\tau}}]_{1-\alpha}\}^2}{\hat{\tau}} = \frac{2\varkappa T}{\tau^*}\{\zeta(\alpha,\beta)\psi(\alpha)\}^2,$$
$$N = \frac{2k\sigma\zeta(\alpha,\beta)[A_{\hat{\tau}} - A]_{1-\alpha}}{\hat{\tau}} = \frac{2\sqrt{2}\varkappa T}{\sqrt{\hat{\tau}\tau^*}}\{\zeta(\alpha,\beta)u_{1-\alpha}\}. \qquad (14)$$

Интересно отметить, что при одном и том же времени измерения τ обнаружимая мощность N, которая вкладывается или извлекается из колебательной системы в рассматриваемом случае $(\hat{\tau} \ll \tau^*)$, может быть существенно меньше, чем обнаружимая мощность при синхронном детектировании $(\hat{\tau} \gg \tau^*)$, при одинаковых $\hat{\tau}$, когда

$$N_{\text{с.д.}} = \gamma\frac{\varkappa T}{\hat{\tau}}. \qquad (15)$$

В формуле (15) γ так же, как $\zeta(\alpha,\beta)\psi(\alpha)$ и $\zeta(\alpha,\beta)u_{1-\alpha}$, имеет порядок нескольких единиц и определяется величинами α и β. Таким образом, приведенные в [3, 4] величины минимальных обнаружимых мощностей слабых сигналов относятся лишь к конкретным условиям поставленных опытов, в которых $\hat{\tau} \ll \tau^*$.

Если сила $F(\tau)$ имеет вид цуга синусоидальной волны так, что $F(\tau) = F_0\sin\omega_0\tau$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \hat{\tau}$ и $F(\tau) = 0$ при $0 > \tau$ и $\tau > \hat{\tau}$, то наименьшая обнаружимая величина F_0 равна

$$F_0 = \theta\sqrt{\frac{2\varkappa TH}{\hat{\tau}}} = \theta\sqrt{\frac{4\varkappa Tm}{\hat{\tau}\tau^*}}, \qquad (16)$$

где θ равно соответственно $\zeta(\alpha,\beta)\psi(\alpha)$ или $\zeta(\alpha,\beta)u_{1-\alpha}$ в зависимости от того, $A(0) \leqslant \sigma\sqrt{e}$ или $A(0) \approx \sigma$. Оценка для величины F_0 может быть получена и из элементарных соображений, исходя из того, что для обнаружения необходимо, чтобы $F_0 \geqslant \sqrt{\overline{F_{\text{ф}}^2}}$ и $\Delta f \simeq 1/\hat{\tau}$, так как это было сделано нами [5] при оценке наименьших обнаруженных величин изменения компонентов тензора кривизны R_{iojo} и потока мощности гравитационного излучения.

Как это подчеркивалось в случае тепловых флуктуаций, наименьшие обнаружимые значения изменения амплитуды A, под воздействием силы $F(\tau)$, мощность N или амплитуда F_0 существенно определяются величиной элемента трения H. Для механических систем в лабораторных условиях наименьшее значение трения H было получено, по-видимому, Бимсом [6]. В его ультрацентрифуге подвешенная в магнитном поле в вакууме ($T \simeq 300°$ К, $p = 1 \cdot 10^{-6}$ *мм рт. ст.*) масса в 13 *кг* теряла около 10 *об/мин* за сутки, если ей была сообщена частота вращения около 25000 *об/мин*. Такому затуханию соответствует $H \sim 2 \div 1 \cdot 10^{-6}$ *г/сек* и постоянная времени $\tau^* \sim 2 \cdot 10^{+9}$ *сек* (неколебательная система). Создание колебательной системы с использованием магнитного подвеса и сохранением такой величины H не представляет принципиальных трудностей. Наложить жесткость на гантель из двух масс, подвешенную в магнитном поле, можно с помощью электростатического поля или гравитационного поля (как это делал Этвеш [9]).

Значениям $\tau^* \sim 2 \cdot 10^{+9}$ *сек* и $\hat{\tau} \sim 10^{+5}$ *сек* соответствуют обнаружимые силы F_0 (см. (16)) по крайней мере на 7—8 порядков меньше, чем те, которые удалось разрешить в последнее время при постановке гравитационных экспериментов (см., например, [7, 8]). Это указывает на существенный неиспользованный «резерв» разрешающей способности в экспериментах, которые сводятся к обнаружению малых механических сил.

Все приведенные соотношения для квантилей условного распределения амплитуды колебаний и для обнаружимой мощности сигнала (формулы (6), (13) и (14) сохраняют силу и при обнаружении слабого воздействия на электрическую колебательную систему с высокой добротностью.

В заключение отметим одно обстоятельство: обычно принято считать, что квантовые флуктуации проявляются при выполнении соотношения $\hbar\omega_0 \geqslant \varkappa T$. В соответствии с соотношениями (14) в высокодобротных колебательных системах квантовые флуктуации можно обнаружить и при более низких частотах (более высоких температурах), если $\hbar\omega_0 \geqslant N\hat{\tau} \simeq 4\varkappa T \sqrt{\dfrac{\hat{\tau}}{\tau^*}}$, последнее соотношение ограничивает область применимости формулы (14).

Приведенные в настоящей работе соотношения могут быть применены в физических экспериментах в лабораторных условиях, возможность использования приведенных расчетов для задач связи требует специального анализа.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Р. Л. Стратоновича за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. «Советское радио», М., 1961.
2. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. ИЛ, 1956.
3. Брагинский В. Б., Рукман Т. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 3, 1960.
4. Weber J. Nuovo Chimento, 29, 930, Ang, 16, 1963.
5. Брагинский В. Б. ЖЭТФ, 44, 5, 1952.
6. Beams I. W., Boyle R. D., Hexner P. E. Rev. Sci. Instr., 32, 645, 1961.
7. Dicke R. H. Sci. Amer., 205, 84, 1961. Experimental Relativity, Princeton University, 1963, (препринт).
8. Брагинский В. Б. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 160, 1964.
9. Eötvos R., Pekar D., Fekete E. Ann. d. Phys., 68, 11, 1922.

Поступила в редакцию
10. 4 1964 г.

Кафедра
физики колебаний