ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1965

УДК 530.12 : 531.51

Н. П. КОНОПЛЕВА

КООРДИНАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КОМПЕНСИРУЮЩИЕ ПОЛЯ

Статья посвящена разработке теории компенсирующих полей для случая координатных преобразований. Использованный в работе метод дает уравнения типа Эйнштейна для всех полей. Эти уравнения определяют тензор энергии-импульса соответствующего поля.

Метод теории компенсирующих полей позволяет сформулировать теорему Нётер для локальных групп преобразований. Соответствующий аппарат для некоординатных преобразований был разработан Утиямой в [1]. Основная идея его состоит в следующем. Для компенсации члена в вариации лагранжиана, пропорционального производной от параметров группы, в лагранжиан вводится через замену обычной производной на ковариантную «компенсирующее» поле, которое преобразуется нетензорным образом. Тензорная часть вариации этого поля однозначно определяется из условия ковариантности уравнений движения, которые получаются в этом случае. В принципе компенсирующие поля могут быть получены и непосредственно из требования ковариантности уравнений движения [2], но получение их из лагранжиана дает возможность написать в явном виде лагранжианы взаимодействия и свободного компенсирующего поля, а также непосредственно получить однородные законы сохранения.

Описанный метод позволяет каждый инвариант группы связать с некоторым взаимодействием и, таким образом, осуществить классификацию взаимодействий по группам. Интересно применить его к случаю координатных преобразований.

Но в рамках формализма, развитого Утиямой, невозможно корректно учесть изменения параметров локализуемой группы, если координаты, от которых они зависят, преобразуются. Чтобы обойти эту трудность, будем считать, что параметры группы зависят от некоторых величин u^μ (назовем их мировыми координатами), остающихся инвариантными при данных преобразованиях координат x^i. u^μ связаны с меняющимися координатами x^i следующим образом [3]: $u^\mu = \Omega^\mu(i) x^i$. При этом закон преобразования $\Omega^\mu(i)$ задается трансформационными свойствами x^i и требованием инвариантности u^μ.

Такой подход означает, что вместо единой мировой координатной сетки мы вводим набор произвольно ориентированных в каждой точке пространства локальных координатных систем, относительно которых определяем все полевые величины, тогда как параметры локализуемой группы считаем зависящими от мировых координат u^μ. Мы рассматриваем только такие преобразования локальных координат, которые не меняют мировую координатную сетку, поэтому нам безразлично, искривлено мировое пространство или нет.

В частности, такое изменение системы отсчета необходимо, когда хотят рассматривать спиноры в кривом пространстве. В этом случае переходят к набору произвольно ориентированных в каждой точке пространства лоренцевых реперов.

В новой системе координат полный лагранжиан системы частиц L_T в компенсирующем поле $A_\mu(kl)$ запишется следующим образом:

$$L_T = L + L_0 = Q\Gamma^k\Omega^\mu(k)\nabla_\mu Q + L_0,$$

где L_0 — лагранжиан свободного компенсирующего поля, ковариантная производная $\nabla_\mu Q = \partial_\mu Q - I_{(kl)}QA_\mu(kl)$.

Для локальной группы Лоренца

$$L_0 = L_0(\Omega^\mu(i)\,\Omega^\nu(k)\,F_{\mu\nu}(jn)),$$

$$F_{\mu\nu}(jn) = \partial_\mu A_\nu(jn) - \partial_\nu A_\mu(jn) - \frac{1}{4}f^{jn}_{abcd}(A_\mu(ab)\,A_\nu(cd) - A_\mu(cd)\,A_\nu(ab)).$$

Для произвольной неабелевой группы

$$L_0 = L_0(\Omega^\mu(i)\,\Omega^\nu(k)\,F^a_{\mu\nu}) = F^a_{\mu\nu}f^c_{ae}f^e_{cb}F^{b\mu\nu},$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - \frac{1}{2}f^a_{bc}(A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu).$$

Для абелевой группы

$$L_0 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Интеграл действия I принимает вид

$$I = \int|\Omega|\,L_T\,du,\quad \text{где}\quad |\Omega| = |\Omega_\mu(k)|.$$

Таким образом, для любого компенсирующего поля его интеграл действия I_0 можно записать как

$$I_0 = \int|\Omega|\,R\,du,$$

где под R понимается та или иная скалярная свертка тензоров поля в зависимости от рассматриваемой локальной группы.

В случае бесконечно малых лоренцевых преобразований координат

$$x^k \to x^k + \varepsilon^k_e(u)\,x^e,$$

$$\Omega^\mu(k) \to \Omega^\mu(k) - \varepsilon^l_k\Omega^\mu(l),$$

$$\delta A_\mu(kl) = \frac{1}{2}f^{kl}_{abcd}A_\mu(cd)\,\varepsilon^{ab} + \frac{\partial\varepsilon^{ab}}{\partial u^\mu}$$

волновые функции Q преобразуются по некоторому представлению группы Лоренца $\delta Q = I_{(kl)}Q\varepsilon^{kl}(u)$, причем u^μ, очевидно, не меняются.

Приравнивая нулю вариацию δI:

$$\delta I=|\Omega|\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q+|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}\delta\nabla_\mu Q+|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\Omega^\mu(k)}\delta\Omega^\mu(k)-$$

$$-L|\Omega|\Omega_\mu(k)\delta\Omega^\mu(k)+\frac{1}{2}|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu(kl)}f^{kl}_{jmab}A_\mu(ab)\varepsilon^{jm}+|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial A_\mu(kl)}\frac{\partial\varepsilon^{kl}}{\partial u^\mu}+$$

$$+\frac{1}{2}|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}(kl)}f^{kl}_{jmab}A_{\mu,\nu}(ab)\varepsilon^{jm}+|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}(kl)}\frac{\partial^2\varepsilon^{kl}}{\partial u^\mu\partial u^\nu}+$$

$$+|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}(kl)}f^{kl}_{jmab}A_\mu(ab)\frac{\partial\varepsilon^{jm}}{\partial u^\nu}+|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial\Omega^\mu(k)}\delta\Omega^\mu(k)-L_0|\Omega|\Omega_\mu(k)\delta\Omega^\mu(k)=$$

$$=\left[|\Omega|\frac{\partial L}{\partial Q}-\frac{\partial}{\partial u^\mu}\left(|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}\right)-|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}I_{(jm)}A_\mu(jm)\right]\delta Q+$$

$$+\frac{\partial}{\partial u^\mu}\left(|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}I_{(kl)}Q\right)\varepsilon^{kl}-\frac{1}{2}|\Omega|\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}f^{in}_{kljm}I_{(in)}QA_\mu(jm)\varepsilon^{kl}-$$

$$-\frac{1}{2}|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}(in)}f^{in}_{klrs}A_\nu(rs)f^{kl}_{jmab}A_\mu(ab)\varepsilon^{jm}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial F_{\nu\mu}(kl)}f^{kl}_{jmab}A_\mu(ab)\right)\varepsilon^{jm}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(|\Omega|\frac{\partial L_0}{\partial F_{\nu\mu}(kl)}\right)f^{kl}_{jmab}A_\mu(ab)\varepsilon^{jm}+4|\Omega|\Omega_\nu(k)\left[T^\nu_{\mu\,(\text{частиц})}+\right.$$

$$\left.+R^\nu_\mu-\frac{1}{4}\delta^\nu_\mu R\right]\delta\Omega^\mu(k)$$

и считая δQ, $\delta A_\mu(kl)$, ε^{jm} и $\delta Q^\mu(k)$ произвольными, получим 4 типа соотношений:

1. Уравнения движения

$$|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial Q}-\nabla^*_\mu\left(|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial\nabla_\mu Q}\right)=0, \tag{1}$$

где

$$\nabla^*_\mu\left(|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial\nabla_\mu Q}\right)=\partial_\mu\left(|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial\nabla_\mu Q}\right)+|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial\nabla_\mu Q}I_{(kl)}A_\mu(kl).$$

2. Уравнения поля

$$\frac{\partial}{\partial u^\nu}\left(|\Omega|\frac{\partial L_\text{т}}{\partial F_{\mu\nu}(kl)}\right)=|\Omega|J^\mu(kl)+|\Omega|\mathring{J}^\mu(kl), \tag{2}$$

где $\mathring{J}^\mu(kl)=\dfrac{\partial L_0}{\partial F_{\mu\nu}(ij)}f^{ij}_{klab}A_\nu(ab)$ — ток компенсирующего поля, $J^\mu(kl)=$ $=\dfrac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}I_{(kl)}Q$ — ток частиц.

3. Однородный закон сохранения для суммарного тока

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu}(|\Omega|J^\mu(kl)+|\Omega|\mathring{J}^\mu(kl))=0. \tag{3}$$

4. Уравнения Эйнштейна, которые здесь имеют смысл тождеств,

$$T^\nu_{\mu\,(\text{поля})}+T^\nu_{\mu\,(\text{частиц})}\equiv 0. \tag{4}$$

Мы обозначили

$$T^{\nu}_{\mu\,(\text{частиц})} = \frac{\partial L}{\partial \nabla_{\nu} Q} \nabla_{\mu} Q - L\delta^{\nu}_{\mu},$$

$$T^{\nu}_{\mu\,(\text{поля})} = R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu} R,$$

так как они дают именно те выражения для тензоров энергии-импульса, которые обычно подразумеваются под этими понятиями. Для $T^{\nu}_{\mu\,(\text{поля})}$ это будет показано на примере электромагнитного поля в поле тяготения. Для всех полей выражение

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu} R$$

дает определение тензора энергии-импульса поля, если под R понимать L_0 соответствующего поля, так как оно представляет собой коэффициент при произвольной вариации I_0 по реперам $\delta Q^{\mu}(k)$. Реперы играют роль некоторого нового набора преобразующихся координат, поэтому коэффициент при вариации действия по ним имеет смысл тензора энергии-импульса. Как частный случай (4), имеем уравнения тяготения Эйнштейна.

Очевидно, уравнения (1) совпадают с уравнениями движения по геодезической при двух условиях

$$\nabla^{*}_{\mu}(|\Omega|\Omega^{\mu}(k)) = 0$$

(точнее, достаточно

$$\frac{1}{|\Omega|}\partial_{\mu}(|\Omega|\Omega^{\mu}(k)) = 0), \tag{1'}$$

$$A_{\mu}(kl) = \Delta_{\mu}(kl),$$

где $\Delta_{\mu}(kl)$ — тензор Риччи, т. е. если поле, вводимое локальной группой преобразований координат, совпадает с гравитационным. Заметим, что условия (1′) были введены В. И. Родичевым в [4] для устранения фиктивной гравитации.

Уравнения (2) получаются приравниванием нулю коэффициента при вариации действия по волновым функциям компенсирующего поля $A_{\mu}(kl)$ и поэтому могут считаться полевыми уравнениями по определению. Они являются обобщением максвелловских уравнений на случай нелинейных полей, вводимых локальными неабелевыми группами, находящихся в гравитационном поле. Естественно, что они подходят и для самого поля тяготения, если в качестве R взять квадратичную свертку тензоров кривизны

$$R = R_{\mu\nu}(ik)R^{\mu\nu}(ik) = R^{\varepsilon}_{\sigma\mu\nu}R^{\sigma\mu\nu}_{\varepsilon}.$$

Лагранжиан такого типа из других соображений предлагался Эддингтоном [5]. Если под R понимается скалярная кривизна пространства, т. е. величина, линейная по тензору поля тяготения, то уравнения (1) превращаются в некоторые алгебраические соотношения, позволяющие определить $A_{\mu}(kl)$ через реперы Ω. Так как в обоих случаях уравнения (4) дают только *определения* соответствующих тензоров энергии-импульса, а полевыми уравнениями являются уравнения (2), в качестве лагранжиана свободного гравитационного поля следует брать, вообще говоря, сумму линейного и квадратичного лагранжианов, а не скалярную кривизну R.

Однородный закон сохранения (3) для суммарного тока в случае группы Лоренца дает нам при интегрировании инварианты, не зависящие от мирового времени, но являющиеся антисимметричными тензорами в локальной системе координат. Их можно понимать, как тензоры моментов количества движения гравитационного поля и частиц, соответственно [6, 7]. Поле, вводимое локальной группой Лоренца, не есть гравитационное поле, порождаемое массой. Назовем его лоренцевым полем.

Теперь рассмотрим случай, когда координаты x^i подвергаются локальным лоренцевым преобразованиям, а волновые функции Q, кроме представления группы Лоренца, преобразуются по некоторой локальной калибровочной группе. Таким образом, вводится сразу два компенсирующих поля. В этом случае

$$x^k \to x^k + \varepsilon^k{}_l x^l,$$

$$\Omega^\mu(k) \to \Omega^\mu(k) - \varepsilon^l_k \Omega^\mu(l),$$

$$\delta Q = I_{(kl)} Q \varepsilon^{kl} + S_a Q \xi^a,$$

где $I_{(kl)}$ — генератор группы Лоренца, S_a — генератор калибровочной группы.

Допустим также, что $[I_{(kl)}, S_a]^A_C = 0$. Тогда из требования инвариантности интеграла действия относительно таких преобразований и требования ковариантности уравнений вида

$$\Gamma^k \Omega^\mu(k) \nabla_\mu Q + mQ = 0$$

получим ковариантную производную

$$\nabla_\mu Q = \partial_\mu Q - I_{(kl)} Q A_\mu(kl) - S_a Q B^a_\mu \tag{5}$$

и нетензорный закон преобразования для компенсирующих полей $A_\mu(kl)$ и B^a_μ:

$$\delta A_\mu(kl) = \frac{1}{2} f^{kl}_{abcd} A_\mu(cd) \varepsilon^{ab} + \frac{{}^{\Gamma}\partial \varepsilon^{ab}}{\partial u^\mu},$$

$$\delta B^a_\mu = f^a_{bc} B^c_\mu \xi^b + \frac{\partial \xi^a}{\partial u^\mu}.$$

Полный интеграл действия системы принимает вид

$$I = \int |\Omega| (Q\Gamma^k \Omega^\mu(k) \nabla_\mu Q)\, du + \int |\Omega| R_1\, du + \int |\Omega| R_2\, du,$$

где $R_1 = L_0$ (лоренцева поля), $R_2 = L_0$ (калибровочного поля).

Варьируя I и собирая члены при произвольных вариациях δQ, δA, δB, ε и ξ, получим:

1. Уравнения движения в суммарном поле

$$|\Omega| \frac{\partial L_т}{\partial Q} - \nabla^*_\mu \left(|\Omega| \frac{\partial L_т}{\partial \nabla_\mu Q} \right) = 0. \tag{6}$$

2. Полевые квазимаксвелловские уравнения

а) для лоренцева поля

$$\partial_\nu \left(|\Omega| \frac{\partial L_т}{\partial F_{\mu\nu}(ij)} \right) = |\Omega| J^\mu(kl) + |\Omega| \overset{\circ}{J}{}^\mu(kl); \tag{7}$$

б) для калибровочного поля

$$\partial_\nu\left(|\Omega|\frac{\partial L_т}{\partial F^a_{\mu\nu}}\right)=|\Omega|J^\mu_a+|\Omega|\mathring{J}^\mu_a. \qquad (8)$$

3. Закон сохранения для каждого поля в отдельности

$$\partial_\mu[|\Omega|(J^\mu(kl)+\mathring{J}^\mu(kl))]=0, \qquad (9)$$

$$\partial_\mu[|\Omega|(J^\mu_a+\mathring{J}^\mu_a)]=0, \qquad (10)$$

где

$$\mathring{J}^\mu(kl)=\frac{\partial R_1}{\partial F_{\mu\nu}(ij)}f^{ij}_{klab}A_\nu(ab),$$

$$\mathring{J}^\mu_a=\frac{\partial R_2}{\partial F^b_{\mu\nu}}f^b_{ac}A^c_\nu,$$

$$J^\mu(kl)=\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}I_{(kl)}Q,$$

$$J^\mu_a=\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu Q}I_aQ.$$

4. Тождества Эйнштейна

$$T^\nu_{\mu\,(\text{лоренцева поля})}+T^\nu_{\mu\,(\text{калибровочного поля})}+$$
$$+T^\nu_{\mu\,(\text{частиц в лоренцевом поле})}+T^\nu_{\mu\,(\text{частиц в калибровочном поле})}\equiv 0. \qquad (11)$$

Наши рассуждения легко обобщить на любое число полей. Если генераторы локальных калибровочных групп и группы преобразований координат коммутируют между собой, то полевые уравнения и законы сохранения получим для каждого поля в отдельности. Уравнения Эйнштейна тогда примут вид

$$T^\nu_{\mu\,(\text{лоренцева поля})}=-\Sigma' T^\nu_{\mu\,(\text{полей})}-\Sigma T^\nu_{\mu\,(\text{частиц})},$$

или в более привычной записи

$$R^\nu_{\mu(\text{лоренцева поля})}-\frac{1}{4}\delta^\nu_\mu R_{(\text{лоренцева поля})}=-\Sigma' T^\nu_{\mu\,(\text{полей})}-\Sigma T^\nu_{\mu\,(\text{частиц})}, \qquad (12)$$

где Σ' означает суммирование по всем полям, кроме лоренцева, а Σ — сумму тензоров энергии-импульса частиц в каждом поле. $T^\nu_{\mu\,(\text{полей})}$ получаются при подстановке в $R^\nu_\mu-\frac{1}{4}\delta^\nu_\mu R$ $R=L_0$ соответствующего поля. В качестве примера рассмотрим случай, когда B^a_μ — электромагнитное поле.

Тогда

$$R=F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad R^\nu_\mu=F_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu},$$

$$F_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu}-\frac{1}{4}\delta^\nu_\mu F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda}=T^\nu_\mu\ \text{максв.}$$

$$R=2(H^2-E^2),$$

T^{ν}_{μ} максв. — тензор максвелловских натяжений, а R — плотность энергии электромагнитного поля. Действительно, выражение $R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}R$ дает тензор энергии-импульса поля.

Итак, если понимать локализацию группы в том смысле, что ее параметры должны зависеть от некоторых инвариантных относительно данных преобразований величин, то формализм Утиямы можно вполне строго распространить на локальные группы преобразований координат. Для этого достаточно перейти к реперам и инвариантным мировым координатам. Тогда реперы будут осуществлять связь между мировым пространством и пространством группы симметрии, в терминах инвариантов которой мы хотим описывать данную систему (внутренним пространством). В случае локальной группы Лоренца размерность внутреннего и внешнего пространства совпадает, но, вообще, развитый в статье формализм этого не предполагает.

В то же время требование инвариантности 4-мерного многообразия сверток внутренних координат с реперами относительно преобразований внутренней группы является принципиальным. Внутреннее пространство — это пространство прибора, производящего измерение, определяется его природой. Никакие преобразования внутреннего пространства не должны влиять на мировую координатную сетку, связанную с распределением масс во вселенной. При локализации в смысле Т. В. Киббла [2] (используемой Б. Н. Фроловым в [3]) параметры группы заменяются на произвольные функции координат, которые сами преобразуются по локализуемой группе. Обеспечивая своим уравнениям такой вид, чтобы из них следовали как частный случай обычные уравнения, авторы делают много дополнительных предположений. Вопрос о том, как влияют трансформационные свойства параметров на ограничивающие условия, не исследуется. Такой способ построения теории может оказаться невозможным, если преобразования параметров учесть явно. Тем не менее следует отметить, что уравнения (50) работы [3] и (6, 12) работы [2] сходны с нашими (2) и (4).

Несколько слов о возможности применения предлагаемого аппарата к описанию гравитационного поля. Локальная однородная группа Лоренца, как и другие группы внутренней симметрии, вводит с необходимостью только продольную часть компенсирующего поля [8, 9], а именно связность абсолютного параллелизма. Продольная часть полей обычно считается нефизической вследствие нетензорного характера ее поведения при преобразованиях мировых координат. Но именно благодаря нетензерности продольная часть полей и способна восстанавливать симметрию, нарушенную взаимодействием.

Кроме того, для введения поперечной (физической) части взаимодействий необходим другой принцип, отличный от принципа локальной инвариантности или эквивалентных ему специальных принципов относительности. Таким принципом является требование общей ковариантности теории. Тогда однозначно определяется поперечная часть полей, которая выражается через гравитационное поле.

Принцип общей ковариантности, с точки зрения которого все поля взаимодействия тождественны между собой (в силу бесконечной транзитивности соответствующей ему группы), не является обобщением специального принципа относительности, а имеет самостоятельное глубокое значение.

Таким образом, принцип локальной инвариантности в любом случае определяет только *вид* полного лагранжиана, включающего поле взаимодействия, свободное поле и свободные частицы; форму уравнений и законов сохранения, а также трансформационные свойства компенсирующего поля. Тензорную часть полей, собственно и осуществляющую взаимодействия, но не изменяющую уравнений, можно получить, добавляя к специальным принципам относительности требование общей ковариантности. Заметим, что рассматриваемая отдельно общая ковариантность тоже не дает полного тензорного поля. Только взятые вместе, оба принципа определяют взаимодействие.

Принимая во внимание указанные соображения, можно утверждать:

1. Развитый в статье аппарат универсальным образом описывает все поля взаимодействия, в том числе и гравитационное;

2. Для гравитационного поля произвольной интенсивности (в частности, волнового) существуют уравнения максвелловского типа;

3. При вариации лагранжианов произвольных полей по реперам возникают уравнения типа Эйнштейна, что позволяет, используя конструктивный подход к компенсации [10], геометризовать любые взаимодействия;

4. Если операторы соответствующих групп коммутируют между собой, нашим методом можно вводить одновременно произвольное число компенсирующих полей.

В заключение еще раз подчеркнем, что локальная группа Лоренца *не вводит* гравитационного поля, что противоположно утверждениям [7] и [2].

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность проф. К. П. Станюковичу и Г. А. Соколику за постоянный интерес к работе и консультации, а также В. И. Родичеву за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Utiyama R. Phys. Rev., **101**, 1957, 1956. (Сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля. М., Изд-во «Мир», 1964, стр. 250).
2. Бродский А., Иваненко Д., Соколик Г. ЖЭТФ, **41**, 1307, 1961; Acta physica Hungarica, **14**, 21, 1962.
3. Соколик Г. А. ДАН СССР, **148**, № 3, 1963.
4. Родичев В. И. Докторская диссертация, 1963.
5. Эддингтон А. С. Теория относительности, Л. — М., ГТТИ, 1934.
6. Kibble J. Journ. of Math. phys., **2**, 212, 1961. (Сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля, стр. 274).
7. Фролов Б. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физики, астрономии, № 6, 48, 1963.
8. Полубаринов И. В., Огиевецкий В. И. Д — 776, Дубна, 1961.
9. Полубаринов И. В., Огиевский В. И. Р — 1241, Дубна, 1963.
10. Соколик Г. А., Коноплева Н. П. ДАН СССР, **154**, № 2, 1964.
11. Коноплева Н. П. Дипломная работа. МГУ, 1963.

Поступила в редакцию
21. 4 1964 г.

Кафедра
теоретической физики