Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1965

УДИ 531.394

А. В. САВИЧ

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ

Сформулированы разностные уравнения динамики системы материальных точек в гамильтоновой форме с использованием особых операторов конечноразностных отношений, близких по своим свойствам к частным производным. Эти уравнения сохраняют важнейшие трансформационные свойства соответствующих дифференциальных уравнений и дают при тех же условиях законы сохранения энергии и импульса. Дано решение этих уравнений для задачи малых колебаний и движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле.

Дифференциальные уравнения механики Ньютона основаны на представлении о непрерывном характере движения. Важными особенностями этих уравнений являются их трансформационные свойства, симметрия и связанные с ней законы сохранения. В применяемых обычно при приближенных решениях разностных схемах эти свойства не сохраняются или проявляются лишь при достаточно произвольных ограничениях. В работе сформулированы разностные уравнения динамики системы материальных точек, ковариантные относительно поворота и переноса начала системы координат, обратимые во времени и дающие интеграл энергии и импульса при тех же условиях, что и дифференциальные уравнения. Уравнения записываются в гамильтоновой форме и могут применяться для описания скачкообразного движения, т. е. последовательности малых конечных перемещений в пространстве, происходящих за конечные промежутки времени. Пространство и время при этом считаются непрерывными, а дискретность связывается с характером движения.

§ 1. Формулировка уравнений и их свойства

Первый шаг при выводе разностных уравнений будет состоять в замене частных производных в уравнениях Гамильтона конечноразностными отношениями особого вида, приближающимися по своим свойствам к частным производным. Это конечноразностные отношения $\left(\frac{\Delta_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i}\right)$ следует определить так, чтобы:

а) после умножения на $\Delta\xi_i$ и суммирования по всем i получалось полное приращение

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta \xi_i} \cdot \Delta \xi_i = \sum_{i=0}^{n} \overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi = \varphi(\xi_0 + \Delta\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1, \ldots \xi_n + \Delta\xi_n) -$$

$$-\varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv \Delta\varphi; \qquad (1)$$

б) при линейных преобразованиях системы координат они преобразовывались бы как компоненты вектора (если φ скаляр).

Обычно применяемые конечноразностные отношения вида

$$\frac{\Delta_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} = \frac{1}{\Delta\xi_i}(\varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i + \Delta\xi_i, \ldots, \xi_n) - \varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots \xi_n)) \quad (2)$$

и

$$\frac{\Delta_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} = \frac{1}{2\Delta\xi_i}(\varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i + \Delta\xi_i, \ldots, \xi_n) - \varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i - \Delta\xi_i, \ldots, \xi_n)), \quad (3)$$

как легко убедиться, этим требованиям не удовлетворяют. Необходимыми свойствами обладают операторы, определяемые в виде бесконечных рядов:

$$\frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{\alpha=0}^{n} \cdots \sum_{\nu=0}^{n} \Delta\xi_\alpha \ldots \Delta\xi_\nu \frac{\partial^l \varphi}{\partial\xi_i\, \partial\xi_\alpha \ldots \partial\xi_\nu} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \Delta\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)^{l-1} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}. \qquad (4)$$

Они преобразуются при линейных преобразованиях системы координат как компоненты вектора и удовлетворяют соотношению (1), так как

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} \Delta\xi_i = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{i=0}^{n} \sum_{\alpha=0}^{n} \cdots \sum_{\nu=0}^{n} \Delta\xi_i \Delta\xi_\alpha \ldots \Delta\xi_\nu \frac{\partial^l \varphi}{\partial\xi_i\, \partial\xi_\alpha \ldots \partial\xi_\nu} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \Delta\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right)^{l} \varphi = \Delta\varphi. \qquad (5)$$

Эти операторы, вообще говоря, нельзя представить в виде отношения конечных разностей, они применимы только для бесконечнодифференцируемых функций, для которых соответствующие ряды сходятся *.

Используя любые операторы, подчиняющиеся соотношению (1), можно сформулировать ряд положений, имеющих аналогию в теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему обыкновенных уравнений в конечных разностях первого порядка для n-функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$

$$\Delta\xi_i \equiv \xi_i(t + \Delta t) - \xi_i(t) = \Delta t \cdot f_i(t, \xi_1, \ldots, \xi_n). \qquad (6)$$

Интегралы этой системы $\varphi = C$ (где C постоянная, или периодическая функция с периодом Δt [1]) обладают тем свойством, что их полное при-

* Можно составить операторы в виде конечных разностей, удовлетворяющих соотношению (1), однако они не трансформируются при линейных преобразованиях как компоненты вектора.

ращение обращается в нуль, если в нем $\Delta\xi_i$ заменить согласно (6) на $\Delta t f_i$:

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t, \xi_1 + \Delta t f_1, \ldots, \xi_n + \Delta t f_n) - \varphi(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Это полное приращение можно разложить на сумму частных приращений, подчиняющихся соотношению (1)

$$\Delta\varphi = \sum_{i=0}^{n} \overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi = \sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} f_i = 0, \tag{7}$$

$$\xi_0 \equiv t; \quad f_0 \equiv 1.$$

Последнее соотношение можно трактовать как линейное уравнение в частноразностных отношениях $\frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i}$ первого порядка с переменными шагами. Решения этого уравнения будут совпадать с интегралами системы обыкновенных разностных уравнений (6) в том случае, если переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ считать функциями t, а шаги $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \ldots, \Delta\xi_n$ определять из уравнений (6). Последние можно трактовать как разностные уравнения характеристик частноразностного уравнения (7). Обычно применяемые уравнения в частных конечных разностях [2], в которых используются частноразностные отношения вида (2) или (3), ни при каких значениях шагов не допускают решения методом характеристик, так как суммы вида $\sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i} f_i$ нельзя свести к полному приращению функции φ, поскольку операторы (2) и (3) не подчиняются соотношению (1). Метод характеристик применим и к нелинейным уравнениям произвольного вида в конечноразностных отношениях $\frac{\overline{\Delta}_{\xi_i}\varphi}{\Delta\xi_i}$.

Используя оператор (4), запишем разностные уравнения динамики системы n материальных точек в декартовых координатах следующим образом:

$$\frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta t_i} \equiv \frac{x_i^\alpha(t_i + \Delta t_i) - x_i^\alpha(t_i)}{\Delta t_i} = \frac{\overline{\Delta}\pi_i^\alpha \overset{\blacktriangle}{H}}{\Delta\pi_i^\alpha}; \qquad (a)$$

$$\frac{\Delta\pi_i^\alpha}{\Delta t_i} \equiv \frac{\pi_i^\alpha(t_i + \Delta t_i) - \pi_i^\alpha(t_i)}{\Delta t_i} = -\frac{\overline{\Delta}_{x_i^\alpha}\overset{\blacktriangle}{H}}{\Delta x_i^\alpha}; \qquad (б) \tag{8}$$

$$\alpha = 1, 2, 3; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В этой системе уравнений каждая частица имеет свою переменную времени t_i, так как шаги времени Δt_i могут быть разными для различных частиц; они считаются заданными функциями координат $\vec{x}_i$ и скоростей $\frac{\Delta\vec{x}_i}{\Delta t_i}$, и в частности могут быть постоянными. Функция $\overset{\blacktriangle}{H}$ определяется аналогично обычной функции Гамильтона

$$\overset{\blacktriangle}{H}(T, \vec{X}, \vec{\Pi}) = \sum_{i=0}^{u} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(\pi_i^\alpha)^2}{2m_i} + U(T, \vec{X}), \tag{9}$$

$$T = t_1, t_2, \ldots, t_n; \quad \vec{X} = x_1^1, x_1^2, \ldots x_n^3, \quad \vec{\Pi} = \pi_1^1, \pi_1^2, \ldots, \pi_n^3.$$

где U — обычный потенциал сил, включающий и взаимодействие между частицами. Вычисляя частноразностные отношения этой функции по формуле (4), можно записать систему (8) в явной форме

$$\frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta t_l} = \frac{1}{m_l}\left(\pi_i^\alpha + \frac{\Delta \pi_i^\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta \pi_i^\alpha}{\Delta t_l} = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{\beta=1}^{3}\Delta x_k^\beta\frac{\partial}{\partial x_k^\beta}\right)^{l-1}\frac{\partial U}{\partial x_i^\alpha} \equiv \overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha(T, \vec{X}, \Delta\vec{X}). \tag{10}$$

Это система из $6n$ обыкновенных разностных уравнений первого порядка для $6n$ функций $x_1^1(t_1), x_1^2(t_1), \ldots, x_n^3(t_n)$; $\pi_1^1(t_1), \pi_1^2(t_1), \ldots, \pi_n^3(t_n)$. В ней устанавливается связь между значениями этих функций в моменты времени t_i и $t_i + \Delta t_i$. Система не разрешена относительно Δx_i^α и $\Delta\pi_i^\alpha$, так как приращения имеются и в правой и в левой части. Величины π_i^α, играющие роль канонически сопряженных импульсов, можно выразить через скорости

$$\overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha \equiv \frac{x_i^\alpha(t_l + \Delta t_l) - x_i^\alpha(t_l)}{\Delta t_l} \tag{11}$$

из уравнений (10) следующим образом:

$$\frac{\pi_i^\alpha}{m_l} = \frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta t_i} - \frac{\Delta \pi_i^\alpha}{2m_l} =$$

$$= \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha + \frac{\Delta t_l}{2m_l}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left[\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{\beta=1}^{3}\overset{\blacktriangle}{v}{}_k^\beta\frac{\partial}{\partial x_k^\beta}\right)\right]^{l-1}\frac{\partial U}{\partial x_i^\alpha}. \tag{12}$$

В силу трансформационных свойств оператора (4) система (8) или (10) ковариантна относительно поворота и переноса начала системы координат

$$\tilde{x}_i^k = \sum_{\alpha=1}^{3} a_{k\alpha} x_i^\alpha + \dot{x}_i^k; \quad \tilde{t}_l = t_l \tag{13}$$

инвариантна относительно изменения знака времени

$$x_i^{\alpha\prime} = x_i^\alpha; \quad t_l' = -t_l; \quad \Delta t_l' = -\Delta t_l \tag{14}$$

и при отсутствии сил инвариантна относительно преобразования Галилея

$$\bar{x}_i^\alpha = x_i^\alpha + v_{0i}^\alpha t_i; \quad \bar{t}_l = t_i. \tag{15}$$

(При наличии сил правые части уравнений (10) зависят от скоростей.)

Если потребовать, чтобы Δt_i зависели только от квадратов скоростей $\overset{\blacktriangle}{v}{}_i^2$, то они будут инвариантны относительно преобразования (13) и закон инерции будет справедлив во всех системах координат, связанных преобразованием (15).

Закон сохранения импульса, как и в случае дифференциальных уравнений, будет выполняться, когда для потенциала U справедливы соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial x_j^\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial x_k^\alpha}. \qquad \begin{matrix} j \neq k \\ \alpha = 1,\, 2, 3. \end{matrix} \tag{16}$$

В этом случае

$$\frac{\bar{\Delta}_{x_j^\alpha} U}{\Delta x_j^\alpha} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{s=1}^{n} \Delta t_s \frac{\partial}{\partial t_s} + \sum_{\beta=1}^{3} \Delta x_s^\beta \frac{\partial}{\partial x_s^p} \right)^{l-1} \frac{\partial U}{\partial x_j^\alpha} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{s=1}^{n} \Delta t_s \frac{\partial}{\partial t_s} + \sum_{\beta=1}^{3} \Delta x_s^\beta \frac{\partial}{\partial x_s^\beta} \right)^{l-1} \left(-\frac{\partial U}{\partial x_k^\alpha} \right) = -\frac{\bar{\Delta}_{x_k^\alpha} U}{\Delta x_k^\alpha}, \tag{17}$$

и если просуммировать уравнения (17) по всем i от 1 до n при фиксированном α, то правые части обратятся в нуль, что приведет к соотношениям

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta \pi_i^\alpha}{\Delta t_i} = 0$ и, в силу (12) к

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\Delta \overset{\blacktriangle}{v}_i^\alpha}{\Delta t_i} = 0. \tag{18}$$

Если шаги времени Δt_i постоянны и одинаковы для всех частиц, то из (18) следует закон сохранения полного импульса

$$\Pi_i^\alpha \equiv \sum_{i=1}^{n} \pi_i^\alpha = \mathrm{const} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overset{\blacktriangle}{v}_i^\alpha,$$

$$\alpha = 1,\, 2,\, 3$$

последнее равенство следует из соотношений (12) и (18), согласно которым в замкнутой системе с силами взаимодействия, равными по величине и противоположными по направлению

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \overset{\blacktriangle}{v}_i^\alpha.$$

Для вывода закона сохранения энергии умножим уравнения (8*а*) на $\Delta \pi_i^\alpha$, а (8, *б*) на $-\Delta x_i^\alpha$:

$$\frac{\Delta x_i^\alpha \Delta \pi_i^\alpha}{\Delta t_i} = \bar{\Delta}_{\pi_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H},$$

$$-\frac{\Delta x_i^\alpha \Delta \pi_i^\alpha}{\Delta t_i} = \bar{\Delta}_{x_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H},$$

$$\alpha = 1, 2, 3; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\Delta}_{\pi_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H} + \bar{\Delta}_{x_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H}.$$

Прибавим к правой и левой части этого соотношения сумму частных приращений функции $\overset{\blacktriangle}{H}$ по временам t_i

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\Delta}_{t_i} \overset{\blacktriangle}{H} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\Delta}_{t_i} \overset{\blacktriangle}{H} + \sum_{\alpha=1}^{3} (\overline{\Delta}_{x_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H} + \overline{\Delta}_{\pi_i^\alpha} \overset{\blacktriangle}{H})\right].$$

Но, в силу свойств оператора (4), справа стоит полное приращение функции $\overset{\blacktriangle}{H}$, следовательно

$$\Delta \overset{\blacktriangle}{H} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Delta}_{t_i} \overset{\blacktriangle}{H}.$$

Откуда, если $\overset{\blacktriangle}{H}$ не зависит от времени явно, получим интеграл энергии

$$\Delta \overset{\blacktriangle}{H} = 0,$$

$$\overset{\blacktriangle}{H} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(\pi_i^\alpha)^2}{2m_i} + U =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{m_i \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha + \frac{\Delta t_i}{2m_i} \overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha (\vec{X}, \vec{V})\right\}^2 \frac{1}{2m_i} + U = \text{const}. \qquad (19)$$

Этот интеграл получен без каких-либо ограничений на интервалы Δt_i, определяющие сетку разностной схемы. В отличие от случая дифференциальных уравнений в выражение для кинетической энергии входят члены, зависящие от потенциала сил. Если x_i^α и π_i^α — аналитические функции времени, в системе (13) можно осуществить предельный переход при $\Delta t_i \to 0$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \left(\frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta t_i}\right) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \left(\frac{dx_j^\alpha}{dt_i} + \frac{\Delta t_i}{2} \frac{d^2 x_i^\alpha}{dt_i^2} + \frac{\Delta t_i^2}{6} \frac{d^3 x_i^\alpha}{dt_1^3} + \ldots\right) = \frac{dx_i^\alpha}{dt_i},$$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \left(\frac{\overline{\Delta}_{x_i^\alpha} U}{\Delta x_i^\alpha}\right) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i^\alpha} + \frac{\Delta t_i}{2} \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^\alpha \, \partial x_j^\beta} \overset{\blacktriangle}{v}_p + \ldots\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i^\alpha},$$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} (\pi_i^\alpha) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \left(m_i \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha + \frac{\Delta t_i}{2} \frac{\overline{\Delta}_{x_i^\alpha} U}{\Delta x_i^\alpha}\right) = m_i \frac{dx_i^\alpha}{dt_i}.$$

При стремлении всех $\Delta t_i \to 0$ задача становится одновременной и уравнения (13) переходят в обычные дифференциальные уравнения механики.

§ 2. Задача малых колебаний и движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле

При решении конкретных задач систему (10) удобно записать в переменных скорости, используя соотношение (12); кроме того, в следующих примерах будем считать массы m_i и интервалы Δt_i постоянными и одинаковыми для всех частиц. Тогда уравнения (10) примут вид

$$\frac{\Delta x_i^\alpha}{\Delta t} = \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha; \; m \frac{\Delta \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha (t + \Delta t, \vec{X} + \Delta\vec{X}, \vec{V} + \Delta\vec{V}) + \overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha (t, \vec{X}, \vec{V})]. \qquad (20)$$

В этой записи видно, что значения обобщенных сил $\overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha$ в начальный и конечный моменты времени входят в уравнения движения симметрично. С этой симметрией и связано наличие интеграла энергии. Несимметричные разностные уравнения динамики, ковариантные относительно преобразования поворота и переноса (13), можно записать следующим образом:

$$m\frac{\Delta \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha}{\Delta t}=\overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha(t,\vec{X},\vec{V}) \tag{20'}$$

или

$$m\frac{\Delta \overset{\blacktriangle}{v}{}_i^\alpha}{\Delta t}=\overset{\blacktriangle}{F}{}_i^\alpha(t+\Delta t,\vec{X}+\Delta\vec{X},\vec{V}+\Delta\vec{V}). \tag{20''}$$

Задачу малых колебаний с потенциалом

$$U=\sum_{\alpha=1}^{3n}\sum_{\beta=1}^{3n}a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\rho \tag{21}$$

(здесь координаты нумеруются одним индексом) будем решать одновременно для трех систем (20), (20′) и (20″), преобразовав их в системы из $3n$-уравнений второго порядка с помощью соотношений

$$\overset{\blacktriangle}{F}_k(t,\vec{X},\vec{V})=-\sum_{\beta=1}^{3n}\left(x_\beta+\frac{\Delta t\overset{\blacktriangle}{v}_\beta}{2}\right)(a_{\beta k}+a_{k\beta})=-\sum_{\beta=1}^{3n}b_{\beta k}\frac{x_\beta(t+\Delta t)+x_\beta(t)}{2},$$

$$\overset{\blacktriangle}{F}_k(t+\Delta t,\vec{X}+\Delta\vec{X}\vec{V},+\Delta\vec{V})=-\sum_{\beta=1}^{3n}b_{\beta k}\left(x_\beta+\frac{3}{2}\Delta t\overset{\blacktriangle}{v}_\beta+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\Delta\overset{\blacktriangle}{v}_\beta}{\Delta t}\right)=$$

$$=-\sum_{\beta=1}^{3n}b_{\beta k}\frac{x_\beta(t+2\Delta t)+x_\beta(t+\Delta t)}{2},$$

$$k=1,2,\ldots,3n;\quad b_{k\beta}=a_{\beta k}+a_{k\beta}=b_{\beta k}.$$

Полученные в результате три системы из $3n$-уравнений можно записать сокращенно в виде одной системы

$$\sum_{\beta=1}^{3n}x_\beta(t+2\Delta t)\left(\delta_{\beta k}+\frac{\Delta t^2}{2m}b_{\beta k}A_s\right)-2x_\beta(t+\Delta t)\left(\delta_{\beta k}-\frac{\Delta t^2}{2m}b_{\beta k}\right)+$$

$$+x_\beta(t)\left(\delta_{\beta k}+\frac{\Delta t^2}{2m}b_{\beta k}B_s\right)=0; \tag{22}$$

где $s=1, 2, 3$ (индекс s различает уравнения (20), (20′) и (20″)) и $A_1=B_1=1/2$; $A_2=1$, $B_2=0$; $A_3=0$, $B_3=1$.

В соответствии с общим способом решения линейных разностных уравнений положим

$$x_\beta^s(t)=c_\beta\lambda_s^{\frac{t}{\Delta t}}, \tag{23}$$

$$s=1,2,3;\quad \beta=1,2,\ldots,3n$$

(считая для определенности $\Delta t>0$). Подставляя (23) в (22) и переходя к действительным коэффициентам, получим характеристические уравнения для λ_s

$$\lambda_s^2(1+A_s\psi)-2\lambda_s(1-\psi/2)+(1+B_s\psi)=0, \tag{24}$$

где

$$\psi\equiv\frac{\Delta t^2}{2m}\frac{\sum\limits_{j=1}^{3n}\sum\limits_{k=1}^{3n}b_{kj}(\beta_j\beta_k+\alpha_j\alpha_k)}{\sum\limits_{k=1}^{2n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)};\quad c_k=\alpha_k+i\beta_k. \tag{25}$$

Интересен случай, когда система имеет периодические решения, что возможно, если корни уравнения (24)

$$\lambda_s=\frac{1-\frac{\psi}{2}\pm\sqrt{-2\psi+\frac{\psi^2}{2}\varepsilon_s}}{1+A_s\psi}, \tag{26}$$

(здесь $\varepsilon_s=0$ при $s=1$ и $\varepsilon_s=1$ при $s=2$ и $s=3$) будут комплексными числами, т. е. когда $\psi>0$ при $s=1$ и $8>\psi>0$ при $s=2$; 3.

В этом случае

$$|\lambda_1|=1;\quad |\lambda_2|=\frac{1}{1+\psi}<1;\quad |\lambda_3|=1+\psi>1.$$

Следовательно, решением консервативной системы (20) будут гармонические колебания. Уравнения (20′) и (20″) не консервативны, их решением будут колебания с убывающей амплитудой и с возрастающей амплитудой соответственно. Кроме того, в этих случаях колебательные решения возможны при условии $8>\psi$, что накладывает дополнительные ограничения на величину Δt. Для одномерного гармонического осциллятора

$$U=\frac{m\omega^2x^2}{2};\quad \psi=\frac{\Delta t^2\omega^2}{2}$$

и решение консервативной системы (20′) имеет вид

$$x=Ae^{-i\alpha\frac{t}{\Delta t}}, \tag{27}$$

где

$$\cos\alpha=\frac{1-\frac{\Delta t^2\omega^2}{4}}{1+\frac{\Delta t^2\omega^2}{4}};\quad \sin\alpha=\frac{\Delta t\omega}{1+\frac{\Delta t^2\omega^2}{4}}. \tag{28}$$

Зависимость частоты колебаний $\overset{\blacktriangle}{\omega}=\frac{\alpha}{\Delta t}$ от обычной частоты дается формулой

$$\overset{\blacktriangle}{\omega}=\frac{\alpha}{\Delta t}=\frac{2}{\Delta t}\operatorname{arctg}\frac{\Delta t\omega}{2}=\frac{1}{\Delta t}\operatorname{arctg}\frac{\Delta t\omega}{1-\frac{\Delta t^2\omega^2}{4}}. \tag{29}$$

Эта зависимость представлена на рис. 1, из которого видно, что при $\Delta t\omega \ll 1$ будет выполняться соотношение $\hat{\omega} \cong \omega$, а при $\Delta t\omega \ll 1 \hat{\omega}$ величина стремится к постоянной величине $\hat{\omega}_{max}$, равной $\frac{\pi}{\Delta t}$

$$\hat{\omega}_{max} = \lim_{\omega\to\infty} \hat{\omega} = \frac{\pi}{\Delta t}; \quad \hat{T}_{min} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}_{max}} = 2\Delta t, \tag{30}$$

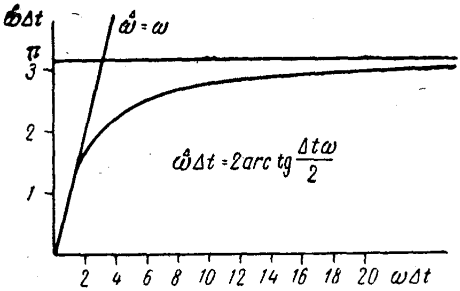

Рис. 1.

т. е. период колебаний не может быть меньше удвоенной продолжительности скачка частицы, а частота колебаний ограничена сверху значением $\frac{\pi}{\Delta t}$,

Если выражение (27) записать в виде

$$x = a\cos\alpha k + b\sin\alpha k; \quad k \equiv \frac{t}{\Delta t}; \quad \Delta k = 1, \tag{31}$$

то канонически сопряженные импульсы будут равны

$$\pi = m\omega(-a\sin\alpha k + b\cos\alpha k). \tag{32}$$

Это можно показать, используя соотношения (28), а также правила вычисления конечных разностей

$$\begin{aligned} \Delta\cos\alpha k &= \cos\alpha(k+1) - \cos\alpha k = -\sin\alpha\left(\sin\alpha k + \frac{\Delta t\omega}{2}\cos\alpha k\right), \\ \Delta\sin\alpha k &= \sin\alpha(k+1) - \sin\alpha k = -\sin\alpha\left(-\cos\alpha k + \frac{\Delta t\omega}{2}\sin\alpha k\right). \end{aligned} \tag{33}$$

С помощью полученных решений находим интеграл энергии одномерного гармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{m\omega^2x^2}{2} + \frac{\pi^2}{2m} = \frac{m\omega^2x^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\hat{v}\left(1 + \frac{\Delta t^2\omega^2}{4}\right) + \frac{\Delta t\omega^2}{2}x\right]^2 =$$

$$= m\omega^2(a^2 + b^2) = \text{const}. \tag{34}$$

Перейдем к рассмотрению уравнений динамики для заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Векторный потенциал вводится в обобщенную функцию Гамильтона $\hat{H}$ так же, как и в обычный гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\pi_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(\pi_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \left(\pi_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2\right]. \tag{35}$$

Разностные уравнения динамики с этим гамильтонианом имеют вид

$$\frac{\Delta x_\alpha}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta}_{\pi_\alpha} \overset{\blacktriangle}{H}}{\Delta \pi_\alpha} = \frac{1}{m}\left(\pi_\alpha + \frac{\Delta \pi_\alpha}{2}\right) - \frac{e}{mc}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{k=0}^{3}\Delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{l-1} A_\alpha,$$

$$\frac{\Delta \pi_\alpha}{\Delta t} = -\frac{\overline{\Delta}_{x_\alpha} \overset{\blacktriangle}{H}}{\Delta x_\alpha} = +\frac{e}{mc}\sum_{k=1}^{3}\left[\pi_k \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{\beta=0}^{3}\Delta x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)^{l-1}\frac{\partial A_k}{\partial x_\alpha} + \right. \tag{36}$$

$$\left. + \Delta \pi_k \sum_{l=2}^{\infty}\frac{l-1}{l!}\left(\sum_{\beta=0}^{3}\Delta x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)^{l-2}\frac{\partial A_k}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{2c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{\beta=0}^{3}\Delta x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)^{l-1}\frac{\partial (A_k^2)}{\partial x_\alpha}\right].$$

$$x_0 = t; \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3$$

Для постоянного магнитного поля систему (36) после перехода к переменным скорости можно представить в виде

$$\frac{\Delta x_\alpha}{\Delta t} = \overset{\blacktriangle}{v}_\alpha,$$

$$\frac{\overset{\blacktriangle}{\Delta v}_\alpha}{\Delta t} = \frac{e}{mc}\left[\left(\overset{\blacktriangle}{\vec{v}} + \frac{\overset{\blacktriangle}{\Delta \vec{v}}}{2}\right)\cdot \vec{B}\right]_\alpha = \frac{e}{mc}\left[\frac{\overset{\blacktriangle}{\vec{v}}(t+\Delta t) + \overset{\blacktriangle}{\vec{v}}(t)}{2}\cdot \vec{B}\right]_\alpha, \tag{37}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

В случае движения в плоскости $z=0$ с магнитным полем, направленным вдоль оси z, систему (37) можно представить в виде двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} x(t+2\Delta t) - 2x(t+\Delta t) + x(t) &= \frac{\Delta t \Omega}{2}(y(t+2\Delta t) - y(t)), \\ y(t+2\Delta t) - 2y(t+\Delta t) + y(t) &= -\frac{\Delta t \Omega}{2}(x(t+2\Delta t) - x(t)) \end{aligned} \tag{38}$$

$\left(\text{где } \Omega \equiv \frac{eB}{mc}\right)$, решением которой будут гармонические колебания

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 \cos \overset{\blacktriangle}{\Omega} t + a_2 \sin \overset{\blacktriangle}{\Omega} t, \\ y(t) &= -a_1 \sin \overset{\blacktriangle}{\Omega} t + a_2 \cos \overset{\blacktriangle}{\Omega} t, \end{aligned} \tag{39}$$

причем

$$\overset{\blacktriangle}{\Omega} = \frac{1}{\Delta t}\operatorname{arctg}\frac{\Delta t \Omega}{1 - \frac{\Delta t^2 \Omega^2}{4}}. \tag{40}$$

(Способ отыскания решения аналогичен применявшемуся в предыдущей задаче.) Соотношение (40), совпадающее с (29), показывает, что частота обращения частиц не равна циклотронной частоте, а зависит от нее так, как это изображено на рис. 1. При неограниченном увеличении напряженности магнитного поля B она стремится к постоянной величине $\overset{\blacktriangle}{\Omega}_{max} = \frac{\pi}{\Delta t}$, и существует минимальный период обращения, равный удвоенной продолжительности интервала, характеризующего дискретное передвижение частицы. Отклонение от результатов, даваемых дифференциальными уравнениями, будет в том случае, когда $\frac{\Delta t^2 e^2 B^2}{4m^2c^2} \gg 1$ или $|\Delta t \mu_0 B| \gtrsim \hbar$ $\left(\text{где } \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc^2}\right)$. Если минимальное возможное значение $|\Delta t_{\min}|$ принять равным обратной величине частоты собственных колебаний частоты $|\Delta t_{\min}| = \frac{\hbar}{mc^2}$, то это даст следующую оценку для напряженности магнитного поля: $|\mu_0 B| \gtrsim mc^2$.

Используя решение (39), найдем, что траектория частицы будет окружностью

$$x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 = R^2 = \text{const}, \tag{41}$$

и что закон сохранения энергии будет иметь вид

$$E = \frac{m\overset{\blacktriangle}{v}{}^2}{2}\left(1 + \frac{\Delta t^2 e^2 B^2}{4m^2c^2}\right) = \text{const}. \tag{42}$$

Линейная скорость будет постоянной величиной, равной

$$\overset{\blacktriangle}{V}{}^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 = \frac{R^2\Omega^2}{1 + \frac{\Delta t^2\Omega^2}{4}}. \tag{43}$$

Из (42) и (43) следует, что при дискретном характере движения сохранится обычное соотношение между энергией частицы, циклотронной частотой и радиусом орбиты $E = \frac{m}{2} R^2\Omega^2$.

Выводы

Задача формулировки разностных уравнений динамики в гамильтоновой форме, сохраняющих основные трансформационные свойства дифференциальных уравнений и дающих законы сохранения энергии и импульса (при самых общих предположениях относительно шага времени), может быть решена путем замены в дифференциальных уравнениях Гамильтона частных производных на особые операторы, представляемые в виде бесконечных рядов.

Динамика системы материальных точек в разностной формулировке допускает многовременное описание. Шаги времени для отдельных частиц могут быть различными и зависеть от абсолютных величин скоростей.

Законы сохранения энергии и импульса выводятся при самых общих предположениях относительно сетки переменных времени, без каких-либо существенных ограничений и дополнительных условий.

Как видно из общего рассмотрения и из решения отдельных задач, разностные уравнения, несмотря на сложный вид, сохраняют основные черты дифференциальных уравнений динамики и поэтому могут трактоваться как разностные уравнения динамики, описывающие скачкообразное движение материальных точек. Различие между разностным описанием и дифференциальными уравнениями может обнаружиться в очень больших силовых полях.

В заключение выражаю благодарность проф. А. А. Власову за формулировку задачи работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Norlund. Differenzenrechnung. Berlin. Schpringer, 1926.
2. Ладыженская О. А. «Успехи математических наук», 12, № 5, 77, 1957.

Поступила в редакцию
25. 2 1964 г.

Кафедра
теоретической физики