ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1965

УДК 621.378.001

З. Ф. ЕФИМОВ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ

Лагранжев формализм теории локального взаимодействия спинорного поля с электромагнитным дает возможность последовательно осуществить описание рассматриваемой системы и получить физически-реальные результаты только при условии, когда в качестве волновых функций, характеризующих состояние системы, берутся функции не свободных, а взаимодействующих полей. При этом законы сохранения динамических величин реализуются только для всей системы в целом, а не для каждого из взаимодействующих полей.

Лагранжиан рассматриваемой системы всегда можно записать в виде суммы двух лагранжианов [1, 2, 3]

$$L = L_{сп} + L_{э} = \frac{i}{2}\,[\bar{\psi}\gamma^k(\psi_{,k} - ieA_k\psi) - (\bar{\psi}_{,k} + $$

$$+ ieA_k\bar{\psi})\,\gamma^k\psi] - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{nl}F^{nl}. \qquad (1)$$

Обычным вариационным методом находятся уравнения взаимодействующих полей

$$\left.\begin{aligned} &i\gamma^k(\psi_{,k} - ieA_k\psi) - m\psi = 0\\ &i(\bar{\psi}_{,k} + ieA_k\bar{\psi})\,\gamma^k + m\bar{\psi} = 0\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F^{kn}}{\partial x^k} = -e\bar{\psi}\gamma^n\psi = I^n. \qquad (3)$$

Для вектора тока

$$\gamma^k = -ie\left(\bar{\psi}\frac{\partial L}{\partial\bar{\psi}_{,k}} - \frac{\partial L}{\partial\psi_{,k}}\psi\right) = -e\bar{\psi}\gamma^k\psi,$$

как следствие уравнений (2), имеет место уравнение непрерывности: $J^k_{,k} = 0$.

Канонический тензор системы состоит из двух тензоров взаимодействующих полей

$$T^{kl} = T^{kl}_{сп} + T^{kl}_{э} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^k\psi^{,l} - \bar{\psi}^{,l}\gamma^k\psi) - F^{kn}A_n^{;l} + \frac{1}{4}g^{kl}F_{nm}F^{nm}, \qquad (4)$$

где учтено, что лагранжиан возмущенного спинорного поля в силу уравнений этого поля обращается в нуль

$$L_{cn} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^k (\psi_{,k} - ieA_k\psi) - (\bar{\psi}_{,k} + ieA_k\bar{\psi}) \gamma^k\psi] - m\bar{\psi}\psi = 0.$$

Дивергенции от канонических тензоров отдельных полей, определяющие величину четырехмерной силы взаимодействия между полями, равны по величине и противоположны по знаку

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{kl}_{cn} = J^k A_{k,l},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{kl}_{э} = - J^k A_{k,l},$$

так что только дивергенция от канонического тензора всей системы равна нулю:

$$T^{kl}_{,k} = \frac{\partial}{\partial x^k} T^{kl}_{cn} + \frac{\partial}{\partial x^k} T^{kl}_{э} = 0.$$

Это говорит о том, что законы сохранения имеют место только для всей системы, т. е. показывает ее энергетическую замкнутость.

Для выявления возможности симметризации канонического тензора всей системы найдем метрический тензор, пользуясь методом Гильберта.

Метрический тензор любого векторного поля находится путем вариации тензорной плотности лагранжиана, записанного в ковариантном виде, по компонентам метрического тензора g^{ik} и его производным, что приводит к формуле [4, 5]

$$\theta_{ik} = \frac{2\partial \sqrt{-g}L}{\sqrt{-g}\,\partial g^{ik}} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g}L}{\partial g^{ik}_{,l}}. \tag{5}$$

Для получения метрического тензора энергии-импульса спинорного поля следует варьировать тензорную плотность ковариантного лагранжиана по компонентам тензора Ламэ и их производным [6, 9]. Следуя 5-оптике [6] применительно к пространству четырех измерений для метрического тензора спинорного поля, при его взаимодействии с электромагнитным получаем

$$\theta^{kl}_{cn} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma^k (\psi^{,l} - ieA^l\psi) - (\bar{\psi}^{,l} + ieA^l\bar{\psi}) \gamma^k\psi] + \frac{1}{4i} \frac{\partial}{\partial x^n} K^{lkn}, \tag{6}$$

где $K^{lkn} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^l\gamma^k\gamma^n - \gamma^n\gamma^k\gamma^l) \psi$, так что

$$f^{l,kn} = \frac{1}{4i} K^{lkn} = \frac{1}{8i} \bar{\psi} (\gamma^l\gamma^k\gamma^n - \gamma^n\gamma^k\gamma^l) \psi = \frac{1}{8} \bar{\psi} (\gamma^n\sigma^{lk} + \sigma^{lk}\gamma^n) \psi, \tag{7}$$

$$\sigma^{lk} = \frac{\gamma^l\gamma^k - \gamma^k\gamma^l}{2i}.$$

Преобразуем тензор (6) к явно симметричному виду [9].

Тензор третьего ранга (7) отличен от нуля только при условии $l \neq k \neq n$, что позволяет записать его в более простой форме

$$f^{l,kn} = -\frac{i}{4} \bar{\psi}\gamma^l\gamma^k\gamma^n\psi.$$

Дивергенция от этого тензора

$$\frac{\partial}{\partial x^n} f^{l,kn} = -\frac{i}{4} (\overline{\psi}_{,n} \gamma^n \gamma^l \gamma^k \psi + \overline{\psi} \gamma^l \gamma^k \gamma^n \psi_{,n})$$

на основании уравнений (2), которые с учетом, что $n \neq l$; $n \neq k$, можно записать в виде

$$i \sum{}'' \gamma^n \psi_{,n} + e \sum{}'' \gamma^n A_n \psi + i\gamma^l (\psi_{,l} - ieA_l \psi) + i\gamma^k (\psi_{,k} - ieA_k \psi) - m\psi = 0,$$

$$i \sum{}'' \overline{\psi}_{,n} \gamma^n - e \sum{}'' A_n \overline{\psi} \gamma^n + i (\overline{\varphi}_{,l} + ieA_l \overline{\psi}) \gamma^l + i (\overline{\psi}_{,k} + ieA_k \overline{\psi}) \gamma^k + m\overline{\psi} = 0$$

(штрихи означают отсутствие в суммах членов с $n=l$ и $n=k$, в остальных слагаемых суммирование по l и k при этом не производится), преобразуется

$$\frac{\partial}{\partial x^n} f^{l,kn} = \frac{i}{4} (\overline{\psi}^{,l} \gamma^k \psi - \overline{\psi}^{,k} \gamma^l \psi - \overline{\psi} \gamma^k \psi^{,l} + \overline{\psi} \gamma^l \psi^{,k}) +$$

$$+ \frac{e}{2} (A^k \overline{\psi} \gamma^l \psi - A^l \overline{\psi} \gamma^k \psi).$$

Для тензора (6) получаем явно симметричное выражение [2]

$$\theta^{kl}_{cn} = \frac{i}{4} (\overline{\psi} \gamma^k \psi^{,l} + \overline{\psi} \gamma^l \psi^{,k} - \overline{\psi}^{,k} \gamma^l \psi - \overline{\psi}^{,l} \gamma^k \psi) + \frac{l}{2} (A^k \overline{\psi} \gamma^l \psi + A^l \overline{\psi} \gamma^k \psi).$$

По лагранжиану электромагнитного поля, записанного в ковариантном виде

$$L_э = -\frac{1}{4} F_{nl} F_{rs} g^{nr} g^{ls},$$

формулой (5) определяется метрический тензор электромагнитного поля

$$\theta^{kl}_э = -F^{kn} F^l_{\ ,n} + \frac{1}{4} g^{kl} F_{nr} F^{nr}. \qquad (8)$$

Разность между матричным тензором всей системы, состоящим из тензоров (6) и (8), и каноническим (4) преобразуется к дивергенции от тензора третьего ранга, антисимметричного по двум индексам,

$$\theta^{kl} - T^{kl} = e\overline{\psi} \gamma^k \psi A^l + \frac{\partial}{\partial x^n} f^{l,kn} + F^{kn} A^l_{,n} = -I^k A^l + \frac{\partial}{\partial x^n} f^{l,kn} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^n} (A^l F^{kn}) + A^l \frac{\partial F^{nk}}{\partial x^n}.$$

При этом выявляется невозможность независимой симметризации канонических тензоров для каждого из взаимодействующих полей: несимметричные слагаемые в спинорном поле $-I^k A^l$ и электромагнитном $A^l \frac{\partial F^{nk}}{\partial x^n}$ взаимно уничтожаются только при совместной симметризации. В результате получаем обычную связь между метрическим и каноническим тензорами всей системы [8]

$$\theta^{kl} = T^{kl} + \frac{\partial}{\partial x^n} f^{l,kn}.$$

Тензором $f^{l,kn} = \frac{1}{8} \overline{\psi} (\gamma^n \sigma^{lk} + \sigma^{lk} \gamma^n) \psi + A^l F^{kn}$

определяется тензор спина системы взаимодействующих полей

$$S^{n(lk)} = f^{l,kn} - f^{k,ln},$$

пространственные составляющие которого образуют вектор [1, 3, 9]

$$\overline{S} = \int \left([\overline{A}\overline{E}] + \frac{1}{2} \overset{*}{\psi} \overline{\sigma} \psi \right) d^3x.$$

Дивергенции от метрических тензоров отдельных полей, характеризующие силу взаимодействия между полями, как и для канонических тензоров, равны между собой и противоположны по знаку

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \theta^{kl}_{cn} = -J^k F^{.l}_{k},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \theta^{kl}_{э} = J^k F^{.l}_{k},$$

так что законы сохранения для всей системы содержатся в условии

$$\theta^{kl}_{,k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^{kl}_{cn} + \frac{\partial}{\partial x^k} \theta^{kl}_{э} = 0.$$

Это характеризует динамическую замкнутость рассматриваемой системы.

Описание системы в терминах волновых функций взаимодействующих полей, когда деление всех динамических величин на составные части носит чисто условный характер, осуществляется без каких-либо логических противоречий и приводит к физически реальным следствиям.

Если лагранжиан (1) записать в виде суммы трех лагранжианов

$$L = L_1 + L_{вз} + L_2 = \frac{i}{2} (\overline{\psi}\gamma^k \psi_{,k} - \overline{\psi}_{,k}\gamma^k \psi) - m\overline{\psi}\psi + e\overline{\psi}\gamma^k\psi A_k - \frac{1}{4} F_{ln}F^{ln}$$

и вести описание поведения системы в терминах волновых функций свободных полей [1, 3, 4, 7, 9], т. е. считать, что L_1 является лагранжианом свободного спинорного поля; L_2 — свободного электромагнитного и $L_{вз}$ — лагранжианом взаимодействия, то при этом лагранжев формализм приводит к логическим противоречиям и нереальным физическим следствиям.

Из лагранжиана свободного спинорного поля

$$L_1 = \frac{i}{2} (\overline{\psi}\gamma^k \psi_{,k} - \overline{\psi}_{,k}\gamma^k \psi) - m\overline{\psi}\psi$$

обычным путем следуют уравнения свободного поля

$$i\gamma^k \psi_{,k} - m\psi = 0,$$

$$i\overline{\psi}_{,k}\gamma^k + m\overline{\psi} = 0$$

и канонический тензор энергии-импульса

$$T^{kl}_{1} = \frac{i}{2} (\overline{\psi}\gamma^k \psi^{,l} - \overline{\psi}^{,l}\gamma^k \psi),$$

при этом учтено, что $L_1 = 0$ в силу уравнений поля. Дивергенция от этого тензора с учетом уравнений свободного спинорного поля равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{kl}_{1} = 0. \qquad (9)$$

Последнее означает, что спинорное поле не подвержено какому-либо воздействию извне.

Аналогично для лагранжиана свободного электромагнитного поля

$$L_2 = -\frac{1}{4} F_{ln}F^{ln}$$

получаем уравнения поля $\frac{\partial F^{kn}}{\partial x^k} = 0$ и канонический тензор энергии-импульса

$$T_2^{kl} = -F^{kn}A_n^{,l} + \frac{1}{4} g^{kl} F_{nr}F^{nr}.$$

Дивергенция от этого тензора с учетом уравнений свободного электромагнитного поля также равна нулю

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_2^{kl} = 0. \tag{10}$$

В результате следует, что канонический тензор энергии-импульса всей системы состоит из трех тензоров:

$$T^{kl} = T_1^{kl} + T_{\text{вз}}^{kl} + T_2^{kl} = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^k\psi^{,l} - \bar\psi^{,l}\gamma^k\psi) - g^{kl}e\bar\psi\gamma^n\psi A_n - F^{kn}A_n^{,l} + \frac{1}{4} g^{kl}F_{nr}F^{nr}.$$

Дивергенция от тензора всей системы, принимая во внимание (9) и (10), оказывается при этом отличной от нуля

$$T^{kl}_{,k} = -g^{kl}\frac{\partial}{\partial x^k}(e\bar\psi\gamma^n\psi A_n),$$

что характеризует динамическую незамкнутость системы.

Неприменимость теоремы Нётер к системам взаимодействующих полей [1] обусловлена только тем, что в терминах волновых функций свободных полей нельзя осуществить описание взаимодействия между полями. Энергетическая замкнутость системы взаимодействующих полей обеспечивается в лагранжевом формализме только при условии, если в качестве параметров системы берутся волновые функции, удовлетворяющие уравнениям взаимодействующих, а не свободных полей.

В этом можно убедиться и другим путем.

По лагранжиану системы взаимодействующих полей (1), считая неизвестным, каким уравнениям удовлетворяют входящие в него функции, определяем канонический тензор энергии-импульса системы:

$$T_l^k = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^k\psi_{,l} - \bar\psi_{,l}\gamma^k\psi) - \delta_l^k\Big[\frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^n\psi_{,n} - \bar\psi_{,n}\gamma^n\psi) -$$

$$- m\bar\psi\psi + e\bar\psi\gamma^n\psi A_n\Big] - F^{kn}A_{n,l} + \frac{1}{4}\delta_l^k F_{nr}F^{nr}. \tag{11}$$

Дивергенция от этого тензора приводится к виду

$$T^k_{l,k} = \bar\psi_{,l}(-i\gamma^k\psi_{,k} + m\psi - e\gamma^k\psi A_k) + (i\bar\psi_{,k}\gamma^k + m\bar\psi - e\bar\psi\gamma^k A_k)\psi_{,l} -$$

$$-\left(\frac{\partial F^{kn}}{\partial x^k} + e\bar\psi\gamma^n\psi\right)A_{n,l}.$$

Отсюда следует, что для реализации законов сохранения, т. е. для обращения в нуль дивергенции от канонического тензора всей системы, необходимо, чтобы волновые функции удовлетворяли уравнениям взаимодействующих полей (2) и (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., ГИТТЛ, 1957.
2. Швингер Ю. Сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики». М., ИЛ, 1954.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
5. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
6. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М., ГИТТЛ, 1956.
7. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.
8. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. М., ИЛ, 1947.
9. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

Поступила в редакцию
26. 6 1963 г.
После переработки
6. 1 1965 г.

Кафедра
теоретической физики