ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1965

УДК 538.6

Р. Е. МОВСЕСЯН

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются эллипсоидальная функция распределения скоростей в нестационарном аксиально-симметричном магнитном поле и распределение плотностей заряженных частиц в дипольном магнитном поле.

В работе [1] выведены стационарные эллипсоидальные функции распределения скоростей заряженных частиц в электростатическом и дипольном магнитном полях. Эти функции распределения в отличие от сферических функций описывают нетвердотельное вращение системы, убывающее по определенному закону при $r\to\infty$. Во внешнем магнитном поле система образует определенную структуру, обусловленную внутренними и внешними параметрами, что дает возможность применять эллипсоидальные функции распределения для объяснения образования радиационных поясов Земли.

В данной работе рассматриваются распределения частиц в нестационарном внешнем магнитном поле и при нестационарной температуре.

За исходное уравнение для функций распределения заряженных частиц берется уравнение А. А. Власова, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\vartheta}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\left(\frac{v_\vartheta^2+v_\varphi^2}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r}+$$
$$+\left(\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{v_\varphi^2}{r}-\frac{v_r v_\vartheta}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}+\left(-\frac{v_r v_\varphi}{r}-\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{v_\varphi v_\vartheta}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\varphi}+$$
$$+\left(\frac{e}{m}\right)\left\{\left[E_r+\frac{1}{c}(v_\vartheta H_\varphi-v_\varphi H_\vartheta)\right]\frac{\partial f}{\partial v_r}+\left[E_\vartheta+\frac{1}{c}(v_\varphi H_r-v_r H_\varphi)\right]\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}+\right.$$
$$\left.+\left[E_\varphi+\frac{1}{c}(v_r H_\vartheta+v_\vartheta H_r)\right]\frac{\partial f}{\partial v_\varphi}\right\}=0, \qquad (1)$$

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}V-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$\Delta V=-4\pi e\int f d\vec{v};\quad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi e}{c}\int\vec{v}f\,d\vec{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Граничными условиями являются

$$V|_{r\to\infty}\to 0,\quad \iint\limits_{(\infty)} f d\vec{r}\, d\vec{v} < \infty.$$

Для решения используем метод Чандрасекара [2], т. е. ищем решение (1) в виде

$$f(r, \vartheta, \varphi, v_r, v_\vartheta, v_\varphi, t) \equiv f(Q+\sigma),$$

где

$$Q = a(v_r - u_r)^2 + bv_\vartheta^2 + c(v_\varphi - u_\varphi)^2,$$

σ — общая потенциальная функция.

Коэффициенты эллипсоида скоростей a, b, c и σ являются функциями координат и времени; u_r и u_φ — составляющие средней скорости в точке (r, ϑ, φ) — также функции координат и времени ($u_\vartheta \equiv 0$).

Подставляя f в уравнение (1), находим

$$\frac{D(Q+\sigma)}{Dt} = 0. \tag{2}$$

Для удобства дальнейших расчетов напишем $(Q+\sigma)$ в следующем виде:

$$Q + \sigma = av_r^2 + bv_\vartheta^2 + cv_\varphi^2 - 2\Delta_r v_r - 2\Delta_\varphi v_\varphi - \chi, \tag{3}$$

где

$$\Delta_r = au_r;\quad \Delta_\varphi = cu_\varphi;\quad -\chi = au_r^2 + cu_\varphi^2 + \sigma. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (2), получаем уравнение, левая часть которого является многочленом 3-й степени по v_r, v_ϑ, v_φ. Чтобы оно удовлетворилось, все коэффициенты при различных комбинациях степеней v_r, v_ϑ, v_φ должны равняться нулю каждый в отдельности. Это приводит к следующим группам уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial r} = 0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial \vartheta} = 0,\quad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial c}{\partial \varphi} = 0,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = 0,\quad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a}{\partial \varphi} = 0,\quad \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial b}{\partial \varphi} = 0,\\
&\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{2}{r}(a-b) = 0,\quad \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{2}{r}(a-c) = 0,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r}\operatorname{ctg}\vartheta\,(b-c) = 0.
\end{aligned}\right\}\ \text{I группа}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial a}{\partial t} - 2\frac{\partial \Delta_r}{\partial r} = 0,\quad \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{2}{r}\Delta_r = 0,\\
&\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{2}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r}\Delta_r = 0,\\
&-\frac{2}{r}\frac{\partial \Delta_r}{\partial \vartheta} + 2\frac{e}{mc}H_\varphi(a-b) = 0,\\
&-2\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial r} - \frac{2}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Delta_r}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\Delta_\varphi - 2\frac{e}{mc}H_\vartheta(a-c) = 0,\\
&-\frac{2}{r}\frac{\partial \Delta_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r}\operatorname{ctg}\vartheta\,\Delta_\varphi + 2\frac{e}{mc}H_r(b-c) = 0.
\end{aligned}\right\}\ \text{II группа}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial r} &= -a\frac{e}{m}E_r+\frac{\partial\Delta_r}{\partial t}+\frac{e}{mc}H_\vartheta\Delta_\varphi,\\
-\frac{1}{2r}\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta} &= -b\frac{e}{m}E_\vartheta+\frac{e}{mc}H_\varphi\Delta_r-\frac{e}{mc}H_r\Delta_\varphi,\\
-\frac{1}{2r\sin\vartheta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} &= -c\frac{e}{m}E_\varphi+\frac{\partial\Delta_\varphi}{\partial t}-\frac{e}{mc}H_\vartheta\Delta_r,\\
-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \frac{e}{m}E_r\Delta_r+\frac{e}{m}E_\varphi\Delta_\varphi.
\end{aligned}\right\}\ \text{III группа}$$

Первая группа уравнений содержит только коэффициенты эллипсоида. Этих уравнений достаточно для определения зависимости коэффициентов эллипсоида скоростей от координат. Вторая группа содержит величины Δ и производные по времени от коэффициентов эллипсоида скоростей. Из этих уравнений можно определить зависимость величин Δ от координат.

Ограничиваясь симметрией задачи, т. е. $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$ и $H_\varphi=0$, получаем следующие решения для уравнений первой и второй групп:

$$a=b$$

(a — может зависеть только от времени)

$$c=a+A(r\sin\vartheta)^2, \tag{5}$$

где A — постоянная и определяет вторую температуру.

$$\Delta_r=\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial t}r,$$

$$\Delta_\varphi=Kr\sin\vartheta-A(r\sin\vartheta)^2\frac{e}{mc}A_\varphi, \tag{6}$$

где K — может зависеть только от времени и определяет вращение без магнитного поля и эллипсоидальности.

Используя обозначения (4) и решения (5) и (6), получаем для средних скоростей:

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial t}r,\\
u_\varphi &= \frac{Kr\sin\vartheta-A(r\sin\vartheta)^2\frac{e}{mc}A_\varphi}{a+A(r\sin\vartheta)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Очевидно, что радиальное среднее движение u_r непосредственно связано с нестационарностью температуры (коэффициента a). При $\frac{\partial a}{\partial t}>0$ имеем расширение, зависящее от r, при $\frac{\partial a}{\partial t}<0$ сжатие.

Третья группа уравнений допускает решение для χ при определенных условиях интегрируемости, которые накладывают ограничения на электростатический потенциал V и временную зависимость a и A_φ.

Условиями интегрируемости являются равенства смешанных вторых производных χ.

Из условия $\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial\vartheta} = \frac{\partial^2\chi}{\partial\vartheta\,\partial r}$ получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\vartheta} = \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial r}.$$

Требование симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0\right)$ приводит к условию

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\, a\,\frac{e}{mc}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2r\sin\vartheta}\,\frac{\partial a}{\partial t}\,\frac{e}{mc}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi). \tag{8}$$

Но так как K не является функцией координат, то приходим к выводу, что $K=\text{const}$.

Тогда (8) переходит в следующее условие:

$$a\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial a}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi). \tag{9}$$

Это показывает, что изменение температуры обусловлено изменением магнитного поля со временем и конфигурацией магнитного поля. Если $\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) > 0$, то при увеличении магнитного поля со временем a — уменьшается (увеличивается температура, так как $a \sim \frac{1}{\theta}$) и согласно (7) система сжимается. При уменьшении магнитного поля происходит обратное.

Если $\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) < 0$, наблюдается обратная картина: при увеличении магнитного поля со временем система расширяется и охлаждается, а при уменьшении сжимается и нагревается.

Остальные условия интегрируемости выполняются тождественно.

Окончательно для χ получаем решение

$$-\frac{1}{2}\chi = a\,\frac{e}{m}V - Kr\sin\vartheta\,\frac{e}{mc}A_\varphi + \frac{1}{2}A(r\sin\vartheta)^2\left(\frac{e}{mc}A_\varphi\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\,r^2.$$

Используя обозначение (4), находим

$$\sigma = 2a\,\frac{e}{m}V + \frac{-K^2(r\sin\vartheta)^2 - 2Kr\sin\vartheta\cdot a\,\frac{e}{mc}A_\varphi + aA(r\sin\vartheta)^2\left(\frac{e}{mc}A_\varphi\right)^2}{a + A(r\sin\vartheta)^2} -$$

$$-\frac{1}{4a}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\,r^2. \tag{10}$$

Чтобы функция распределения при $A=0$ и $H=0$ переходила в функцию распределения Максвелла—Больцмана, конкретизируем ее в виде

$$f(Q+\sigma) = \alpha e^{-Q-\sigma}, \quad a = \frac{m}{2\theta},$$

$$f = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\rho_0\exp\left[-\frac{m}{2\theta}\left\{(v_r-u_r)^2 + v_\vartheta^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\frac{2\theta}{m}A(r\sin\vartheta)^2\right)(v_\varphi-u_\varphi)^2\right\} - \sigma\right].$$

Для распределения плотности имеем

$$\rho = \rho_0\left[1 + \frac{2\theta}{m}A(r\sin\vartheta)^2\right]^{-1/2} e^{-\sigma}.$$

Рассмотрим распределения плотностей заряженных частиц вокруг заряженного шара и в поле нестационарного магнитного диполя.

Из условия (9) получаем

$$M = M_0 e^{\pm\delta(t)}, \quad \theta = \theta_0 e^{\mp\delta(t)}, \tag{11}$$

где M — магнитный момент диполя, $\delta(t)$ — любая функция t.

Введем для удобства безразмерные величины и коэффициенты:

$$\frac{1}{x} = \frac{eM_0K_-}{cm_-r}, \quad \varphi = -\frac{eV}{\theta_-}, \quad \psi = \frac{Ke_-}{cm_-} A_\varphi r,$$

$$\alpha_\pm = \left(\frac{2\theta}{m}\right)_\pm K_\pm^2 \left(\frac{eM_0K_-}{cm_-}\right)^2, \quad \beta_\pm = \frac{A_\pm}{K_-^2}\left(\frac{\theta_\pm}{\theta_-}\right),$$

$$\lambda = \left(4\pi e^2 \frac{\rho_0}{\theta_-}\right)\left(\frac{eM_0K_-}{cm_-}\right)^2, \quad \gamma_\pm = \left(\frac{2\theta}{m}A\right)_\pm \left(\frac{eM_0K_-}{cm_-}\right).$$

Распределение плотностей можно выразить через потенциалы φ и ψ.

$$\Delta\varphi = \lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{\eta_+}} \exp\left[\left(\frac{\theta_+}{\theta_-}\right)(\varphi + \Phi^+)\right] - \frac{1}{\sqrt{\eta_-}} \exp\left[-\varphi + \Phi^-\right]\right\}, \tag{12}$$

где

$$\Phi^\pm = \pm 2\left(\frac{\theta_\pm}{\theta_-}\right)\left(\frac{K_\pm m_-}{K_- m_\pm}\right)\frac{\sin\vartheta}{\eta_\pm}\psi - \left(\frac{m_-}{m_\pm}\right)^2 \beta_\pm \frac{\sin^2\vartheta}{\eta_\pm}\psi^2 +$$

$$+ \frac{1}{\eta_\pm}\left(\frac{\theta_\pm}{\theta_-}\right)\alpha_\pm \sin\vartheta \cdot x^2 - \xi x^2,$$

$$\eta_\pm = 1 + \gamma_\pm x^2 \sin^2\vartheta; \quad \xi = \frac{1}{4}\frac{m}{\theta_-}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}\right]\left(\frac{eM_0K_-}{cm_-}\right)^2.$$

Граничные условия для φ

$$\varphi|_{x\to\infty} \to 0, \quad \varphi|_{x\to R} \to -\frac{\varepsilon^*}{R}, \quad \text{где } \varepsilon^* = \frac{\varepsilon cm_-}{M_0K_-},$$

ε — заряд шара, R — радиус шара.

Общий заряд равен

$$\varepsilon_s = \frac{\lambda}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\sqrt{\eta_+}} \exp\left[\frac{\theta_+}{\theta_-}(\varphi + \Phi^+)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\eta_-}} \exp\left[-\varphi + \Phi^-\right]\right\} x^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dx < \infty.$$

Из условия сходимости следует, что $\alpha_- = \alpha_+$ и $\gamma_+ = \gamma_-$ или

$$\left(\frac{\theta}{m}\right)_+ = \left(\frac{\theta}{m}\right)_-, \quad A_+ = A_-.$$

Величина $\dfrac{\alpha x^2}{1+\gamma x^2}$ мала для всех расстояний, и можно пренебречь потенциальной функцией центробежных сил.

Пренебрегая взаимодействием токов с магнитным полем и магнитным полем токов, запишем $\psi = \dfrac{\sin\vartheta}{x}$. Рассмотрим случай $\lambda < 1$, тогда можно искать решение уравнения (12) в виде ряда $\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots$.

В области $1 \lesssim x < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ нулевое и первое приближения дают

$$\Delta\varphi_0 = 0, \quad \Delta\varphi_1 = \exp\left[\frac{\theta_+}{\theta_-}(\varphi_0 + \Phi_0^+)\right] - \exp[-\varphi_0 + \Phi_0^-],$$

$$\varphi_0 = -\frac{\varepsilon^*}{x}, \quad \Phi_0^{\pm} = \pm 2\frac{\sin^2\vartheta}{x} - \beta_{\pm}\left(\frac{m_-}{m_{\pm}}\right)^2\frac{\sin^4\vartheta}{x^2} - \xi x^2.$$

Для распределения плотностей имеем

$$\rho_{\pm} = \rho_0 \exp\left\{\frac{\theta_{\pm}}{\theta_-}\left[\mp\frac{\varepsilon^*}{x} \pm 2\frac{\sin^2\vartheta}{x} - \left(\frac{m_-}{m_+}\right)^2\beta_{\pm}\frac{\sin^4\vartheta}{x^2} - \xi x^2\right]\right\}.$$

При монотонном изменении магнитного поля в функции распределения плотностей появляется обрезывающий фактор $-\xi x^2$.

Эти функции плотности имеют относительные максимумы по x, положение которых определяется формулами

$$2\xi x_-^4 + (\varepsilon^* - 2\sin^2\vartheta)x_- - 2\beta_-\sin^4\vartheta = 0, \tag{13}$$

$$2\xi x_+^4 + (-\varepsilon^* + 2\sin^2\vartheta)x_+ - 2\beta_+\sin^4\vartheta = 0.$$

Когда $\delta(t)$ действительная функция, т. е. магнитное поле меняется монотонно, что уравнения (13) всегда имеют решения. Это значит, что при монотонном изменении магнитного поля максимумы плотности устойчивы.

Когда $\delta(t)$ — мнимая функция, имеем колебания магнитного поля, уравнения (13) не всегда имеют решения.

Для отрицательно заряженных частиц, если $\varepsilon^* < 0$, решения не существуют, а при $\varepsilon^* > 0$ решения существуют для $\varepsilon^* \gg \sin^2\vartheta$.

Для положительно заряженных частиц решения существуют при $\varepsilon^* < 0$.

Выводы. Определена функция распределения скоростей частиц в аксиально-симметричном нестационарном магнитном поле.

Получены основные характеристики эллипсоидального распределения: средние скорости вдоль радиуса и вращения. Средняя радиальная скорость оказалась связанной с нестационарностью температуры и исчезает при постоянной температуре.

Показано, что изменение температуры со временем непосредственно зависит от нестационарности магнитного поля.

Найдены выражения для распределения плотностей частиц в дипольном нестационарном магнитном поле и определены условия образования максимумов плотностей.

Выражаю благодарность проф. А. А. Власову за консультацию по теме и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А., Хакимов Ф. Х. ДАН СССР, 151, № 4, 1963.
2. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М., ИЛ, 1948.

Поступила в редакцию
27. 3 1964 г.

Кафедра
теоретической физики