Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1965

УДК 530.145

Ю. П. ПЫТЬЕВ

О СПИНОРНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются свойства спинорных частиц — сигулярностей поля.

В этой заметке мы рассмотрим некоторые свойства спинорного поля во внешнем электромагнитном поле A_i с точки зрения, развитой в работах [1, 2]. Будет рассмотрено спинорное поле W, удовлетворяющее системе второго порядка *

$$IG^{\sigma\mu}W_{\sigma\mu}-\frac{1}{2}\sigma^{ij}f_{ij}W_4=0, \tag{1}$$

$$W_\sigma=\frac{\partial W}{\partial x^\sigma},$$

$$2\sigma^{ij}=\gamma^i\gamma^j-\gamma^j\gamma^i,\ f_{ij}=\frac{\partial g_l}{\partial x^l}-\frac{\partial g_i}{\partial x^j},\ g_i=\frac{e}{mc^2}A_i.$$

Исследование системы (1), с одной стороны, позволяет проследить аналогию со случаем скалярного поля [2], с другой стороны, оказывается более простым по сравнению с исследованием решений спинорной системы первого порядка [1] (имеется в виду метод, аналогичный методу работы [2]; ср., однако, [5])

$$\gamma^\sigma U_\sigma=0,\ \gamma^i\gamma^j+\gamma^j\gamma^i=-2\delta^{ij},\ \gamma^4=I-g_i\gamma^i. \tag{2}$$

Между полями W и U существует связь: при известном поле U находится из соотношения $U=\gamma^5\gamma^\mu W_\mu$, $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Если рассматривать решения (1), удовлетворяющие соотношениям $\gamma^5\chi^\pm=\pm\chi^\pm$, $\chi^\pm=(I\pm\gamma^5)W$, то между ними и U по аналогии с [3] можно установить и взаимно однозначное соответствие. В конце работы будут вкратце отмечены некоторые свойства системы (2).

Лагранжев формализм, законы сохранения

Уравнению (1) соответствует следующего вида лагранжиан **

$$L=\overline{W}_\sigma G^{\sigma\mu}W_\mu+\frac{1}{2}(\overline{W}_4aW-\overline{W}aW_4);\ \overline{W}=W^+\gamma^0,\ a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}f_{ij},$$

* Греческие индексы принимают значения $0\div4$, латинские — $0\div3$, если не оговорено противное.

** Крестиком обозначено эрмитово сопряжение.

из которого обычным путем получаем тензор энергии — импульса — массы [2]

$$T^{\sigma}_{\mu} = G^{\sigma\lambda} (\overline{W}_{\lambda} W_{\mu} + \overline{W}_{\mu} W_{\lambda}) + \frac{1}{2} \delta^{\sigma}_{4} (\overline{W}_{\mu} a W - \overline{W} a W_{\mu}) - \delta^{\sigma}_{\mu} L,$$

вектор плотности тока j^{σ}

$$\frac{mc^2}{e} j^{\sigma} = T^{\sigma}_{4} = G^{\sigma\lambda} (\overline{W}_{\lambda} W_{4} + \overline{W}_{4} W_{\lambda}) + \delta^{\sigma}_{4} \left\{ \frac{1}{2} (\overline{W}_{4} a W - \overline{W} a W_{4}) - L \right\}$$

и тензор момента

$$M^{\sigma}_{lm} = T^{\sigma}_{l} x_{m} - T^{\sigma}_{m} x_{l} + \frac{1}{2} G^{\sigma\mu} (\overline{W}_{\mu} \sigma^{lm} W - \overline{W} \sigma^{lm} W_{\mu}) - \frac{1}{4} \delta^{\sigma}_{4} \overline{W} (\sigma^{lm} a - a \sigma^{lm}) W.$$

Так как в отсутствие внешнего поля в силу системы (1) $\partial T^{\sigma}_{\mu} / \partial x^{\sigma} = 0$, то имеют место законы сохранения энергии, импульса, массы

$$P_{\mu} = \int T^{0}_{\mu} dS_{0} = \text{const}, \quad ds_{0} = dx^{1} \ldots dx^{4} \tag{3}$$

и заряда

$$Q = \int j^{0} dS_{0} = \frac{e}{mc^2} \int T^{0}_{4} dS_{0} = \text{const}. \tag{4}$$

Что касается сохранения массы P_4 и заряда Q, то это имеет место и во внешнем поле. Так как, кроме того (при $g_i \neq 0$),

$$\frac{\partial M^{\sigma}_{lm}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial M_{\sigma,lm}}{\partial x^{\sigma}} = 0, \quad M_{\sigma,lm} = G_{\sigma\theta} M^{\theta}_{lm},$$

то сохраняется и полный момент поля

$$M_{lm} = \int M^{0}_{lm} dS_{0}, \tag{5}$$

из которого мы выделяем сохраняющийся отдельно спиновый момент

$$S_{lm} = \frac{1}{2} \int G^{0\mu} (\overline{W}_{\mu} \sigma^{lm} W - \overline{W} \sigma^{lm} W_{\mu}) \, dS_{0}. \tag{6}$$

Далее можно было бы написать соотношения, описывающие поведение введенных величин во внешнем поле, но это делается точно так же, как в работе [2], и мы на этом не останавливаемся.

Сингулярности W-поля

При описании решений системы (1) с особенностями мы будем пользоваться лучевым методом, следуя в основном работе [4]. Решение в этом случае представляется следующим асимптотическим разложением (распространяющейся волной):

$$W(x^{\sigma}) = \sum_{i=0} f_{i} [\varphi(x^{\sigma})] \, a^{i}(x^{\sigma}), \quad \frac{df_{i}}{d\varphi} = f_{i-1}. \tag{7}$$

Здесь φ — фазовая функция, f_0 — форма волны, a^i — матрица-столбец функций, подлежащих определению вместе с φ. При такой форме записи «наиболее сингулярным» является первый член $f_0 a^0$, знание его вполне достаточно для наших целей.

Подставим разложение (7) в систему (1) и потребуем, чтобы по отдельности исчезали коэффициенты при f_j. В таком случае прежде всего (здесь I — единичная матрица)

$$IG^{\sigma\mu}\varphi_\sigma\varphi_\mu a^0 = Ca^0 = 0,\ \varphi_\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma},\ C = IG^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta \tag{8}$$

и, следовательно, определитель характеристической матрицы должен обратиться в нуль:

$$det C = (G^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta)^4 = 0. \tag{9}$$

Для каждого корня $\varphi_\sigma^{(1,2,..)}$ уравнения (8) матрица C имеет ранг, равный нулю, и по четыре независимых левых и правых нуль-вектора l^k и r^k соответственно, таких, что

$$l^k C = 0,\ Cr^k = 0,\ l^k = (\underbrace{0\ldots 1}_{k}\ldots 0),\ r^k = (l^k)^+,\ k = 1 \div 4.$$

Из уравнения (8) следует равенство

$$a^0 = \rho_1^0 r^1 + \ldots + \rho_4^0 r^4, \tag{10}$$

в котором ρ_i^0 — величины, подлежащие определению. Для дальнейшего вместо величин ρ_i^0 удобно ввести ζ_i, определяемые равенством

$$\zeta_i = \rho_i^0 (DG^{0\sigma}\varphi_\sigma)^{\frac{1}{2}},\ i = 1 \div 4. \tag{11}$$

Здесь D — определитель $|\partial x^i/\partial\xi^j|$, составленный с помощью общего интеграла $x^i = x^i(x^0, \xi^i)$ характеристической системы уравнения (8)

$$\frac{dx^i}{dx^0} = \frac{G^{i\sigma}\varphi_\sigma}{G^{0\lambda}\varphi_\lambda};\ i = 1 \div 4 \tag{12}$$

(здесь φ следует считать известной функцией). Производная D, вычисленная вдоль интегральной кривой системы (12), как нетрудно убедиться, удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dx^0} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{G^{i\sigma}\varphi_\sigma}{G^{0\lambda}\varphi_\lambda}\right). \tag{13}$$

Теперь мы в состоянии получить уравнение, определяющее a^0, требуя, чтобы в результате подстановки (7) в (1) коэффициент при f_1 обратился в нуль:

$$I\left(2G^{\sigma\mu}\varphi_\sigma\frac{\partial a^0}{\partial x^\mu} + G^{\sigma\mu}\varphi_{\sigma\mu}a^0\right) - \frac{1}{2}\sigma^{ij}f_{ij}\varphi_4 a^0 = 0.$$

Учитывая (11), (12), (13), находим

$$\frac{d\zeta}{dx^0} - \frac{\varphi_4}{4G^{0\mu}\varphi_\mu}\sigma^{ij}f_{ij}\zeta = 0. \tag{14}$$

Для краткости через ζ обозначен столбец величин (11).

Полученные соотношения позволяют найти значения динамических переменных (3), (4), (5), (6) для сингулярной части поля. Для краткости мы рассмотрим только импульс поля, с этой целью выпишем главный член в выражении для T_μ^0

$$T_\mu^0 = 2G^{0\lambda}\varphi_\lambda\varphi_\mu f_{-1}^2\,\bar{a}^0 a^0 + \ldots,\ \ \bar{a}^0 = a^{0+}\gamma^0.$$

Воспользовавшись равенствами (10) и (11), это выражение можно переписать также в следующем виде:

$$T^0_\mu = 2f^2_{-1}\varphi_\mu D^{-1}\zeta^+\gamma^0\zeta.$$

Решающим является, что $\zeta^+\gamma^0\zeta$ есть интеграл системы (14), т. е. можно записать

$$\zeta^+\gamma^0\zeta = \theta\ (\xi^i),$$

где $\theta(\xi^i)$ — произвольная функция интегралов системы (14).

Дальнейшие вычисления (т. е. вычисление интеграла (3)) становятся аналогичными проведенным в работе [2]. Приведем окончательный результат: вектор энергии — импульса — массы сингулярной части спинорного поля W имеет вид $\overset{*}{P}_\sigma = -\varphi_\sigma$, т. е. совпадает с соответствующим вектором для классической частицы. Используя далее методы работы [2], можно получить выражения для других динамических переменных сингулярной части поля, а также и уравнения, управляющие их поведением во внешнем поле. Получаемые при этом соотношения ничем не отличаются от случая скалярного поля [2]. Рассмотрим, например, полный момент поля (5). Для сингулярной части поля вклад спиновой составляющей (6) равен нулю, так как подынтегральное выражение в (6) не обладает необходимой сингулярностью. Интеграл (5) дает момент частицы — сингулярности: $\overset{*}{M}_{lm} = \varphi_m x_l - \varphi_l x_m$.

Таким образом, динамические переменные сингулярной части поля, как и следовало ожидать, не содержат сведений о многокомпонентности поля, т. е. сведений о его спиновых свойствах.

Остановимся в заключение на некоторых свойствах системы [2]. Характеристическая матрица системы (2) $C = \gamma^\sigma\varphi_\sigma$ для каждого корня $\det C = 0$ имеет ранг два и по два левых и правых нуль-вектора $r_k = (l^k)^+ |_{\varphi_4 \to -\varphi_4,\ g_i \to g_i,\ x^0 \to -x^0,\ k=1,2}$. Дальнейшие вычисления вполне аналогичны проведенным выше, хотя и несколько сложнее последних (нуль-векторы не имеют столь простого вида, как в случае системы второго порядка). Окончательный результат совпадает с полученным выше. Следует отметить, что в отношении систем и, в частности системы первого порядка, гораздо быстрее к цели ведет энергетический метод, развитый в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. ДАН СССР, 149, 2, 1963.
2. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 2, 1965.
3. Feyhman R., Gell-Mann M. Phys. Rev., 109, 193, 1958.
4. Ludwig D. Comm. Pure Appl. Math., 13, No. 3, 1960.
5. Пытьев Ю. П. «Журнал вычисл. матем. и матем. физ.», 4, № 5, 871—879, 1964.

Поступила в редакцию
3. 3 1964 г.

Кафедра
теоретической физики