

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4—1965

УДК 62—501

А. В. БАРАНОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Сложная система рассматривается как совокупность более простых систем (подсистем), связанных между собой посредством дискретных связей. Предлагается общий метод исследования сложной системы по свойствам изолированных подсистем и заданным связям между ними.

Решение многих задач существенно упрощается, если исследование сложной системы удастся свести к изучению свойств подсистем и по их свойствам получить свойства сложной системы в целом. Такой подход для краткости в дальнейшем будем называть «исследованием сложной системы по частям».

Исследование сложных систем по частям является составным элементом многих известных методов: метода возмущений, теории многополюсников, метода динамических жесткостей [1, 2], тензорного метода в электротехнике [3], метода близких систем [4] и др. Однако применение такого подхода к каждому новому классу задач связано с определенными трудностями, которые в некоторой степени объясняются тем, что недостаточно разработан общий подход к задаче исследования сложных систем по частям.

В последнее время разработке общего подхода к отмеченной задаче в исследовании линейных механических систем с дискретными связями посвятили свои работы в применении к цепным системам Дондошанский В. К. [5], к стержневым системам Троицкий В. А. [6], к системам более широкого класса А. Окумура [7].

Эта статья посвящена развитию указанных работ в применении к системам различной физической природы (механические, электрические, тепловые и т. д.) с произвольной структурой связей. Результаты данной работы могут оказаться полезными в разработке общего подхода к задаче исследования по частям не только линейных систем с постоянными параметрами, но и линейных систем с переменными параметрами, довольно широкого класса нелинейных систем и систем с распределенными связями.

§ 1. Определения

Пусть поведение некоторой системы описывается изменением величин $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, которые мы можем непосредственно только измерять, интерпретируем эти величины как координаты вектора $\bar{Q}$. Число n может

быть конечным и для распределенных систем, а также меньше числа степеней свободы системы. Изменение же координат вектора $\bar{Q}$ или закона их изменения может быть произведено только путем изменения некоторых других величин $F_1, F_2, \dots, F_m$, которые в допустимой области мы можем менять по заданному закону, интерпретируем эти величины как координаты вектора *внешнего воздействия* $\bar{F}$.

Предположим, что, независимо от предыдущего поведения системы, можно выбрать $\bar{F}(t)$ таким образом, что, начиная с некоторого момента времени, между векторами $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ устанавливается однозначное соответствие. Такое соответствие может установиться, например, начиная с того момента, когда система приведена в равновесие. Системы, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем *определимыми* в отношении выбранных $\bar{F}$ и $\bar{Q}$. В дальнейшем рассматриваем только определимые системы.

Для определимых систем можно указать такой алгоритм их исследования, в результате которого можно получить уравнения связи между изображениями векторов $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ в виде

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} q_s(\lambda) = f_r(\lambda), \quad (r = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

где λ — комплексная переменная, q_s и f_r — изображения функций $Q_s(t)$ и $F_r(t)$ соответственно. В уравнениях (1) начальные условия приняты нулевыми. Если требуется решить задачу с ненулевыми начальными условиями, то следует условно перенести начальный момент времени и выбрать на этом добавочном промежутке времени $[t_1, t_0]$ внешнее воздействие так, чтобы при нулевых начальных условиях в момент t_1 к начальному моменту времени t_0 система пришла в заданные начальные условия.

Если исследуемый объект описывается системой дифференциальных уравнений, то уравнения (1) могут быть получены непосредственно переходом от функций времени к их изображениям. Переход к изображениям в уравнениях с переменными коэффициентами в нелинейных уравнениях и в уравнениях с запаздыванием требует удачного выбора вида преобразования и использования разработанного аппарата операционного исчисления и интегральных преобразований [8]. В общем случае в системах с переменными параметрами и нелинейных системах a_{rs} могут быть операторами от координат вектора $\bar{q}$. В частном случае в линейных системах с постоянными параметрами a_{rs} есть функции только λ .

Перепишем систему уравнений (1) в матричной форме:

$$A\bar{q} = \bar{f}. \quad (2)$$

Элементы матрицы A назовем *динамическими коэффициентами действия* (ДКД). Если для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} (для этого, в частности, необходимо $m=n$), то (2) можно записать в обращенной форме

$$\bar{q} = A^{-1}\bar{f} = \Phi\bar{f}. \quad (3)$$

Элементы матрицы Φ обозначим через φ_{sr} и назовем их *динамическими коэффициентами влияния* (ДКВ). Из формулы (3) легко выяснить смысл введенных ДКВ. Если к системе приложено только одно внешнее воздействие f_r , то s -тая координата вектора $\bar{q}$ вычисляется по формуле

$$q_s = \varphi_{sr} f_r.$$

Таким образом, φ_{sr} характеризует влияние r -той составляющей вектора $\bar{q}$.

ДКВ вычисляются по известной формуле

$$\varphi_{sr} = (-1)^{r+s} \frac{\Delta_s^r}{\Delta}, \quad (4)$$

где Δ — определитель матрицы A , верхние и нижние индексы у знака Δ показывают номера вычеркнутых у матрицы A строк и столбцов соответственно.

Везде далее будем иметь в виду линейные системы, хотя большинство формул остаются справедливыми и для достаточно широкого класса нелинейных систем, с тем только отличием, что ДКД и ДКВ в этих случаях будут зависеть от $\bar{q}$.

Знание ДКВ системы позволяет сравнительно легко исследовать как вынужденное, так и собственное поведение системы. Вынужденное поведение описывается формулой (3). Собственные числа λ_j определяются из условий

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \varphi_{sr}(\lambda) \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{\varphi_{sr}(\lambda_j)} = 0. \quad (5)$$

Собственные формы могут быть вычислены по формуле

$$q_s^0 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \frac{\varphi_{sr}(\lambda)}{\varphi_{ss}(\lambda)} q_r^0. \quad (6)$$

В дальнейшем потребуются некоторые обобщения введенных понятий. Если координаты векторов $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ разбить на группы, то уравнения (2) и (3) могут быть записаны в следующей форме:

$$\sum_{\sigma} A_{\rho\sigma} \bar{q}_{\sigma} = \bar{f}_{\rho}; \quad \sum_{\rho} \Phi_{\sigma\rho} \bar{f}_{\rho} = \bar{q}_{\sigma},$$

где ρ, σ — номера групп координат векторов $\bar{F}$ и $\bar{Q}$; $A_{\rho\sigma}, \Phi_{\sigma\rho}$ — блоки матриц A и Φ соответственно. Эти блоки будем называть обобщенными ДКД и ДКВ.

§ 2. Связанные системы

Общая матрица ДКД совокупности изолированных подсистем $A, B, \dots, H$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \boxed{A} & & & \\ & \boxed{B} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{H} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

т. е. все ненулевые элементы матрицы расположены в диагональных блоках, представляющих собой матрицы ДКД соответствующих подсистем. Если связывать подсистемы друг с другом, например B и H , то появятся ненулевые элементы в блоках, которые образуются пересечением границ блоков B и H . В самом общем случае установление связи приводит к изменению исходной матрицы (7). В простейшем случае может измениться только один элемент.

Если при установлении связи изменяется только один элемент исходной матрицы ДКД, то такую связь будем называть *элементарной*, а разность между соответствующими элементами матриц исходной и связанной систем *коэффициентом связи*.

В прикладных задачах часто встречается еще один тип связи, установление которой приводит к следующему изменению исходной матрицы. Вместо двух строк, например l -той и m -той и двух столбцов, например i -того и k -того, получаем одну строку и один столбец, которые представляют собой сумму указанных строк и столбцов соответственно. Такую связь будем называть *усекающей*, а систему с этой связью — *усеченной*.

Введенные понятия элементарной и усекающей связей определены выше математически через изменение матрицы ДКД исходной системы. Нетрудно выяснить физический смысл этих понятий. По определению векторов $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ наложение связей физически может означать лишь добавление к внешним воздействиям дополнительных воздействий от связей. Эти дополнительные воздействия должны выражаться через координаты вектора $\bar{Q}$. В простейшем случае, если связь осуществляется через линейный элемент, дополнительное воздействие получим в виде

$$F'_k = C_{ki} Q_i. \quad (8)$$

Почти очевидно, что введение дополнительного воздействия (8) эквивалентно установлению одной элементарной связи. Примером установления элементарной связи может служить соединение одного из выходов электронной системы через усилитель с одним из входов этой системы.

Если в исходной системе установить четыре элементарных связи с коэффициентами связи $C_{li} = C_{mk} = \kappa$, $C_{lk} = C_{mi} = -\kappa$, то дополнительные воздействия от связей получим в виде

$$\bar{F}'_l = \kappa (Q_i - Q_k), \quad \bar{F}'_m = -\kappa (Q_i - Q_k). \quad (9)$$

Осуществляя предельный переход при $\kappa \rightarrow \infty$, в предельном случае получим усекающую связь, которая физически будет означать выполнение условия $Q_i = Q_k$. При этом из (9) видно, что дополнительные воздействия от усекающей связи равны по величине и противоположны по знаку: $F'_l = -F'_m$. Примером усекающей связи в механической системе будет жесткая связь двух точек безынерционным стержнем, если в качестве координат вектора $\bar{Q}$ выбраны смещения, а вектора $\bar{F}$ — силы.

Широкий класс сложных систем может быть приведен к совокупности изолированных более простых систем (подсистем), между которыми установлены элементарные и усекающие связи. Этот класс систем будем называть связанными системами с дискретными связями. Совокупность элементарных и усекающих связей назовем *структурой связей*. Сложные системы, в которых любые две подсистемы соединены непосредственно только одной элементарной или усекающей связью, назовем *односвязными*, все остальные — *многосвязными*.

Рассмотрим вопрос о соотношении принятых в механике и введенных понятий связи. В общем виде удерживающие связи в механике записываются в виде

$$\varphi(\bar{Q}, \dot{\bar{Q}}, t) = 0. \quad (10)$$

После перехода в этом уравнении от функций времени к их изображениям получим

$$\chi(\lambda, \bar{q}) = 0.$$

Если последнее уравнение удастся разрешить относительно какой-либо координаты, например q_i , то, подставляя эту координату в исходную систему уравнений, легко убедиться, что в матрице ДКД связанной системы будет исключен i -тый столбец и одна из строк; изменится и часть элементов исходной матрицы. Таким образом, связь вида (10) может быть сведена к комбинации усекающих и элементарных связей.

Введенные понятия позволяют сформулировать задачу, которая является общей для исследования сложных систем по частям. Для исследования сложной системы, как мы показали, достаточно знать ее ДКВ. Вычисление ДКВ непосредственно по формуле (4), т. е. через ДКД подсистем, при больших n , где n — размерность векторов $\bar{Q}$ и $\bar{F}$, весьма неудобно как для исследований общих свойств системы, так и для вычислений. В ряде задач (синтез сложных систем и т. п.) это выражение практически бесполезно. Оказывается, что существенно более эффективным средством исследования сложной системы является выражение ее ДКВ через ДКВ изолированных подсистем. Это связано с тем, что такое выражение дает явную зависимость свойств сложной системы от свойств подсистем в гибкой, удобной форме, которая позволяет наиболее рационально проводить исследования и резко сократить число необходимых операций в вычислениях.

Приходим к задаче выражения ДКВ сложной системы, с произвольной структурой связей между подсистемами, через ДКВ подсистем. Однако число различных структур связей огромно. Поэтому получать соответствующие формулы для каждой структуры весьма сложно и нерационально. Оказывается, что поставленная задача решается сравнительно просто многократным применением формулы, которая показывает, как преобразуются ДКВ при установлении одной элементарной или усекающей связи. Этим формулам, их следствиям и обобщениям посвящаются следующие параграфы.

§ 3. Основные формулы для элементарных связей

Пусть исходная система описывается матрицей ДКД:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

и для этой матрицы существует обратная матрица $A^{-1} = \Phi$ с элементами ϕ_{sr} . При установлении элементарных связей элементы матрицы A изменяются. Измененные элементы $\tilde{a}_{rs}$ представим в виде

$$\tilde{a}_{rs} = a_{rs} - c_{rs},$$

т. е. для измененной матрицы $\tilde{A}$ имеем выражение

$$\tilde{A} = A - C. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\tilde{\Phi} = \Phi (E - C\Phi)^{-1} = (E - \Phi C)^{-1} \Phi, \quad (13)$$

где E — единичная матрица, $\tilde{\Phi} = \tilde{A}^{-1}$. Эта формула дает явное выражение ДКВ связанной системы через ДКВ исходной системы и матрицу связи C .

Предположим, что часть строк и столбцов в матрице C содержат только нулевые элементы. Обозначим эти строки и столбцы общими индексами η и θ , остальные строки и столбцы — индексами κ и ι . Перестановкой строк и столбцов в матрице A , что будет соответствовать перенумерации координат в векторах $\bar{Q}$ и $\bar{F}$, можно матрицу $\tilde{A}$ преобразовать

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{\kappa\iota} - C_{\kappa\iota} & A_{\kappa\theta} \\ A_{\eta\iota} & A_{\eta\theta} \end{pmatrix},$$

где $A_{\rho\sigma}$ ($\rho = \kappa, \eta$; $\sigma = \iota, \theta$) и $C_{\kappa\iota}$ — блоки из коэффициентов a_{rs} и c_{ki} . Используя метод обращения матрицы путем разбиения ее на блоки и специальную структуру матрицы $\tilde{A}$, в рассматриваемом случае получим формулу

$$\tilde{\Phi}_{\sigma\rho} = \Phi_{\sigma\rho} + \Phi_{\sigma\kappa} (E - C_{\kappa\iota} \Phi_{\iota\kappa})^{-1} C_{\kappa\iota} \Phi_{\iota\rho}, \quad (14)$$

где $\Phi_{\alpha\beta}$ — блоки ДКВ исходной матрицы.

Смысл формулы (14) тот же, что и формулы (13). Однако использование ее существенно более удобно, ибо она полнее раскрывает структуру ДКВ связанной системы и применение ее требует обращения матрицы лишь порядка l , где l — меньший размер матрицы $C_{\kappa\iota}$.

Если устанавливается одна элементарная связь с коэффициентом c_{ki} , то вычисление ДКВ связанной системы по формуле (14) вообще не требует обращения матрицы. Из (14) в этом случае получаем

$$\tilde{\varphi}_{sr} = \varphi_{sr} + \frac{\varphi_{sk} c_{ki} \varphi_{ir}}{1 - c_{ki} \varphi_{ik}}. \quad (15)$$

Формулы (14), (15) позволяют выразить ДКВ сложной системы с произвольной структурой элементарных связей через ДКВ изолированных подсистем. Устранением связей приводим сложную систему к совокупности изолированных подсистем, для которых существуют ДКВ. Восстанавливая часть связей и применяя формулу (14) или (если восстанавливаем одну связь) формулу (15), выразим ДКВ некоторой промежуточной системы через ДКВ изолированных подсистем. Продолжая восстанавливать связи, мы будем выражать ДКВ все более сложных промежуточных систем через ДКВ изолированных подсистем. Восстановив все связи, получим искомое выражение для ДКВ всей сложной системы. Такой прием назовем методом сечений. Окончательное выражение получается удобным, если на каждом этапе восстанавливать все связи, которые существуют в исходной сложной системе между двумя какими-либо подсистемами. Порядок, в котором восстанавливаются связи, в зависимости от задачи может быть выбран так, чтобы окончательные выражения были наиболее удобны для решения той или иной задачи.

По ДКВ сложной системы $\tilde{\varphi}_{sr}$ легко исследуется ее вынужденное поведение (3)

$$q_s = \sum_{r=1}^n \tilde{\varphi}_{sr} f_r.$$

Для исследования собственного поведения нет необходимости вычислять $\tilde{\varphi}_{sr}$, поскольку при собственных значениях λ ДКВ обращаются в бесконечность (5). Поэтому удобнее в исследовании собственного поведения использовать ДКВ системы без одного пучка элементарных

связей. Этот пучок связей будем обозначать через C , а ДКВ системы без пучка связей C будем отмечать сверху индексом $*$. Пусть C_{ki} — матрица коэффициентов связи пучка C . Собственные значения полной системы согласно (5) и (15) удовлетворяют уравнению

$$|E - C_{ki}\Phi_{ik}^*| = 0.$$

Здесь и везде далее прямые скобки означают знак определителя.

Через Φ_{sr}^* удобно исследовать и собственные формы. Сделаем это для случая, когда в пучке C имеется только одна связь с коэффициентом c_{ki} . Тогда собственные значения вычисляются из уравнения

$$1 - c_{ki}\Phi_{ik}^* = 0. \quad (16)$$

Подставляя в (6) $\tilde{\varphi}_{sr}$, выраженные через φ_{sr}^* по формуле (15), и учитывая, что при собственных значениях λ_j выполнено (16), получим для j -той собственной формы

$$q_s^0 = \frac{\varphi_{sk}^*(\lambda_j)}{\varphi_{rk}^*(\lambda_j)} q_r^0. \quad (17)$$

Несколько неожиданный результат. Собственные формы не зависят непосредственно ни от номера i , ни от величины c_{ki} , а определяются только λ_j ; т. е. если произвольно изменить номер i и c_{ki} , так что некоторое собственное значение λ_j не изменит своей величины, то и соответствующая собственная форма не изменится.

§ 4. Основные формулы для усекающих связей

Рассмотрим случай, когда в исходной системе с матрицей (11) устанавливается N усекающих связей. Систему, которая при этом образуется, и соответствующую ей матрицу назовем усеченными. Пусть N столбцов усеченной матрицы образуются попарным сложением столбцов с номерами: i_1 и k_1 , i_2 и k_2 , ..., i_N и k_N , N строк — попарным сложением строк с номерами: l_1 и m_1 , l_2 и m_2 , ..., l_N и m_N . Можно показать, что если в исходной системе установить $4N$ элементарных связей вида

$$\begin{aligned} c_{l_p i_p} &= c_{m_p k_p} = \kappa, \\ c_{m_p i_p} &= c_{l_p k_p} = -\kappa \end{aligned} \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

и осуществить предельный переход при $\kappa \rightarrow \infty$, то в пределе эта связанная система перейдет в усеченную систему с N — усекающими связями. Это эквивалентно установлению равенства

$$Q_{i_p} = Q_{k_p}$$

при условии, что дополнительные воздействия F'_{i_p} и F'_{m_p} складываются с внешними воздействиями F_{l_p} , F_{m_p} равны и противоположны по знаку

$$F'_{i_p} = -F'_{m_p}.$$

Подставляя (18) в формулу (14) и переходя к пределу при $\kappa \rightarrow \infty$, при этом необходимо раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, получим выражение ДКВ усеченной системы через ДКВ исходной системы

$$\tilde{\Phi}_{\sigma\rho} = \Phi_{\sigma\rho} - (\Phi_{\sigma\mu} - \Phi_{\sigma\lambda})(\Phi_{i\lambda} + \Phi_{\kappa\mu} - \Phi_{\kappa\lambda} - \Phi_{i\mu})^{-1}(\Phi_{\kappa\rho} - \Phi_{i\rho}), \quad (19)$$

где $\Phi_{\delta\gamma}(\delta, \gamma = i, \kappa, \lambda, \mu)$ имеют тот же смысл, что и в формуле (14). При этом

$$\Phi_{\delta\gamma} = \begin{pmatrix} \Phi_{\delta_1\gamma_1} \Phi_{\delta_1\gamma_2} \dots \Phi_{\delta_1\gamma_N} \\ \Phi_{\delta_2\gamma_1} \Phi_{\delta_2\gamma_2} \dots \Phi_{\delta_2\gamma_N} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Phi_{\delta_N\gamma_1} \Phi_{\delta_N\gamma_2} \dots \Phi_{\delta_N\gamma_N} \end{pmatrix}.$$

Для случая одной усекающей связи $N=1$ имеем

$$\tilde{\Phi}_{sr} = \Phi_{sr} - \frac{(\Phi_{sm} - \Phi_{sl})(\Phi_{kr} - \Phi_{ir})}{\Phi_{il} + \Phi_{km} - \Phi_{im} - \Phi_{kl}}. \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) позволяют решать задачу выражения ДКВ сложной системы с произвольной структурой усекающих связей, через ДКВ изолированных подсистем. Все замечания, которые были сделаны относительно применения формул (14) и (15), автоматически распространяются на формулы (19), (20). В частности, собственное поведение удобно исследовать через ДКВ системы без пучка усекающих связей. Если ДКВ системы без этого пучка обозначать через $\Phi_{\sigma\rho}^*$, то согласно (5) и (19) собственные значения должны удовлетворять уравнению

$$|\Phi_{i\lambda}^* + \Phi_{\kappa\mu}^* - \Phi_{\kappa\lambda}^* - \Phi_{i\mu}^*| = 0. \quad (21)$$

Через $\Phi_{\sigma\rho}^*$ может быть написана и формула для собственных форм. Сделаем это для случая, когда в указанном пучке имеется только одна усекающая связь. Тогда собственные числа найдутся из уравнения

$$\Phi_{il}^* + \Phi_{km}^* - \Phi_{im}^* - \Phi_{kl}^* = 0. \quad (22)$$

Аналогично тому, как была получена формула (17), нетрудно получить выражение для собственных форм системы через ДКВ системы без одной усекающей связи — Φ_{sr}^* . Подставляя (20) в (6) и учитывая, что при собственных значениях λ_j выполнено (22), получим

$$q_s^0 = \frac{\Phi_{sm}^*(\lambda_j) - \Phi_{sl}^*(\lambda_j)}{\Phi_{rm}^*(\lambda_j) - \Phi_{rl}^*(\lambda_j)} q_r^0.$$

Из этой формулы следует, что собственные формы не зависят непосредственно от номеров координат, между которыми устанавливается равенство посредством усекающей связи, а определяется величиной собственного значения λ_j и номерами координат вектора воздействия, к которым приложены дополнительные воздействия от усекающих связей.

§ 5. Пример применения элементов теории связанных систем

Пусть исследуются свойства сложной системы, состоящей из подсистем A, B, D, H, T , каждая из которых соединена с соседними подсистемами несколькими усекающими связями. Для простоты будем считать, что номера связываемых координат совпадают с номерами координат вектора внешнего воздействия, к которым приложены дополнительные воздействия от усекающих связей, т. е. считаем, что в формуле (19) $\mu = \kappa, \lambda = i$. Примем следующую систему нумерации координат. Все координаты подсистем B, D, H, T , связываемые с левой соседней подсистемой, будем обозначать соответствующими латинскими

буквами, b, d, h, t . Все координаты подсистем A, B, D, H , связываемые с правой соседней подсистемой, будем обозначать соответствующими греческими буквами $\alpha, \beta, \delta, \eta$. Несвязываемые координаты в подсистемах A и T обозначим a и t соответственно.

Выразим, например, ДКВ — $\tilde{\Phi}_{aa}$ рассматриваемой сложной системы через ДКВ изолированных подсистем A, B, D, H, T . Для этого устраним все усекающие связи между подсистемами, тогда имеем совокупность изолированных подсистем. Восстанавливаем связи между подсистемами H и T , тогда, полагая в формуле (19) $\rho = \sigma = h, \lambda = i = \eta, \mu = \kappa = t$, получим

$$\tilde{\Phi}_{hh} = \Phi_{hh} - \Phi_{h\eta}(\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt})^{-1} \Phi_{\eta h}. \quad (23)$$

Следуя В. К. Дондошанскому, введем обозначение

$$AB^{-1}C = \frac{A \wedge C}{B}.$$

Тогда (23) можно переписать в виде

$$\tilde{\Phi}_{hh} = \Phi_{hh} - \frac{\Phi_{h\eta} \wedge \Phi_{\eta h}}{\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt}}, \quad (24)$$

т. е. мы выразили ДКВ связанной системы, состоящей из двух подсистем H и T , через ДКВ изолированных подсистем H и T .

На следующем этапе восстанавливаем все связи между подсистемами D и H и совершенно аналогично получаем

$$\tilde{\Phi}_{dd} = \Phi_{dd} - \frac{\Phi_{d\delta} \wedge \Phi_{\delta d}}{\Phi_{\delta\delta} + \tilde{\Phi}_{hh}}. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (25), имеем

$$\tilde{\Phi}_{dd} = \Phi_{dd} - \frac{\Phi_{d\delta} \wedge \Phi_{\delta d}}{\Phi_{\delta\delta} + \Phi_{hh} - \frac{\Phi_{h\eta} \wedge \Phi_{\eta h}}{\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt}}}.$$

Таким образом, ДКВ связанной системы, состоящей из подсистем D, H, T , выражены через ДКВ изолированных подсистем D, H, T .

Продолжая подстановку, убеждаемся, что справедлива следующая формула:

$$\tilde{\Phi}_{aa} = \Phi_{aa} - \frac{\Phi_{a\alpha} \wedge \Phi_{\alpha a}}{\Phi_{\alpha\alpha} + \Phi_{bb} - \dots - \frac{\Phi_{h\eta} \wedge \Phi_{\eta h}}{\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt}}}. \quad (26)$$

Эта формула выражает ДКВ с одинаковыми индексами сложной системы через ДКВ изолированных подсистем. Аналогично может быть получена формула для ДКВ с разными индексами.

$$\tilde{\Phi}_{\alpha\tau} = \frac{\Phi_{\alpha\alpha} \wedge \frac{\Phi_{b\beta} \wedge \frac{\Phi_{d\delta} \wedge \frac{\Phi_{h\eta} \wedge \Phi_{\eta\tau}}{\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt}}}{\Phi_{\delta\delta} + \tilde{\Phi}_{hh}}}{\Phi_{\alpha\alpha} + \tilde{\Phi}_{bb}}.$$

Входящие в эту формулу ДКВ $\tilde{\Phi}_{bb}$, $\tilde{\Phi}_{dd}$, $\tilde{\Phi}_{hh}$ представляют собой ДКВ связанных систем, состоящих из подсистем B, D, H, T ; D, H, T ; H, T — соответственно. Они могут быть выражены через ДКВ изолированных подсистем по формуле (26).

Из (26) и (5) следует, что собственные частоты рассматриваемой системы должны удовлетворять уравнению

$$\left| \Phi_{aa} + \Phi_{bb} - \frac{\Phi_{b\beta} \wedge \Phi_{\beta b}}{\Phi_{\beta\beta} + \Phi_{dd}} - \dots - \frac{\Phi_{h\eta} \wedge \Phi_{\eta h}}{\Phi_{\eta\eta} + \Phi_{tt}} \right| = 0. \quad (27)$$

Формулы (26) — (27), несмотря на свою громоздкость, существенно более удобны в приложениях, чем обычные формулы обращения матриц и вычисления определителей. Это связано отчасти с тем, что наибольший порядок матриц, которые необходимо обращать при использовании указанных формул в сложных системах, во много раз меньше порядка матрицы ДКД полной системы. Так, если все изолированные подсистемы описываются матрицами ДКД одинакового порядка и число подсистем K , то число необходимых операций при использовании, например, формулы (27) и K^2 раз меньше, чем в обычных способах, даже в случае применения в них самых совершенных методов вычисления определителей, требующих для вычисления одного определителя $\frac{1}{3} m^3$ операций, где m — порядок определителя.

Другое важное преимущество полученных формул связано с тем, что они дают явное выражение свойств сложной системы через свойства изолированных подсистем. Это преимущество особенно ярко проявляется в тех случаях, когда необходимо исследовать изменение свойств системы при изменении свойств ее отдельных подсистем.

Пусть необходимо исследовать изменение собственных частот рассматриваемой в этом пункте системы, состоящей из подсистем A, B, D, H, T , при изменении свойств подсистемы D . Записываем уравнение для собственных частот через ДКВ системы без связей между подсистемами B и D , эти ДКВ будем отмечать верхним индексом *. Из формулы (21) имеем

$$|\Phi_{\beta\beta}^* + \Phi_{dd}^*| = 0. \quad (28)$$

Используя формулу (26) и принятые в ней обозначения, получим

$$\Phi_{dd}^* = \tilde{\Phi}_{dd} = \Phi_{dd} - \frac{\Phi_{d\delta} \wedge \Phi_{\delta d}}{\Phi_{\delta\delta} + \tilde{\Phi}_{hh}}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), окончательно имеем

$$\left| \Phi_{\beta\beta}^* + \Phi_{dd} - \frac{\Phi_{d\delta} \wedge \Phi_{\delta d}}{\Phi_{\delta\delta} + \tilde{\Phi}_{hh}} \right| = 0. \quad (30)$$

Это уравнение в явной форме включает в себя свойства подсистемы D — Φ_{dd} , $\Phi_{\delta\delta}$, $\Phi_{d\delta}$, $\Phi_{\delta d}$. Свойства всех остальных подсистем входят в $\Phi_{\beta\beta}^*$ и $\tilde{\Phi}_{hh}$. По сравнению с прямым вычислением определителя матрицы ДКД полной системы формула (30) существенно удобнее как в общих исследованиях, так и в вычислениях.

Действительно, если порядок матрицы ДКД подсистемы D существенно меньше порядка матрицы ДКД полной системы, то основной объем расчетов по формуле (30) связан с вычислением $\Phi_{\beta\beta}^*$ и $\tilde{\Phi}_{hh}$. Но при изменении свойств подсистемы D указанные ДКВ не меняются. Таким

образом, при каждом новом значении параметров подсистемы D требуется повторение сравнительно небольшой части полного расчета, только той части, которая связана с изменением Φ_{dd} , $\Phi_{d\delta}$, $\Phi_{\delta d}$, $\Phi_{\delta\delta}$.

Выводы

Свойства сложных систем описываются через динамические коэффициенты влияния (ДКВ). Дается единый алгоритм для выражения ДКВ сложных систем через ДКВ подсистем при произвольной структуре связей между ними.

Предлагаемый метод позволяет рационализировать соответствующие исследования и вычисления. Метод позволяет получить явную зависимость свойств сложной системы от свойств ее изолированных подсистем и поэтому исследование сложной системы можно проводить последовательными этапами. Сначала исследуются свойства подсистем, а затем по этим свойствам исследуются свойства все более сложных систем. Для рационализации вычислений можно использовать ряд замечательных свойств цепных дробей, в форме которых получаются соответствующие выражения.

Метод оказывается особенно эффективным в задачах, где требуется исследовать зависимость свойств сложной системы от изменения некоторых ее параметров, поскольку получается явная зависимость их от нужных параметров. Это позволяет при каждом новом значении изменяемых параметров повторять сравнительно небольшую часть полного расчета, который требуется при обычных методах.

Рассмотренный в статье метод в силу его алгоритмичности может быть использован в разработке эффективных программ для ЦВМ, а также для расширения возможностей моделирующих устройств [9].

С некоторыми ограничениями метод сечений может быть применен к системам с переменными параметрами и к достаточно широкому классу нелинейных систем. При этом получаются удобные выражения для итераций.

Полученные результаты могут быть обобщены на случай распределенных связей, т. е. на случай, когда внешнее воздействие на систему и взаимодействие подсистем осуществляется не в отдельных точках, а по контуру, поверхности и т. п. Этим вопросам посвящается следующая статья.

Автор выражает благодарность профессору С. П. Стрелкову за обсуждение основных результатов этой статьи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф. М. Динамика и прочность коленчатых валов. Сб. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Bishop R. E. D., Johnson D. S. Cambridge Univ. Press., 1960.
3. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. М., Госэнергоиздат, 1955.
4. Турбович И. Г. Метод близких систем и его применение для создания инженерных методов расчета линейных и нелинейных радиотехнических систем. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Дондошанский В. К. Тр. ЦНИИ им. А. Н. Крылова, вып. 137, 1959.
6. Троицкий В. А. Инф. бюл. ЛПИИ им. М. И. Калинина, № 5, 1957.
7. Okuma A. Mem. school Sci and Engng No 21, 1957.
8. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
9. Баранов А. В., Орданович А. Е. Доклад на IV Межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники. Сб. № 3. М., Изд-во МЭИ, 1963.

Поступила в редакцию
21. 4 1964 г.

Кафедра
общей физики
для мехмата