Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1965

УДК 629.195.2 : 521.2

Е. П. АКСЕНОВ

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ОРБИТАХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Введение

При построении аналитической теории движения искусственных спутников Земли представляется интересным взять в качестве промежуточной орбиты не кеплеровский эллипс, а более сложную кривую, которая включала бы в себя наиболее значительные возмущения, обусловленные отличием гравитационного поля Земли от центрального. Такую орбиту возможно построить на основании обобщенной задачи двух неподвижных центров, поскольку силовая функция этой задачи отличается от потенциала земного тяготения лишь членами второго порядка малости относительно сжатия Земли и допускает строгое интегрирование дифференциальных уравнений движения [1, 2].

Ранее [3] нами были получены формулы, описывающие такую промежуточную орбиту. Эти формулы выражают конические координаты спутника как явные функции некоторой промежуточной переменной, которая в свою очередь связана со временем. Однако метод вычисления координат спутника по таким формулам не является единственным и, возможно, самым подходящим. Поэтому в настоящей статье мы решили дать некоторые другие формы решения рассматриваемой задачи. С одной стороны, эти формы решения в некоторых случаях могут оказаться более удобными для вычисления координат спутника. С другой стороны, они будут полезными при разложении возмущающей функции в ряд, что необходимо делать при учете возмущений от других возмущающих факторов.

§ 1. Постановка задачи

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли так, чтобы ось Oz была направлена в северный полюс мира, а плоскость xy совпадала с экваториальной плоскостью Земли. Тогда дифференциальные уравнения промежуточного движения спутника запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1}$$

где силовая функция U дается формулой

$$U=\frac{fm}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-ic)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+ic)^2}}\right\}, \qquad (2)$$

в которой f — постоянная тяготения, m — масса Земли, $i=\sqrt{-1}$, c — некоторая постоянная, численно равная ~ 210 *км*.

Как уже отмечалось, уравнения (1) с силовой функцией (2) строго интегрируются в квадратурах. При интегрировании этих уравнений целесообразно перейти к новым переменным ξ, η, w, связанным с x, y, z соотношениями

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\cos w,\\ y&=\sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\sin w,\\ z&=\xi\eta. \end{aligned} \qquad (3)$$

Кроме того, вместо времени t следует ввести новую переменную τ согласно равенству

$$dt=(\xi^2+c^2\eta^2)\,d\tau. \qquad (4)$$

Формулы, выражающие сфероидальные координаты ξ, η, w через τ, и связь между переменной τ и временем t были получены нами в работе [3]. В этой же работе были введены элементы промежуточной орбиты. Перед тем как привести все необходимые формулы, напомним кратко качественную картину движения спутника и геометрический смысл некоторых из элементов орбиты.

Движение спутника происходит таким образом, что

$$\begin{aligned} a(1-e)\leqslant\xi\leqslant a(1+e),\\ -s\leqslant\eta\leqslant+s\leqslant 1, \end{aligned} \qquad (5)$$

где a, e, s — постоянные, определяемые начальными условиями. Область, в которой движется спутник, представляет собой некоторое тороидальное пространство, ограниченное двумя эллипсоидами вращения с малыми полуосями $a(1-e)$ и $a(1+e)$ и гиперболоидом вращения, уравнение которого

$$\frac{x^2+y^2}{c^2(1-s^2)}-\frac{z^2}{c^2s^2}=1.$$

Большие полуоси ограничивающих эллипсоидов соответственно равны $\sqrt{a^2(1-e)^2+c^2}$ и $\sqrt{a^2(1+e)^2+c^2}$. Постоянные a, e, s, таким образом, полностью определяют область движения спутника, и их удобно поэтому принять в качестве элементов орбиты.

Согласно работе [3], переменные ξ, η, w следующим образом выражаются через τ:

$$\begin{aligned} \xi&=\frac{\bar p(1+\varkappa\cos\psi)}{1+\bar e\cos\psi},\\ \eta&=s\cdot\sin\varphi,\\ w&=\operatorname{arc\,tg}(\cos i\operatorname{tg}\varphi)+\bar\Omega,\\ \bar\Omega&=c_0\varphi+\bar c_0\psi+c_2\sin 2\varphi+\bar c_1\sin\psi+\bar c_2\sin 2\psi+\\ &+\bar c_3\sin 3\psi+\bar c_4\sin 4\psi+c_5, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\bar{p}$, $\varkappa$, $\bar{e}$, c_0, $\bar{c}_0$, c_2, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, $\bar{c}_4$ — постоянные, зависящие от элементов a, e, s, а c_5 — произвольная постоянная интегрирования.

Введем параметр ε по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1-e^2)}.$$

Поскольку $a(1-e)$ больше радиуса Земли, то $\varepsilon < \frac{1}{30}$. Поэтому все постоянные, входящие в формулы (6), можно разложить в ряды по степеням ε. Отбрасывая в разложениях члены порядка ε^6, мы найдем [3]

$$\bar{p} = a(1 - e\bar{e}),$$

$$\bar{e} = e\{1 + \varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2) + \varepsilon^4(1-e^2)[3 - 16s^2 + 14s^4 - 2e^2(1-s^2)^2]\},$$

$$\varkappa = \varepsilon^2 e\{(1-2s^2) + \varepsilon^2[(3-16s^2+14s^4) - e^2(1-2s^4)]\},$$

$$c_0 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos i\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{8}[(30-35s^2) + e^2(2+3s^2)]\right\}(1-e^2),$$

$$\bar{c}_0 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos i\left\{(2+e^2) + \frac{\varepsilon^2}{8}[(24-56s^2) - e^2(4+64s^2) - e^4(2+3s^2)]\right\},$$

$$c_2 = \frac{3}{22}\varepsilon^4(1-e^2)^2 s^2 \cos i,$$

$$\bar{c}_1 = -2\varepsilon^2 e \cos i\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{8}[(4-28s^2) - e^2(6+7s^2)]\right\},$$

$$\bar{c}_2 = -\frac{\varepsilon^2}{4}e^2 \cos i\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}[11 + e^2(1+s^2)]\right\},$$

$$\bar{c}_3 = \frac{\varepsilon^4}{4}e^3 \cos i(2-s^2),$$

$$\bar{c}_4 = \frac{\varepsilon^4}{64}e^4 \cos i(2+s^2),$$

где

$$i = \arcsin s.$$

Что касается переменных φ и ψ, то они связаны с переменной τ формулами

$$\begin{aligned}\varphi &= am[\sigma_1(\tau + c_3), k_1],\\ \psi &= am[\sigma_2(\tau + c_4), k_2],\end{aligned} \tag{7}$$

где c_3 и c_4 — еще две произвольные постоянные интегрирования, а модули k_1 и k_2 и постоянные σ_1 и σ_2 определяются из равенств

$$\begin{aligned}k_1^2 &= \varepsilon^2(1-e^2)s^2\{1 - 4\varepsilon^2(1-s^2)\},\\ k_2^2 &= \varepsilon^4 e^2 s^2 - \varepsilon^4 e^2(1 - 10s^2 + 11s^4 + e^2 s^4),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(3+e^2)(1-s^2) - \right.$$

$$-\frac{\varepsilon^4}{8}\left[(9+2s^2-11s^4)+e^2(6+28s^2-34s^4)+e^4(1+2s^4-3s^4)\right]\Big\},$$

$$\sigma_2=\sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}(3-4s^2-e^2)-\right. \qquad (9)$$

$$\left.-\frac{\varepsilon^4}{8}\left[(9-72s^2+64s^4)+e^2(2-40s^2+48s^4)+e^4\right]\right\}.$$

Таким образом, координаты спутника являются некоторыми комбинациями эллиптических функций τ с малыми модулями (порядка $^1/_{30}$).

Формулы (3)—(9) будут полностью решать поставленную задачу, если мы найдем формулу, по которой для любого заданного момента времени t можно вычислять τ. Действительно, если элементы орбиты спутника известны и для заданного момента t известно τ, то с помощью таблиц эллиптических функций мы сможем найти ξ, η, w, а затем по формуле (3) вычислить прямоугольные координаты спутника.

Однако полезно иметь для этой цели и другие формулы. Здесь мы воспользуемся тем обстоятельством, что для эллиптических функций существуют тригонометрические ряды, весьма быстро сходящиеся при достаточно малых значениях их модулей.

§ 2. Разложения для φ и ψ

Для $am(\widetilde{\lambda}, k)$ мы имеем следующее известное разложение:

$$am(\widetilde{\lambda}, k)=\frac{\pi\widetilde{\lambda}}{2K}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\,\frac{q^n}{1+q^{2n}}\sin\frac{\pi n\widetilde{\lambda}}{K}, \qquad (10)$$

где

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\ldots\right\}, \qquad (11)$$

$$q=\frac{k^2}{16}\left\{1+\frac{k^2}{2}+\frac{21}{64}k^4+\ldots\right\}. \qquad (12)$$

Отбрасывая члены с k^6, мы из формул (10)—(12) найдем

$$am(\widetilde{\lambda}, k)=\bar{\lambda}+\frac{k^2}{8}\left(1+\frac{k^2}{2}\right)\sin 2\bar{\lambda}+\frac{k^4}{256}\sin 4\bar{\lambda}, \qquad (13)$$

где

$$\bar{\lambda}=\left(1-\frac{1}{4}k^2-\frac{5}{64}k^4\right)\widetilde{\lambda}. \qquad (14)$$

Подставляя в (13) и (14) вместо k последовательно k_1 и k_2, а затем заменяя их выражениями (8) и (9), мы получим

$$\varphi=u+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\varepsilon^2(1-e^2)s^2\left\{1-\frac{\varepsilon^2}{2}(8-9s^2+e^2s^2)\right\}\sin 2u, \qquad (15)$$

$$\psi=v+\frac{1}{8}\varepsilon^2e^2\left\{s^2-\frac{\varepsilon^2}{2}(2-20s^2+22s^4-3e^2s^4)\right\}\sin 2v, \qquad (16)$$

где

$$u=n_1\tau+\left(n_1c_3-\frac{\pi}{2}\right),\quad v=n_2(\tau+c_4), \qquad (17)$$

причем

$$n_1 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}[(6-7s^2)+e^2(2-s^2)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^4}{8}\left[\left(9-3s^2-\frac{43}{8}s^4\right)+e^2\left(6+34s^2-\frac{165}{4}s^4\right)+e^4\left(1+s^2-\frac{11}{8}s^4\right)\right]\right\}, \tag{18}$$

$$n_2 = \sqrt{fma(1-e^2)}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}[(6-8s^2)-e^2(2-s^2)] - \right.$$

$$- \frac{\varepsilon^4}{8}\left[(9-72s^2+64s^4)-e^2(23s^2-30s^4)+e^4\left(1+s^2-\frac{11}{8}s^4\right)\right]. \tag{19}$$

Заметим, что в формулах (15) и (16) мы отбросили все члены с амплитудами порядка 10^{-8} и выше.

§ 3. Разложение для $\frac{1}{\xi}$, η и $\overline{\Omega}$

Для эллиптических функций Якоби мы имеем

$$\operatorname{sn}\tilde{\lambda} = \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2K}, \tag{20}$$

$$\operatorname{cn}\tilde{\lambda} = \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos(3n-1)\frac{\pi\tilde{\lambda}}{2K}, \tag{21}$$

где K и q определяются равенствами (11) и (12).

Поэтому, сохраняя лишь члены с амплитудами, большими 10^{-9}, мы найдем

$$\sin\varphi = \left(1+\frac{k_1^2}{16}+\frac{7}{256}k_1^4\right)\cos u - \frac{k_1^2}{16}\left(1+\frac{k_1^2}{2}\right)\cos 3u + \frac{k_1^4}{256}\cos 5u, \tag{22}$$

$$\cos\psi = \left(1-\frac{k_2^2}{16}-\frac{9}{256}k_2^4\right)\cos v + \frac{k_2^2}{16}\left(1+\frac{k_2^2}{2}\right)\cos 3v + \frac{k_2^4}{256}\cos 5v, \tag{23}$$

где u и v даются формулами (17).

Далее имеем

$$\cos 2\psi = -\frac{k_2^2}{8} + \cos 2v + \frac{k_2^2}{8}\cos 4v + \ldots, \tag{24}$$

$$\cos 3\psi = \cos 3v + \ldots, \tag{25}$$

$$\sin 2\psi = \sin 2v + \frac{k_2^2}{8}\sin 4v + \ldots, \tag{26}$$

$$\sin 3\psi = \sin 3v + \ldots, \tag{27}$$

$$\sin 4\psi = \sin 4v + \ldots. \tag{28}$$

Из первой формулы (6) находим

$$\frac{p}{\xi} = A_0 + A_1 \cos\psi + A_2 \cos 2\psi + A_3 \cos 3\psi, \tag{29}$$

где

$$p = a(1 - e^2),$$

$$A_0 = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 e^2 (1 - 2s^2) + \frac{1}{2}\varepsilon^4 e^2 [(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2(1 - 2s^2)],$$

$$A_1 = e\left\{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 e^2 (1 - 2s^2)^2\right\}, \tag{30}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 e^2 (1 - 2s^2) - \frac{1}{2}\varepsilon^4 e^2 [(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2(1 - 2s^4)],$$

$$A_3 = \frac{1}{4}\varepsilon^4 e^3 (1 - 2s^2)^2.$$

В формуле (29) мы отбросили все члены с амплитудами порядка ε^6 и выше.

Подставляя в (29) равенства (23), (24), (25), мы окончательно найдем

$$\frac{p}{\xi} = a_0 + a_1 \cos v + a_2 \cos 2v + a_3 \cos 3v + a_4 \cos 4v, \tag{31}$$

где

$$a_0 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} e^2 (1 - 2s^2) + \frac{\varepsilon^4}{16} e^2 [(24 - 128s^2 + 112s^4) - e^2(8 + s^2 - 18s^4)],$$

$$a_1 = e\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{16} e^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4 e^2}{256}[(48 - 96s^2 + 80s^4) - 7e^2 s^4]\right\}, \tag{32}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 e^2 (1 - 2s^2) - \frac{\varepsilon^4 e^2}{2}[(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2(1 - 2s^4)],$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon^2 e^3 s^2}{16} + \frac{\varepsilon^4 e^3}{32}(6 - 12s^2 + 10s^4 - e^2 s^4),$$

$$a^4 = -\frac{\varepsilon^4 e^4 s^2}{16}(1 - 2s^2).$$

Подставим теперь (22) во вторую формулу (6). Тогда получим

$$\eta = b_1 \cos u + b_3 \cos 3u, \tag{33}$$

где

$$b_1 = s\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{16}(1 - e^2)s^2 - \frac{\varepsilon^4}{256}(1 - e^2)s^2[64(1 - s^2) - 7s^2(1 - e^2)]\right\},$$

$$b_3 = -s^3\left\{\frac{\varepsilon^2}{16}(1 - e^2) - \frac{\varepsilon^4}{32}(1 - e^2) - [8(1 - s^2) - s^2(1 - e^2)]\right.. \tag{34}$$

Аналогичным образом мы можем получить следующую формулу для $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \Omega + d_1 \sin v + d_2 \sin 2v + d_3 \sin 3v + d_4 \sin 4v + \bar{d}_2 \sin 2u,$$

$$\Omega = n_3 \tau + c_5, \tag{35}$$

где

$$d_1 = -2\varepsilon^2 e \cos i \left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{16}\left[(8 - 56s^2) - e^2(12 + 13s^2)\right]\right\},$$

$$d_2 = -\frac{\varepsilon^2 e^2}{4}\cos i \left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[(22 - 2s^2) + e^2(2 + s^2)\right]\right\},$$

$$d_3 = \frac{\varepsilon^4 e^3}{8}\cos i\,(4 - 3s^2), \tag{36}$$

$$d_4 = \frac{\varepsilon^4 e^4}{64}\cos i\,(2 - s^2),$$

$$d_2 = -\frac{\varepsilon^4}{32}(1 - e^2)^2 s^2 \cos i,$$

$$n_3 = -\frac{3}{2}\varepsilon^2\sqrt{fmp}\cos i\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{3}\left[(6 + s^2) - e^2(4 - 26s^2)\right]\right\}. \tag{37}$$

§ 4. Выражения для прямоугольных координат

Из третьей формулы (6) находим

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \eta^2}\cos w &= \cos\varphi\cos\overline{\Omega} - \cos i\sin\varphi\sin\overline{\Omega}, \\ \sqrt{1 - \eta^2}\sin w &= \cos\varphi\sin\overline{\Omega} + \cos i\sin\varphi\cos\overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{38}$$

Поэтому для прямоугольных координат x, y, z спутника будем иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi^2 + c^2}\,(\cos\varphi\cos\overline{\Omega} - \cos i\sin\varphi\sin\overline{\Omega}), \\ y &= \sqrt{\xi^2 + c^2}\,(\cos\varphi\sin\overline{\Omega} + \cos i\sin\varphi\cos\overline{\Omega}), \\ z &= \xi\cdot s\cdot\sin\varphi. \end{aligned} \tag{39}$$

Формулы (39) могут служить для вычисления прямоугольных координат спутника вместо формул (3). Они могут оказаться более удобными, например, в случае, когда s близко к единице, т. е. в случае почти полярных орбит, когда третья формула (6) мало удобна для вычисления w.

§ 5. Соотношение между v и t

Из равенств (17) и (35) имеем

$$\begin{aligned} u &= (1 + \nu)\,v + \omega_0, \\ \Omega &= \mu v + \Omega_0, \end{aligned} \tag{40}$$

где ω_0 и Ω_0 — постоянные, которые связаны с постоянными c_3, c_4 и c_5 соотношениями

$$\omega_0 = n_1 c_3 - \frac{\pi}{2} - c_4 n_1,$$

$$\Omega_0 = c_5 - n_3 c_4,$$

а постоянные ν и μ определяются из формул

$$1 + \nu = \frac{n_1}{n_2}, \quad \mu = \frac{n_3}{n_2}$$

или
$$\nu=\frac{\varepsilon^2}{4}(12-15s^2)+\frac{\varepsilon^4}{64}[288-1296s^2+1035s^4-e^2(144+288s^2-510s^4)]. \tag{41}$$
$$\mu=-\frac{3}{2}\cos i-\frac{3}{16}(6-17s^2-24e^2s^2)\cos i. \tag{42}$$

Очевидно, мы можем вместо τ в качестве независимой переменной принять v. Установим связь между v и t. Так как
$$dt=(\xi^2+c^2\eta^2)\,d\tau,$$
то на основании (17)
$$\frac{dt}{dv}=\frac{\xi^2+c^2\eta^2}{n_2}. \tag{43'}$$
Выразим правую часть этого равенства через v.

Тогда получим
$$\frac{\xi^2+c^2\eta^2}{n^2}=\frac{1}{\bar n}\left\{\frac{(1-\bar e^2)^{3/2}}{(1+\bar e\cos v)^2}-\lambda+2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}\lambda_2\cos 2u+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon^2 e(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos v)^3}(\bar\lambda_0+\bar\lambda_1\cos v+\bar\lambda_2\cos^2 v)\right\}, \tag{43}$$
где
$$\bar n=\sqrt{\frac{fm}{a^3}}\left\{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)[(1+11s^2)-e^2(1-ss^2)]\right\},$$
$$\lambda=-\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)^{3/2}(24-96s^2+75s^4), \tag{44}$$
$$\bar\lambda_0=\frac{e}{4}(8-13s^2),$$
$$\bar\lambda_1=\frac{1}{4}[(8-12s^2)+e^2(8-11s^2)],$$
$$\bar\lambda_2=\frac{e}{2}(4-5s^2),\ \lambda_2=\frac{s^2}{4}.$$
В формуле (43) мы отбросили все члены, которые при интегрировании дают периодические члены с амплитудами порядка ε^4 и выше.

Интегрируя (43′), мы найдем
$$\bar n(t-t_0)+\bar M_0=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\bar e}{1+\bar e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}-\bar e\sqrt{1-\bar e^2}\frac{\sin v}{1+\bar e\cos v}-\lambda v+$$
$$+\varepsilon^2(1-e^2)^{3/2}\lambda_2\sin 2u+\frac{\varepsilon^2 e(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos v)^2}(\beta_0+\beta_1\cos v)\sin v, \tag{45}$$
где
$$\beta_0=2-3s^2,\ \beta_1=\frac{e}{4}(8-11s^2), \tag{46}$$

причем $\overline{M}_0$ можно принять за шестую произвольную постоянную, вместо c_4.

Применяя для решения уравнения (45) тот же прием, что в работе [3], можно выразить v как функцию t. Не останавливаясь здесь на подробностях вывода, приведем все формулы для вычисления v как функции t.

$$v = \theta - \varepsilon^2\lambda_2 (1 + e \cos \theta)^2 \sin 2 (\theta + \omega) - \varepsilon^2 e (\beta_0 + \beta_1 \cos\theta) \sin\theta, \qquad (47)$$

где

$$\omega = \nu\theta + \omega_0, \qquad (48)$$

а θ определяется из следующих уравнений:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\overline{e}}{1-\overline{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \qquad (49)$$

$$E - \overline{e} \sin E = M, \qquad (50)$$

$$M = n (t - t_0) + M_0, \qquad (51)$$

$$n = \frac{\overline{n}}{1-\lambda}, \quad M_0 = \frac{\overline{M}_0}{1-\lambda}. \qquad (52)$$

Таким образом, связь между θ и t практически ничем не отличается от соотношения между истинной аномалией и временем в кеплеровском движении. Зная θ, мы по формуле (47) легко можем найти v.

Заметим, что при выводе формулы (47) мы отбросили все периодические члены, пропорциональные ε^4, и члены более высокого порядка. Хотя для большинства практических задач полученная здесь точность вполне достаточна, укажем, однако, что если потребуется более высокая точность, то можно будет воспользоваться формулами (133) работы [3], где установлена связь между ψ и t*. А по данному ψ можно всегда вычислить v по формуле

$$v = \psi + h_2 \sin 2\psi + h_4 \sin 4\psi, \qquad (53)$$

где

$$h_2 = -\frac{\varepsilon^2}{16} e^2 s^2 + \frac{\varepsilon^4 e^2}{32} (2 - 20 s^2 + 22 s^4 + e^2 s^4),$$

$$h_4 = \frac{3}{256} \varepsilon^4 e^4 s^4.$$

Последний член в (53) почти всегда может быть отброшен, так как он имеет порядок 10^{-8}.

Выводы

В настоящей статье мы нашли все формулы, описывающие промежуточное движение спутника. Эти формулы зависят от шести произвольных постоянных a, e, s (или i), ω_0, Ω_0, M_0. При выводе всех формул мы производили лишь разложения по степеням малой величины ε^2, но нигде не разлагали по степеням e или s, так что полученные формулы справедливы при любых эксцентриситетах и наклонностях орбит спутника. Всюду, где мы делали разложения, мы пользовались абсолютно сходящимися для любых моментов времени рядами. Заметим,

* В работе [3] вместо ψ использовано обозначение v.

что многие формулы выведены с большим запасом точности, поскольку, как правило, все периодические члены, пропорциональные ε^4, можно спокойно отбросить.

Предположим теперь, что нам известны числовые значения элементов a, e, s, ω_0, Ω_0 и M_0 (они могут быть найдены из наблюдений или вычислены по начальным данным) и пусть нам требуется для какого-либо момента времени вычислить координаты спутника. Прежде всего по известным элементам мы вычисляем все постоянные $\bar{n}$, $\bar{e}$, ν, μ и т. д. Затем по данному t из (51) находим M. Решение уравнения (50) даст нам E, после чего по формуле (49) находим θ. Найдя θ, из формулы (47) вычисляем v. После этого из соотношений (40) определяем u и Ω.

Дальнейшие вычисления можно проводить по различным схемам. Укажем некоторые из них.

1. По формулам (15), (31) и (35) находим φ, ξ, $\bar{\Omega}$, а затем, используя равенства (38), вычисляем прямоугольные координаты спутника.

2. По формулам (15), (16)и (35) находим φ, ψ, $\bar{\Omega}$. После этого равенства (6) дадут нам ξ, η, w, а формулы (3) — прямоугольные координаты.

3. Зная v, из второго равенства (17) находим τ, а затем, используя таблицы эллиптических функций, можно найти φ, ψ, $\bar{\Omega}$, или ξ, η, w, а потом и x, y, z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. Сб. «Искусственные спутники Земли». Изд-во АН СССР, вып. 8, 1961.
2. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г. «Астрономический журнал», **10**, № 2, 1963.
3. Аксенов Е. П. Сообщения ГАИШ, № 137, 1964.

Поступила в редакцию
2. 4 1964 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии