Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1965

УДК 530.12 : 531.51

М. М. ХАПАЕВ

О ФОКУСИРОВКЕ ПУЧКОВ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПОЛЯМИ СТЕЛЛАРАТОРНОГО ТИПА

В статье исследуются фокусирующие свойства прямых полей стеллараторного типа. Рассматриваются поля, возрастающие нелинейно при удалении от оси винтовой симметрии. Уравнения движения частиц в таких полях допускают применение усреднения. Для системы усредненных уравнений получены интегралы (адиабатические инварианты), которые описывают периодические движения усредненной системы и позволяют сделать вывод о возможности фокусировки быстрых заряженных частиц винтовыми полями.

Движение частицы в магнитном поле описывается уравнением

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{e}{cm}[\bar{v}\bar{H}], \tag{1}$$

где $\bar{v}$ — скорость частицы, m — релятивистская масса, $\bar{H}$ — напряженность магнитного поля.

Будем рассматривать винтовые поля, которые в цилиндрических координатах запишем в виде

$$\begin{aligned} H_r &= H_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m-1}\sin m(\varphi-\alpha z),\\ H_\varphi &= H_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m-1}\cos m(\varphi-\alpha z),\\ H_z &= -H_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m}\alpha\cos m(\varphi-\alpha z). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения движения (1) в цилиндрических координатах примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= \frac{e}{cm}(r\dot{\varphi}H_z - \dot{z}H_\varphi),\\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= \frac{e}{cm}(\dot{z}H_r - \dot{r}H_z),\\ \ddot{z} &= \frac{e}{cm}(\dot{r}H_\varphi - r\dot{\varphi}H_r). \end{aligned} \tag{3}$$

В ускорительных системах приходится иметь дело с параксиальными пучками частиц, для которых

$$\frac{v_\perp}{v} \ll 1, \tag{4}$$

где $v_\perp = \sqrt{\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2}$.

Условие (4) позволяет разделить движения: движение вдоль оси z считать сначала равномерным и рассмотреть отдельно движение в плоскости r, φ. С точностью до членов второго порядка малости относительно $\frac{v_\perp}{v}$ систему (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot r - r\dot\varphi^2 &= \frac{ev}{cm}\left(-H_\varphi + \frac{r\dot\varphi}{v} H_z\right), \\ r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi &= \frac{ev}{cm}\left(H_r - \frac{\dot r}{v} H_z\right), \\ \ddot z &= \frac{ev}{cm}\left(\frac{\dot r}{v} H_\varphi - \frac{r\dot\varphi}{v} H_r\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Наряду с системой (5) рассмотрим систему, которую будем называть продольно-невозмущенной:

$$\begin{aligned} \ddot r - r\dot\varphi^2 &= \frac{ev}{cm}\cdot\frac{H_0}{r_0^{m-1}}(-1)\, r^{m-1}\cos m(\varphi + \omega t), \\ r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi &= \frac{ev}{cm}\cdot\frac{H_0}{r_0^{m-1}}\cdot r^{m-1}\sin m(\varphi - \omega t), \\ z &= vt, \quad \omega = av. \end{aligned} \tag{6}$$

В системе (6) отсутствуют малые члены порядка $\frac{v_\perp}{v}$, так что система при равномерном движении вдоль оси z описывает перемещения частицы в поперечной плоскости r, φ.

Отметим, что правая часть третьего уравнения в (5) содержит малые множители $\frac{\dot r}{v}$ и $\frac{r\dot\varphi}{v}$, поэтому $\dot z = v_z$ меняется медленно по сравнению с $v_\perp$. Магнитное поле не меняет энергии частицы, поэтому для того, чтобы учесть неравномерность движения вдоль оси z, и, следовательно, выявить возможный энергетический обмен между продольным и поперечным движениями, следует правую часть третьего уравнения в (5) усреднить вдоль траекторий невозмущенной системы.

Итак, займемся изучением поперечного движения. В системе (6) введем новые обозначения и новые переменные:

$$a = \frac{ev}{cm}\cdot\frac{H_0}{r_0^{m-1}}, \qquad b(r) = ar^{m-1}; \tag{7}$$

$m(\varphi + \omega t) = \psi$ — фаза поля в точке, где находится частица, $v_\perp$ — поперечная скорость частицы (абсол. величина), α — угол между направлением скорости $v_\perp$ и полярным лучом, отсчитывается против часовой стрелки.

В новых обозначениях система (6) запишется так:

$$\begin{aligned} \dot v_\perp &= -b\cos(\psi - \varphi + \alpha), & \dot r &= v_\perp\cos(\alpha - \varphi), \\ \dot\alpha &= \frac{b}{v_\perp}\sin(\psi - \varphi + \alpha), & r\dot\varphi &= v_\perp\sin(\alpha - \varphi). \end{aligned} \tag{8}$$

Системы (6) и (7) описывают плоское движение частицы в некотором плоском поле, которое вращается с частотой $m\omega$. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о движении частицы во «вращающемся поле». Под действием «вращающегося поля» частица приобретает угловую скорость $\dot{\varphi}$.

Пусть частота ω настолько велика, что

$$\left|\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\right| \ll 1. \tag{9}$$

Это условие не позволяет частице, оставаясь на дефокусирующем участке поля, удаляться от оси, оно дает нам возможность ввести в систему (8) малый параметр, малость которого имеет смысл условия (9).

В качестве малого параметра ε возьмем $\frac{1}{(m\omega)^2}=\varepsilon$, введем новый угол $\Theta=\psi+\alpha-\varphi$ и перейдем к новому быстрому безразмерному времени $\tau=tm\omega$, которое имеет смысл угла поворота поля, введем также новую переменную u, такую что $v_\perp=\sqrt{\varepsilon u}$.

Дифференцирование по τ будем обозначать кружком °. Окончательный вид системы, записанной относительно u, θ, ψ, r и содержащей малый параметр ε, таков:

$$\begin{gathered}
\mathring{u} = -b\cos\theta, \\
\mathring{\theta} = 1 + \frac{b}{u}\sin\theta + \varepsilon(m-1)\frac{u}{r}\sin(\theta-\psi), \\
\mathring{\psi} = 1 + \varepsilon m\frac{u}{r}\sin(\theta-\psi), \\
\mathring{r} = \varepsilon u\cos(\theta-\psi).
\end{gathered} \tag{11}$$

В системе (11) $\mathring{r}=O(\varepsilon)$, поэтому r меняется медленно в отличие от u, θ и ψ, поэтому r будем называть медленной переменной, а u, θ, ψ — быстрыми. Если нас будет интересовать поведение полярного угла φ, то из системы (8) следует, что φ также меняется медленно.

Систему уравнений

$$\begin{gathered}
\mathring{u} = -b\cos\theta, \\
\mathring{\theta} = 1 + \frac{b}{u}\sin\theta, \\
\mathring{\psi} = 1, \qquad r = r_0
\end{gathered} \tag{12}$$

будем называть вырожденной. Вдоль интегральных кривых вырожденной системы r сохраняется, поэтому уравнения (12) описывают движение частицы в постоянном вращающемся поле. Однако силы, действующие со стороны поля (2) на частицу, не остаются постоянными за время полного оборота поля $\tau=2\pi$, наибольшей величины эти силы достигают, когда частица наиболее удалена от оси, и они уменьшаются, когда частица приближается к оси. Малые слагаемые в правых частях уравнений (11) порядка $O(\varepsilon)$ учитывают это изменение поля за время каждого оборота.

Задача состоит в том, чтобы построить уравнения для систематического движения, возникающего из-за неоднородности поля (поле зависит от r). Для решения этой задачи мы применяем общие методы усреднения, изложенные в работах [1] и [2].

Следуя схеме усреднения, предложенной в работе [2], мы рассмотрим интегралы вырожденной системы (12), которые, сохраняясь вдоль решений вырожденной системы (12), медленно меняются вдоль интегральных кривых системы (11). Система уравнений, в которой эти интегралы вместе с r взяты в качестве новых переменных, будет системой медленных движений.

Усреднением этой системы можно получить систему уравнений для медленных систематических движений, возникающих вследствие неоднородности вращающегося поля.

Вырожденная система (12) имеет интегралы

$$
\begin{gathered}
u^2 + 2bu\sin\theta = c_1,\\
\theta - \tau \pm \arcsin\frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+c_1}} = c_2, \quad \tau - \psi = c_3,
\end{gathered} \tag{13}
$$

откуда определяется $u = -b\sin\theta \pm \sqrt{b^2\sin^2\theta + c_1}$. Скорость u по смыслу положительна, поэтому для $c_1 > 0$ следует взять знак $+$. В этом случае θ есть монотонно возрастающая функция τ, так как $\overset{\circ}{\theta} = \frac{1}{u}\sqrt{b^2\sin^2\theta + c_1}$, всюду >0. Если $c_1 < 0$, то угол θ может лежать только в 3 и 4 четвертях и изменяться в пределах θ_1, θ_2, определяемых неравенством

$$
b^2\sin^2\theta + c_1 \geqslant 0; \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2; \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2 = -\sqrt{-\frac{c_1}{b^2}}, \tag{14}
$$

$\overset{\circ}{\theta} = \pm\sqrt{b^2\sin^2\theta + c_1}\,\frac{1}{u}$, в точках θ_1 и θ_2 обращается в 0, а $\overset{\circ\circ}{\theta} = \frac{b^2}{2u^2}\sin 2\theta_1 > 0$, $\frac{b^2}{2u^2}\sin 2\theta_2 < 0$, таким образом, θ колеблется в пределах отрезка $[\theta_1, \theta_2]$, достигая в θ_1 наименьшего, а в θ_2 наибольшего значений; причем знаку плюс соответствует движение в сторону возрастания от θ_1 к θ_2, а — минус — наоборот. Интеграл (13) в этом случае выгодно записать так:

$$
\tau + c_2 = \theta + (-1)^n \arcsin\frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+c_1}} + \pi n = \theta + \operatorname{Arc}\sin\frac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+c_1}}. \tag{15}
$$

Четным n соответствует знак $+$, т. е. прохождение отрезка (Θ_1, Θ_2) в положительном направлении, нечетным — наоборот. Таким образом, Θ в формуле (15) является функцией периодической, колеблющейся между значениями Θ_1 и Θ_2 с периодом 2π.

Как уже говорилось выше, в качестве новых переменных в системе (11) возьмем интегралы

$$
p = u^2 + 2bu\sin\theta,
$$

$$
\Phi = \begin{cases} \theta - \psi + \arcsin\dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+p}}, & \text{для } p > 0,\\[2ex] \theta - \psi + \operatorname{Arc}\sin\dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{b^2+p}}, & \text{для } p < 0. \end{cases} \tag{16}
$$

Уравнения для медленных переменных Ф, p, r получаются в виде

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{r} = \varepsilon u \cos(\theta - \psi), \\
\overset{\circ}{\Phi} = \varepsilon \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} (m - 1) \frac{u}{r} \sin(\theta - \psi) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} m \frac{u}{r} \sin(\theta - \psi) + \right. \\
\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial r} u \cos(\theta - \psi) \right], \qquad (17) \\
\overset{\circ}{p} = \varepsilon \left[\frac{\partial p}{\partial r} u \cos(\theta - \psi) + \frac{\partial p}{\partial \theta} (m - 1) \frac{u}{r} \sin(\theta - \psi) \right].
\end{gathered}
$$

В правых частях уравнений (17) произведем формальное усреднение вдоль траекторий вырожденной системы (12), см. [2]. Усреднение приходится производить по-разному для $p > 0$ и $p < 0$. Рассмотрим для примера уравнение

$$
\dot{r} = \varepsilon u \cos(\theta - \psi) = \varepsilon f(\theta(\tau)). \qquad (18)
$$

Если θ монотонно возрастающая функция, то

$\bar{f} = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0 + T} f(\theta(\tau))\, d\tau$, здесь выгодно перейти к интегрированию по θ,

$d\tau = \frac{u}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + p}} d\theta$, так что

$$
\bar{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0 + T} u^2 \frac{\cos(\theta - \psi)}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + p}} d\theta = \sqrt{b^2 + p} \cos \Phi
$$

($\bar{f}$ означает среднее от f).

Если Θ периодическая функция, то правая часть уравнения (18) периодическая функция с периодом 2π, и усреднение будет состоять в интегрировании по углу Θ на отрезке $[\Theta_1, \Theta_2]$ в прямом и обратном направлениях. Запишем уравнения (17) для медленных переменных r, p, Ф, подставив соответствующие производные:

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{r} = \varepsilon u \cos(\theta - \psi), \\
\overset{\circ}{\Phi} = \varepsilon \left[\pm (m - 1) \frac{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + p}}{(b^2 + p) r} u^2 \sin(\theta - \psi) - m \frac{u}{r} \sin(\theta - \psi) + \right. \\
\left. + \frac{u^2 \cos \theta b'}{b^2 + p} \cos(\theta - \psi) \right], \qquad (19) \\
\overset{\circ}{p} = \varepsilon \left[2b' u^2 \sin \theta \cos(\theta - \psi) + 2bu^2 \cos \theta \cdot \frac{m - 1}{r} \sin(\theta - \psi) \right].
\end{gathered}
$$

Опуская весьма громоздкие выкладки, связанные с усреднением уравнений (19), приведем результат усреднения уравнений (19). Для переменных оставим те же обозначения, хотя r, p, Ф уже будут иметь смысл усредненных величин

$$
\begin{gathered}
\overset{\circ}{r} = \varepsilon \sqrt{b^2 + p} \cos \Phi, \\
\overset{\circ}{p} = -\varepsilon \sqrt{b^2 + p} \left[3bb' + (m - 1) \frac{b^2}{r} \right] \cos \Phi, \qquad (20) \\
\overset{\circ}{\Phi} = \varepsilon \frac{\sin \Phi}{r} \left[(m - 1) \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + p}} - \sqrt{b^2 + p} \right],
\end{gathered}
$$

где

$$b = ar^{m-1}, \qquad b' = \frac{m-1}{r}\cdot b.$$

Из первых двух уравнений делением одного на другое и интегрированием получается адиабатический инвариант

$$p + 2a^2 r^{2(m-1)} = \text{constant} = \lambda. \tag{21}$$

Используя полученный инвариант λ, можно построить еще один интеграл системы (20)

$$(\lambda - b^2)^{m-1} b^2 \sin^{2(m-1)} \Phi = \gamma. \tag{22}$$

Из уравнений первого и третьего системы (20), записанных в виде

$$\frac{d\Phi}{db^2} = \frac{mb^2 - \lambda}{b^2(\lambda - b^2)\,2(m-1)}\cdot\frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}, \tag{23}$$

видно, что точка $b^2 = \frac{\lambda}{m}$, $\Phi = \frac{\pi}{2}$ является особой точкой типа центр. На фазовой плоскости Φ, b^2 интегралы (22) задают семейства концентрических, гладких выпуклых фигур, содержащих центры $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda}{m}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\lambda}{m}\right)$. Вдоль каждой из этих фигур b^2 меняется в пределах

$$0 < b^2_{\min} \leqslant b^2 \leqslant b^2_{\max} < \lambda.$$

Угол Φ лежит соответственно в 1-й или 2-й четвертях. Отметим еще, что b^2 строго больше 0, поэтому в исходной системе (11) нет особенности по r. Таким образом, частицы совершают медленные периодические движения внутри кольца, ограниченного $r_{\max}$ и $r_{\min}$. Параметры этих периодических движений легко найти с помощью инвариантов λ и γ. Медленные колебания являются нелинейными, однако система (20) для малых колебаний вблизи точки $b_0^2 = \frac{\lambda}{m}$; $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$; $p_0 = \lambda\,\frac{m-2}{m}$ становится линейной. Переменная b^2 совершает гармонические колебания вблизи своего положения равновесия $b_0^2 = \frac{\lambda}{m}$ с частотой

$$\Omega = 2m(m-1)\,\frac{b_0^2}{r^2}, \tag{24}$$

которая для $m \geqslant 3$ зависит от величины инварианта λ, т. е. от радиуса окружности, относительно которой совершаются частицей медленные малые колебания. Для $m=2$ частота Φ не зависит от λ.

Адиабатические инварианты (21) и (22) с точностью, зависящей от ε, описывают поведение решений системы (11) на интервале времени τ $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$, где L — конечное число [1].

Если вернуться к исходному времени $t = \tau\sqrt{\varepsilon}$, то с указанной точностью результаты справедливы для времен $t = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} = Lm\omega$. Это означает, что частица медленно движется по периодическим траекториям, описываемым адиабатическими инвариантами, одновременно совершая малые быстрые движения, характер которых также определяется адиабатическими инвариантами; такая картина движений верна на конечном числе медленных циклов.

О выборе величины малого параметра ε, т. е. шага винтового поля. При уменьшении параметра ε возрастает точность асимптотического приближения, увеличивается отрезок времени, на котором гарантируется справедливость этого приближения. Однако с уменьшением ε уменьшается начальная скорость частиц, которые могут быть удержаны полем внутри трубки заданного радиуса, как это следует из преобразования (10) $v=\sqrt{\varepsilon}u$. Таким образом, выбирать шаг винтового поля следует оптимально, учитывая размеры камеры, в которой происходит движение, и величину фокусирующих полей.

Рассмотрим теперь взаимодействие изученного поперечного движения с продольным. Малость этого взаимодействия определяется малостью отношения скоростей поперечного и продольного движения $\frac{v_\perp}{v}$; а также тем, что H_z возрастает медленнее, чем H_r и H_φ ($H_z \sim r^m$, $H_\perp \sim r^{m-1}$).

В правые части системы (11) можно ввести члены, содержащие продольное поле H_z, с новым малым параметром μ, величина которого определяется $\frac{v_\perp}{v}$, а также добавить последнее уравнение системы (5) для медленного изменения скорости v_z. Выпишем только последнее уравнение, в котором последовательно сделаны преобразования:

$$t_1=\sqrt{vt}\,; \quad \tau=t_1 m\omega_1; \quad \mu=\frac{1}{\sqrt{v}}; \quad \omega_1=\alpha\sqrt{v}\,; \quad a_1=\frac{eH_0}{cmr_0^{m-1}},$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{v}_z &= \varepsilon\mu\, a_1 r^{m-1} u\,[\cos\psi\cos(\theta-\psi)-\sin\psi\sin(\theta-\psi)] = \\ &= \varepsilon\mu a_1 r^{m-1} u\cos\theta. \end{aligned} \qquad (25)$$

Возмущения в правых частях системы (11) тоже будут иметь порядок $\theta(\varepsilon\mu)$. Из сказанного о выборе ε следует, что эти возмущения будут весьма малы по сравнению с возмущениями порядка $0(\varepsilon)$. Усредним правую часть уравнения (25) вдоль траекторий системы (11), для которых получены асимптотические приближения. Результат усреднения, очевидно, будет равен нулю. Это говорит о том, что на временах $t \simeq \simeq Lm\omega$ **нет обмена** энергией в среднем между поперечным и продольным движениями. Имеются быстрые пульсации скорости v_z с частотой вращающегося поля, которые модулированы медленными движениями.

Поперечные сечения магнитных сильнофокусирующих систем, составленных из квадрупольных линз, имеют два физически выделенных взаимноортогональных направления, циклические сильнофокусирующие системы имеют много элементов периодичности; все это приводит к возникновению резонансных явлений и потере частиц. Отсутствие в поперечном сечении предлагаемой винтовой магнитной системы выделенных направлений, плавное изменение поля вдоль траектории частицы является преимуществом рассмотренной в работе магнитной системы стеллараторного типа.

В заключение автор выражает благодарность А. Н. Тихонову за весьма полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Волосов В. М. «Успехи математических наук», 17, вып. 6 (108), 3—126, 1962.

Поступила в редакцию
15. 4 1964 г.

Кафедра
математики