ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1965

УДК 531.15.001

Б. И. МОРГУНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрены с помощью асимптотических методов, основанных на усреднении, вращательные режимы некоторых нелинейных систем с одной степенью свободы, коэффициенты которых зависят от n параметров, изменяющихся по произвольному закону. Получены удобные расчетные формулы второго приближения по степеням малого параметра, не требующие для применения предварительного решения вырожденной системы.

§ 1. Постановка задачи

В работе [1] рассматривалась асимптотика вращательных движений с одной степенью свободы, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}[m(x)\dot{y}]+Q(x, y)=\varepsilon f(x, y, \dot{y}, \varepsilon),\\ \dot{x}=\varepsilon X(x, y, \dot{y}, \varepsilon).\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь y — одномерная координата, $\dot{y}$ — скорость, $m(x)$ — масса, $x=\{x_1,\ldots, x_n\}$ — совокупность n параметров, $Q(x, y)=\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$ — потенциальная сила, вызывающая вращение (V — потенциал) εf, εX — малые нелинейные возмущения, ε — малый положительный параметр. Вращательные режимы некоторых систем, являющихся частными случаями (1), исследовались в [2—3]. В [1] получены уравнения, описывающие в первом приближении по степеням параметра ε изменение энергии вращения и параметров x. Наша задача заключается в выводе уравнений второго приближения для энергии вращения и параметров x, нахождении фазы и периода вращения, а также в выводе формул первого приближения для координаты y и скорости $\dot{y}$. Отметим, что аналогичные задачи для частного случая системы (1), когда единственным медленно изменяющимся параметром x является «медленное время» $\tau=\varepsilon t$, рассматривались в [4—5].

§ 2. Уравнения второго приближения для медленных параметров

С помощью интегралов невозмущенной системы (системы, в которую переходит (1) при $\varepsilon=0$) можно перейти в системе (1) от переменных y, $\dot{y}$ и x к новым переменным E, ψ и x, где E — энергия вращения,

ψ — фаза вращения. Примеры подобных преобразований можно найти в [1, 4, 5, 7, 8]. Тогда система (1) перепишется в следующем виде:

$$\dot{E} = \varepsilon G_1(E, x, y) + \varepsilon^2 G_2(E, x, y),$$

$$\dot{x} = \varepsilon X_1\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right) + \varepsilon^2 X_2\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right), \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = \omega(E, x) + \varepsilon\Psi(E, x, y),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — частота вращения, $T = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}$ — период вращения,

$$G_1 = \frac{1}{m}\left(-E\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial mV}{\partial x}\right) X_1\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right) +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\, f_1\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right),$$

$$G_2 = \frac{1}{m}\left(-E\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial mV}{\partial x}\right) X_2\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right) +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\, f_2\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right),$$

$$\Psi = \frac{2\pi}{T} F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right] X_1\left(x, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right) -$$
$$- \frac{2\pi}{mT} F\left[\frac{1}{\frac{2}{m}(E-V)}\right] G_1(E, x, y).$$

Здесь введены обозначения:

$$F[\varphi] = \int\limits_0^y \frac{\varphi\, dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} - \frac{1}{T}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi\, dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}},$$

$$f(x, y, \dot{y}, \varepsilon) = f_1(x, y, \dot{y}) + \varepsilon f_2(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$X(x, y, \dot{y}, \varepsilon) = X_1(x, y, \dot{y}) + \varepsilon X_2(x, y, \dot{y}) + \varepsilon^2 \ldots$$

Кроме того, предполагается, что $y(t_0) = 0$ (это предположение не нарушает общности ввиду того, что система (1) близка к автономной).

Система (2) принадлежит к виду систем с быстро вращающейся фазой, для которых в [6]—[8] разработана методика асимптотического исследования, основанная на методе усреднения. Усредняя правые части (2) по быстрым переменным, получим следующие уравнения второго приближения для энергии вращения E и параметров x:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\varepsilon}{T}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\varepsilon^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{G_2\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\right.$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[G_1]\frac{\partial G_1}{\partial E}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[X_1]\frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[G_1]\,F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\frac{\partial G_1}{\partial y}\,dy-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[X_1]\,F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{\partial G_1}{\partial y}\,dy-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\partial G_1}{\partial E}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{G_1}{2(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}G_1F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\partial G_1}{\partial x}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dg}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[G_1\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}G_1F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\partial G_1}{\partial y}\left\{F\left[X_1F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\right]-F\left[G_1F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{mT}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}F[F[G_1]]-$$

$$\left.-\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}\,dy\,F[F[X_1]]\right\}dy\Bigg\}, \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\varepsilon}{T}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\varepsilon^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{X_2\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\right.$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[G_1]\frac{\partial X_1}{\partial E}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[X_1]\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[G_1]F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\frac{\partial X_1}{\partial y}\,dy-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}F[X_1]F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{\partial X_1}{\partial y}\,dy-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\partial X_1}{\partial E}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{X_1}{2(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{G_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}X_1F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\partial X_1}{\partial x}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}-$$

$$-\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}F\left[X_1\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{X_1\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}\int_0^{2\pi}X_1F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\partial X_1}{dy}\left\{F\left[X_1F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\right]-\right.$$

$$-F\left[G_1F\left[\frac{1}{2(E-V)}\right]\right]+\frac{1}{mT}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}F\left[F\left[G_1\right]\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}dyF\left[F\left[X_1\right]\right]\right\}dy\Bigg\}. \tag{4}$$

В функциях, стоящих в правых частях (3) и (4), переменную $\dot{y}$ нужно заменить на $\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}$. Уравнения (3) и (4) содержат только коэффициенты исходной системы уравнений (1).

§ 3. Интегрирование уравнений второго приближения. Вычисление поправок

Как показано в [7], интегрирование системы уравнений второго приближения (3), (4) сводится к интегрированию системы линейных уравнений, если известно решение уравнений первого приближения (см. [1]). Представим энергию вращения E и параметры x во втором приближении в следующем виде:

$$E=E_1+\varepsilon E_2,\quad x=x_1+\varepsilon x_2. \tag{5}$$

В (5) E_1, x_1 — решение уравнений первого приближения, которое мы предполагаем известным, εE_2, εx_2 — поправки второго порядка. Подставляя (5) в уравнения (3), (4), получим для E_2 и x_2 следующую линейную систему:

$$\frac{dE_2}{dt} = \varepsilon\,[A_1(E_1, x_1)\,E_2 + A_2(E_1, x_1)\,x_2 + A_3(E_1, x_1)],$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon\,[B_1(E_1, x_1)\,E_2 + B_2(E_1, x_1)\,x_2 + B_3(E_1, x_1)], \tag{6}$$

где A_3—члены порядка ε^2 из правой части (3), B_3—члены порядка ε^2 из правой части (4),

$$A_1 = \frac{1}{mT^2}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{G_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} + \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial G_1}{\partial E}dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} - {}$$
$$- \frac{1}{mT}\int_0^{2\pi}\frac{G_1 dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}},$$

$$B_1 = \frac{1}{mT^2}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{X_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} + \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial X_1}{\partial E}dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} - {}$$
$$- \frac{1}{mT}\int_0^{2\pi}\frac{X_1 dy}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}},$$

$$A_2 = -\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}dy\int_0^{2\pi}\frac{G_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} + {}$$
$$+ \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial G_1}{\partial x}dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} + \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}G_1 dy,$$

$$B_2 = -\frac{1}{T^2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}dy\int_0^{2\pi}\frac{X_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}} + {}$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\partial X_1}{\partial x}\,dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}+\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E-V)\right)^{3/2}}X_1dy.$$

Система (6) интегрируется в квадратурах, если известно общее решение уравнений первого приближения. Проинтегрировав (6), мы найдем поправки второго порядка, описывающие лишь медленное, плавное изменение энергии вращения и параметров x. Для того чтобы учесть не только медленные, но и быстрые изменения энергии и параметров (изменения за время порядка T, где T — период вращения), необходимо вычислить поправки, описывающие эти быстрые изменения, которые имеют следующий вид:

$$E=E_1+\varepsilon E_2+\varepsilon F[G_1],\quad x=x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon F[X_1]. \tag{7}$$

Для сохранения требуемой точности в (7) нужно подставить первое приближение координаты y, которое будет найдено ниже.

§ 4. Вычисление фазы и периода вращения

Уравнение для определения в первом приближении фазы возмущенного движения получается усреднением последнего уравнения (2) в смысле [6]—[8]. В результате получаем

$$\dot{\psi}=\omega(E,x)+\varepsilon\frac{2\pi}{T^2}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\frac{E}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\times$$

$$\times\frac{X_1\left(x,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}dy-\varepsilon\frac{2\pi}{mT^2}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{1}{\frac{2}{m}(E-V)}\right]\frac{G_1dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V)}}. \tag{8}$$

Уравнение (8) интегрируется в квадратурах, если известны энергия и параметры x во втором приближении (5). Подставляя (5) в (8), получим

$$\dot{\psi}=\omega(E_1,x_1)+\varepsilon\left\{\frac{2\pi}{T_1^2}\int_0^{2\pi}F\left[\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{X_1\left(x,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}}dy-\frac{2\pi}{mT_1^2}\times$$

$$\times \int_0^{2\pi} F\left[\frac{1}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\frac{G_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}}+\frac{2\pi E_2}{mT_1^2}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{2\pi x_2}{T_1^2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}}dy\Bigg\}. \qquad (9)$$

В уравнении (9) T_1 — период вращения в первом приближении:

$$T_1=\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m(x_1)}(E_1-V(x_1,\,y))}}. \qquad (10)$$

Знание уравнения (9) для фазы вращения позволяет найти второе приближение периода возмущенного движения $T=T_1+\varepsilon T_2$, где T_1 определяется (10), εT_2 — поправка второго порядка вида:

$$T_2=-\int_0^{2\pi} F\left[\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\frac{X_1\left(x,y,\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}}dy-$$

$$-\frac{E_2}{m}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{1}{m}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{1}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\frac{G_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}}+x_2\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}}dy.$$

Нетрудно показать, что $T=T_1+\varepsilon T_2$ действительно представляет собой период вращения во втором приближении в следующем смысле: если $\overline{t}$ и $\overline{\overline{t}}$ — два момента времени, такие, что для координаты y в первом приближении выполняется равенство $y(\overline{\overline{t}})-y(\overline{t})=2\pi+O(\varepsilon)$, то $\overline{\overline{t}}-\overline{t}=T=\left(\frac{\overline{t}+\overline{\overline{t}}}{2}\right)+O(\varepsilon^2)$.

§ 5. Асимптотические формулы для координаты и скорости

Знание энергии вращения, параметров x и фазы вращения позволяет найти в первом приближении по степеням ε координату y и скорость $\dot{y}$. Используя интегралы вырожденной системы, получим следующие асимптотические формулы для решения системы (1):

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}} = \frac{T_1}{2\pi}\int_{t_0}^t \Bigg\{ \omega(E_1, x_1) +$$

$$+\varepsilon\frac{2\pi}{T_1^2}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\frac{X_1\left(x_1, y, \sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}}dy -$$

$$-\varepsilon\frac{2\pi}{mT_1^2}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{1}{\frac{2}{m}(E_1-V)}\right]\frac{G_1 dy}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_1-V)}} +$$

$$+\varepsilon\frac{2\pi E_2}{mT_1^2}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}} - \varepsilon\frac{2\pi x_2}{T_1^2}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{E_1}{m^2}\frac{\partial m}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V}{m}\right)}{\left(\frac{2}{m}(E_1-V)\right)^{3/2}}dy\Bigg\}\, dt, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2}m(x_1)\dot{y}^2 + V(x_1, y) = E_1.$$

Отметим, что для вычислений по формулам (11) нет необходимости предварительно решать вырожденную систему, достаточно знания ее интегралов.

§ 6. Физический пример

Рассмотрим математический маятник, подвешенный на пластической нити, длина которой медленно меняется за счет собственной энергии системы. В. М. Волосовым в [7]—[8] исследовались колебательные режимы такого маятника. Первое приближение для вращательного режима вычислено в [1]. Уравнения движения такой системы можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}[x^2\dot{y}] + gx\sin y = 0,$$

$$\dot{x} = \varepsilon\lambda(mg\cos y + mx\dot{y}^2),$$

где x — длина маятника, m — масса маятника, g — ускорение свободного падения, $\varepsilon\lambda$ — малый коэффициент «пластической» деформации нити. Для нахождения зависимости энергии маятника от его длины воспользуемся уравнениями (3), (4). Функции, входящие в (3), (4), в данном случае имеют вид:

$$m(x) = x^2,$$

$$V(x, y) = gx(1-\cos y),$$

$$G_1(E, x, y) = \lambda m \left[-\frac{4E^2}{x^2} + \frac{2gE}{x}(5 - 6\cos y) - \right.$$

$$\left. - 3g^2(2 - 5\cos y + 3\cos^2 y) \right], \qquad (12)$$

$$X_1(E, x, y) = \lambda m \left[\frac{2E}{x} - g(2 - 3\cos y) \right],$$

$$G_2(E, x, y) = 0, \quad X_2(E, x, y) = 0.$$

Ограничиваясь рассмотрением движения с большой начальной энергией, разложим правые части уравнений (3), (4) по степеням $\frac{1}{E}$. Получим, что с точностью до членов порядка $\frac{1}{\sqrt{E}}$ второе приближение для возмущенной энергии и параметра x совпадает по форме с соответствующим выражением первого приближения (см. [1]):

$$E = \frac{x_0^2}{x^2} E_0 + \frac{g}{x^2}(x^3 - x_0^3) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right). \qquad (13)$$

В выражение (13) нужно подставить начальные значения энергии E_0 и длины маятника x_0 во втором приближении.

Для случая, когда длина маятника изменяется за счет внешних сил (маятник Эйнштейна), в [4] получена формула зависимости энергии маятника от длины (формула (15)). Мы видим, что с точностью до членов порядка $\frac{1}{\sqrt{E}}$ зависимость энергии маятника от его длины одинакова. Чтобы получить во втором приближении различие в зависимости энергии от длины, обнаруженное в первом приближении в [1], необходимо вычислять второе приближение с большей точностью (учитывать следующие члены разложения по степеням $\frac{1}{E}$).

В заключение отметим, что развитая методика позволяет вычислять приближения любого порядка, а также рассмотреть случаи, когда возмущения периодически зависят от времени.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. М. Волосову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 151, № 6, 1260—1263, 1963.
2. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 3, № 1, 145—158, 1963.
3. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 3, № 1, 131—144, 1963.
4. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 35—42, 1963.
5. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ. астрон., № 1, 23—28, 1964.
6. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн.», 7, 5, 1955.
7. Волосов В. М. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 3, № 1, 3—53, 1963.
8. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, № 6 (108), 3—126, 1962.

Поступила в редакцию
28. 4 1964 г.

Кафедра
математики