Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1965

УДК 539.21

В. Н. МИРОНОВСКИЙ

# ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, СВЯЗАННОЕ С ТЕПЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ РЕШЕТКИ

В рамках дебаевской модели вычислена мощность теплового гравитационного излучения твердого тела. Результаты применены к оценке величины гравитационного излучения Земли и белых карликов.

Для решения ряда космологических проблем очень важно установить относительное содержание различных форм материи во Вселенной.

Если бы мы обладали обширными сведениями по этому вопросу, то могли бы более ясно представить себе ход развития Вселенной.

К настоящему времени получены достаточно надежные данные о количестве легко наблюдаемой формы материи, сосредоточенной в обычных звездах и в межзвездном газе. Относительно труднонаблюдаемых форм материи (нейтрино, антинейтрино, гравитоны и т. д.) имеются только ориентировочные данные.

В работе [1] указано, что количество энергии трудно наблюдаемых форм материи может превосходить в 10 — 20 раз количество энергии обычной материи. Если это так, то, например, процесс расширения Вселенной фактически полностью определяется гравитационным действием слабовзаимодействующих частиц. Отсюда вытекает необходимость дальнейшего уточнения сведений о распространенности нейтринного и гравитационного излучений.

В этом отношении некоторую помощь может оказать подсчет и сравнение мощностей известных в настоящее время источников слабовзаимодействующих излучений.

В данной статье рассматривается вопрос о гравитационном излучении твердых тел, вызванном тепловым движением решетки.

Чтобы получить точный результат, можно решать задачу следующим образом: описать свободные колебания дискретной модели твердого тела с помощью нормальных координат, т. е. сопоставить с ней систему независимых (в линейном приближении) гармонических осцилляторов. Далее, зная вероятность гравитационного перехода отдельного осциллятора, найдем суммарную мощность излучения всей системы осцилляторов, считая, что она находится в термостате с температурой $T$.

Так как целесообразность точного решения задачи весьма сомнительна, обратимся к простейшей дебаевской модели, причем нормаль-

ные координаты введем способом, отличным от обычного. Учитывая независимость спектра свободных упругих колебаний от формы тела и граничных условий, для простоты рассмотрим тело в форме куба при граничных условиях, занимающих промежуточное место между условиями для жестко закрепленной и свободной поверхности. Такими являются смешанные граничные условия [2] вида

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \eta = \zeta = 0 \qquad \text{для граней } x = 0 \text{ и } x = L \tag{1}$$

(оси системы координат совпадают с ребрами куба). $\sigma_{xx}$ — компонент тензора напряжений, $\eta$ и $\zeta$ — смещения точки среды от положения равновесия соответственно по осям $Y$ и $Z$, $L$ — длина ребра куба. Аналогичные условия наложены на остальные грани.

Условия (1) будут выполнены, если положить

$$\begin{aligned}
\xi &= A_1 \cos\frac{n_1\pi x_0}{L} \sin\frac{n_2\pi y_0}{L} \sin\frac{n_3\pi z_0}{L} \sin\omega t,\\
\eta &= A_2 \sin\frac{n_1\pi x_0}{L} \cos\frac{n_2\pi y_0}{L} \sin\frac{n_3\pi z_0}{L} \sin\omega t,\\
\zeta &= A_3 \sin\frac{n_1\pi x_0}{L} \sin\frac{n_2\pi y_0}{L} \cos\frac{n_3\pi z_0}{L} \sin\omega t,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $x_0$, $y_0$, $z_0$ — координаты точек в положении равновесия, $n_1$, $n_2$, $n_3 = 1, 2, 3, \ldots$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ — постоянные величины, $\omega$ — угловая частота. Совокупность выражений (2) задает систему стоячих волн, заполняющих куб. Если выражения (2) подставить в уравнения упругости, то получим систему трех алгебраических уравнений, из которых определится $\omega$ и отношения $A_1$, $A_2$, $A_3$, а именно:

$$\omega_1 = v_1 \frac{\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \quad A_2 = \frac{n_2}{n_1}A_1, \quad A_3 = \frac{n_3}{n_1}A_1, \; A_1, \tag{3}$$

$$\omega_2 = v_2 \frac{\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \quad A_3 = -\left(A_1\frac{n_1}{n_3} + A_2\frac{n_2}{n_3}\right), \; A_1, \; A_2.$$

Здесь $\omega_1$ и $v_1$ — угловая частота и скорость продольной упругой волны, $\omega_2$ и $v_2$ — угловая частота и скорость поперечных упругих волн двух поляризаций.

Если бы мы рассмотрели свободные колебания прямоугольного параллелепипеда со сторонами $L_1, L_2, L_3$, то вместо (3) получили бы

$$\omega_1 = v_1\pi\sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}}. \tag{3'}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (3), считая, что она получена из формулы (3′) при $L_1 \simeq L_2 \simeq L_3$, так что каждой тройке чисел $n_1$, $n_2$, $n_3$, взятых в определенном порядке, соответствует одна частота. Это условие позволит рассматривать все колебания независимыми друг от друга.

Вычислим тензор квадрупольного момента $D_{ij}$ куба, совершающего продольные колебания относительно системы координат, начало которой совпадает с центром куба, а оси параллельны ребрам. Для упрощения вычислений удобно рассматривать тело состоящим из одинаковых частиц с массой $m$, расположенных в узлах кубической решетки. Координаты частицы с индексами $i_1$, $i_2$, $i_3$ ($i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2 \ldots N-1$; $N^3$ — полное число частиц) равны $x = ai_1 + \xi(i_1, i_2, i_3)$, $y = ai_2 + \eta(i_1, i_2, i_3)$, $z =$

$= ai_3 + \zeta(i_1, i_2, i_3)$, где $a$ — постоянная решетки. В развернутом виде, например,

$$x = ai_1 + A_1 \cos \frac{n_1 \pi a i_1}{L} \sin \frac{n_2 \pi a i_2}{L} \sin \frac{n_3 \pi a i_3}{L} \sin \omega t.$$

После довольно простых вычислений находим для

$$D_{ij} = \sum m (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$$

следующие значения:

$$D_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$D_{11} = \frac{mN^3}{8n_1^2} (2n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) A_1^2 \sin^2 \omega t + \text{const},$$

$$D_{22} = \frac{mN^3}{8n_1^2} (2n_2^2 - n_3^2 - n_1^2) A_1^2 \sin^2 \omega t + \text{const}, \tag{4}$$

$$D_{33} = \frac{mN^3}{8n_1^2} (2n_3^2 - n_1^2 - n_2^2) A_1^2 \sin^2 \omega t + \text{const}.$$

Величину $A_1 \sin \omega t = q_\omega$ можно рассматривать как нормальную координату, характеризующую некоторый эквивалентный осциллятор с частотой $\omega$. Мы можем найти массу $m^*$ этого осциллятора из условия равенства энергии колебания тела с данной частотой энергии сопоставленного осциллятора:

$$\frac{m^* \omega^2 A_1^2}{2} = \frac{m}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3} (\dot{\xi}_{\max}^2 + \dot{\eta}_{\max}^2 + \dot{\zeta}_{\max}^2),$$

отсюда

$$m^* = \frac{mN^3}{8n_1^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \tag{5}$$

Согласно [3] вероятность спонтанного гравитационного перехода системы из состояния $n$ в состояние $n'$ при $\lambda \gg L$ ($\lambda$ — длина излучаемой волны) равна

$$P_{n'n} = \frac{2}{45} \frac{\varkappa \omega_p^5}{c^5 \hbar} \sum_{i,j} |D_{ij}|_{n'n}^2, \tag{6}$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная, $\omega_p$ — частота излучаемой волны.

Из (4) видно, что $(D_{ij})_{n'n} \sim (q_\omega^2)_{n'n}$. Как известно, для гармонического осциллятора отличными от нуля являются матричные элементы лишь с $n' = n \pm 2$, так

$$(q_\omega^2)_{n,n+2} = \frac{q_0^2}{2} \sqrt{(n+1)(n+2)}, \tag{7}$$

где $q_0 = \frac{\hbar}{m^* \omega}$.

Тогда вероятность гравитационного перехода осциллятора, характеризующегося индексами $n_1$, $n_2$, $n_3$, с помощью (5) и (7) запишется в виде

$$P\underset{n,\,n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)} = \frac{16\varkappa\omega^3\hbar}{15c^5}\,\frac{(n_1^2-n_2^2)^2+(n_1^2-n_3^2)^2+(n_2^2-n_3^2)^2}{(n_1^2+n_2^2+n_3^2)^2}\,(n+1)\,(n+2).$$

Частота излучаемой волны в два раза выше собственной частоты колебаний осциллятора.

Средняя мощность гравитационного излучения осциллятора, находящегося в термостате, равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\hbar\,\omega P\underset{n,n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)}\,W\underset{n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)},$$

где

$$W\underset{n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)} = \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{KT}\,(n+2)\right]\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{KT}\right)\right]$$

есть вероятность нахождения осциллятора в состоянии $n+2$. Частота $\omega$ продольных волн определяется соотношением (3).

Полная мощность излучения всей системы осцилляторов (системы стоячих волн в кубе):

$$I = \sum_{n_1,n_2,n_3}\sum_{n=0}^{\infty} 2\hbar\omega\,P\underset{n,\,n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)}\,W\underset{n+2}{(n_1,\,n_2,\,n_3)}. \tag{8}$$

Верхний предел первой суммы определяется дебаевской частотой

$$\omega_D = \bar{v}\,(6\pi^2\rho)^{1/3},$$

где $\bar{v} = \left(\dfrac{3v_1^3v_2^3}{2v_1^3+v_2^3}\right)^{1/3}$, $v_1$ — скорость продольной волны, $v_2$ — скорость поперечной волны, $\rho$ — концентрация атомов. Оказывается возможным получить компактные формулы для мощности гравитационного излучения в двух крайних случаях:

$$T \ll T_D \quad \text{и} \quad T \gg T_D$$

$\left(T_D = \dfrac{\hbar\omega_D}{k}\right.$ — характеристическая температура Дебая$\left.\right)$. Они имеют вид

$$I \simeq 4\cdot10^{-37}\,\frac{V}{v_1^3}\,T^7 \ \textit{эрг/сек} \qquad \text{при } T \ll T_D. \tag{9}$$

$$I \simeq 9\cdot10^{-90}\,v_1^2\left(\frac{\bar{v}}{v_1}\right)^5\rho^{5/3}VT^2 \ \textit{эрг/сек} \qquad \text{при } T \gg T_D, \tag{10}$$

где $V$ — объем тела. Мощность излучения, связанная с поперечными волнами, на несколько порядков меньше. Это вполне очевидно: при поперечных колебаниях плотность среды не меняется.

К выражениям (9), (10) мы пришли, рассматривая тело при циклических и смешанных граничных условиях другого вида. Идентичность результатов во всех рассмотренных случаях и линейная зависимость мощности излучения от объема указывают, что тепловое гравитационное излучение определяется объемными эффектами.

Формулы (9) и (10) справедливы при условии $\lambda \gg L$, но их можно применять к телам любых размеров. Реальное тело больших размеров, вследствие рассеяния упругих колебаний друг на друге, на электронах и на дефектах решетки, распадается на совокупность областей, фазы колебаний которых распределены хаотически; так что эти области, как источники излучения, являются независимыми друг от друга. Средний размер такого источника с частотой $\omega$ равен среднему пути свободного пробега $L_\omega$ упругой волны с частотой $\omega$. $L_\omega$ можно определить как произведение скорости волны на время ее затухания $\tau_\omega$ .

Условие $\lambda \gg L$ запишется в виде

$$\frac{\pi c}{\omega v_1 \tau_\omega} \gg 1. \qquad (11)$$

На основании результатов, приведенных в [4. 5], можно убедиться, что при $T \gg T_D$ условие (11) выполняется для коротковолнового участка спектра упругих колебаний, с которыми связана основная часть гравитационного излучения.

Оценим величину теплового гравитационного излучения Земли. Возьмем следующие значения параметров: средняя температура $T = 4 \cdot 10^3$ *град*, средняя скорость продольных волн $v_1 = 10$ *км/сек*, концентрация атомов $\rho = 10^{23}$ *см*$^{-3}$. При этих параметрах $T \gg T_D$, тогда на основании (10) находим $I \simeq 10^{-5}$ *эрг/сек*.

Существует мнение [6], что вещество звезд белых карликов (б к.) находится в твердом состоянии. Представляет некоторый интерес определить порядок величины гравитационного излучения б к. Используем следующие значения параметров [6]: плотность $d = 10^6$ *г/см*$^3$, средний атомный вес $A = 20$, температура $T = 10^7$ *град*, масса $M = 2 \cdot 10^{33}$ *г*. Для грубой оценки скорость $v_1$ можно принять равной $10^7$ *см/сек*, $v_2 \simeq \frac{v_1}{2}$. Порядок $T_D$ оказывается равным $10^6$ *град*. С помощью (10) находим $I \simeq 10^{14}$ *эрг/сек*. Гравитационная светимость на много порядков меньше фотонной светимости и поэтому не может играть существенной роли в процессе эволюции звезд б к. Вклад же, вносимый данным источником в межзвездную плотность гравитационного излучения, еще подлежит выяснению.

В заключение выражаю благодарность профессору Я. П. Терлецкому за постановку темы и большой интерес к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, **41**, 3, 907, 1961.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, § 44. М., ИЛ, 1954.
3. Фейнман Р. Доклад на IV Международной гравитационной конференции в Варшаве, 1962 г. (в печати).
4. Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов, § 88, 94. М., ИЛ, 1963.
5. Кащеев В. Н., Кривоглаз М. А. «Физика твердого тела», **3**, 1535, 1961.
6. Киржниц Д. А. ЖЭТФ, **38**, 2, 503, 1960.

Поступила в редакцию
21. 4 1964 г.

Кафедра
теоретической физики