Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1965

УДК 62—502.12

К. Ф. ТЕОДОРЧИК

ПРЕДЕЛЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ КОРНЕЙ ПО ТРАЕКТОРИЯМ, И ИХ СВЯЗЬ С КРИТЕРИЯМИ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Предложен алгоритм, позволяющий по устойчивости уравнения n-й степени найти пределы значений свободного члена соответствующего уравнения $(n+1)$-й степени, внутри которых оно остается устойчивым. Алгоритм основан на закономерностях асимптотических свойств движения корней по траекториям при непрерывном изменении свободного члена уравнения K. Область устойчивости уравнения $(n+1)$-й степени ограничена снизу апериодической потерей устойчивости, наступающей при $K=0$ с выходом в правую полуплоскость действительного корня, а сверху — пересечением мнимой оси первой парой комплексно-сопряженных корней. Последнее наступает при увеличении свободного члена K до наименьшего положительного корня, приравненного нулю предпоследнего детерминанта Гурвица.

По определению линейная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения (уравнения свободных движений) лежат в левой полуплоскости комплексного переменного. Уравнения, удовлетворяющие этому, условимся называть устойчивыми *.

Легко убедиться, что необходимым, но недостаточным (для уравнения выше второй степени) условием устойчивости является положительность всех коэффициентов уравнения.

Очевидно, что если рассматриваемое уравнение (при заданных значениях всех коэффициентов) устойчиво, то потерять устойчивость оно может при таком непрерывном изменении значений коэффициентов, при котором один из действительных или пара комплексно-сопряженных корней его пересечет мнимую ось.

В задачах автоматического регулирования простейшим таким случаем является изменение общего коэффициента усиления замкнутой жесткой обратной связью системы, которое изменяет свободный член ее характеристического уравнения.

Поэтому рассмотрим уравнение типа

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + K = 0, \qquad (1)$$

в котором все коэффициенты a_i — заданные действительные и положительные числа, а свободный член K является действительным, но допус-

* В математической литературе уравнения и полиномы, обладающие указанным свойством, называют гурвицевыми [1].

кающим непрерывное изменение в пределах $-\infty<K<+\infty$ параметром. Пусть при $K=0$ все корни уравнения (1), за исключением нулевого, лежат в левой полуплоскости комплексного переменного $p=\delta+i\omega$.

Теория траектории корней доказывает [2], что

1. При увеличении K от нуля до $+\infty$ все n корней уравнения (1), выйдя из начальных положений, соответствующих $K=0$, двигаются по n непрерывным траекториям к бесконечности, асимптотически приближаясь к n *нечетным* прямолинейным асимптотам. Асимптоты эти расходятся из лежащего на действительной оси центра асимптот*.

$$\alpha = -\frac{a_1}{n} \tag{2}$$

и образуют с положительным направлением действительной оси углы

$$\varphi_N = \frac{N\pi}{n}, \quad N = \pm 1, \ \pm 3, \dots \tag{3}$$

2. При уменьшении K от нуля до $-\infty$ n корней уравнения (1), выходящие в прямо противоположных направлениях из тех же начальных положений, двигаются к бесконечности, также асимптотически приближаясь к новым n *четным* прямолинейным асимптотам, расходящимся из того же центра (2) под углами к положительному направлению действительной оси

$$\varphi_N = \frac{N\pi}{n}, \ N = 0, \ \pm 2 \dots \tag{4}$$

Из указанных асимптотических свойств траекторий корней следует, что в устойчивых уравнениях типа (1) всегда: 1) центр асимптот (см. формулу (2)) лежит в левой полуплоскости; 2) мнимую ось в начале координат пересекает четная асимптота ($N=0$), по которой в правую полуплоскость может выйти действительный корень только при $K<0$; 3) ближайшей к действительной оси является пара нечетных комплексно-сопряженных асимптот, пересекающих мнимую ось; 4) число s пар комплексно-сопряженных асимптот (четных и нечетных), пересекающих мнимую ось, равно:

в уравнениях нечетной степени $n=2m-1$

$$s = \frac{n-1}{2} = m-1, \tag{5}$$

в уравнениях четной степени $n=2m$

$$s = \frac{n}{2} - 1 = m - 1. \tag{6}$$

Таким образом, уравнение типа (1), все корни которого при $K=0$, за исключением нулевого, лежат в левой полуплоскости, находится на границе апериодической устойчивости (апериодически неустойчиво при $K<0$). С ростом K от нуля оно устойчиво, пока первая пара комплексно-сопряженных корней, идущая к паре нечетных комплексно-сопряженных асимптот, не пересечет мнимой оси. При этом линейная система, соответствующая этому уравнению, самовозбуждается на частоте, определяемой точками пересечения мнимной оси.

---

* Очевидно, точку эту можно рассматривать как центр инерции корней уравнения (1) при $K=0$, если каждому корню приписать единичную массу.

Подставив в (1) $p=i\omega$ и $K=K^*$, где ω обозначает критическую частоту, а K^* — критическое значение параметра, при котором происходит пересечение мнимой оси, и выделив действительную и мнимую части, получим два уравнения*:

уравнение критических частот

$$a_{n-1}-a_{n-3}(\omega^2)+a_{n-5}(\omega^2)^2-\ldots=0 \qquad (7)$$

и уравнение критических значений K^*

$$K^*-a_{n-2}(\omega^2)+a_{n-4}(\omega^2)^2-\ldots=0. \qquad (8)$$

Число s пар комплексно-сопряженных асимптот, пересекающих мнимую ось, в устойчивом уравнении n-й степени типа (1) всегда равно степени уравнения критических частот относительно (ω^2). Отсюда следует, что в устойчивых уравнениях любой степени типа (1) все корни (ω^2) уравнения критических частот действительны и положительны и мнимую ось пересекают только корни идущие к пересекающим ее асимптотам; при этом каждый из этих корней пересекает мнимую ось один и только один раз.

Применим сказанное выше к уравнениям типа (1), переходя последовательно от устойчивого уравнения n-й степени к $(n+1)$-й степени. В уравнении второй степени

$$p^2+a_1p+K=0 \qquad (9)$$

при $a_1>0$ мнимую ось пересекает только четная асимптота $(N=0)$, и оно устойчиво в пределах

$$0<K<+\infty. \qquad (10)$$

Перейдя к уравнению третьей степени

$$p^3+a_1p^2+a_2p+K=0, \qquad (11)$$

мы видим, что если соответствующее уравнение второй степени устойчиво ($a_1>0$ и $a_2>0$), то при $K=0$ уравнение (11) находится на границе апериодической неустойчивости. При возрастании K от нуля оно устойчиво, пока пара комплексно-сопряженных корней, идущих к паре нечетных комплексно-сопряженных асимптот $(\varphi_1=\pm\frac{\pi}{3})$ не пересечет мнимой оси.

Уравнения (7) и (8) в данном случае дают

$$a_2-\omega^2=0 \text{ и } K^*-a_1\omega^2=0. \qquad (12)$$

Решая их совместно, находим

$$\omega^2=a_2,\ \omega=\pm\sqrt{a_2},\ K^*=a_1a_2. \qquad (13)$$

Таким образом, уравнение третьей степени (11) устойчиво в пределах

$$0<K<a_1a_2. \qquad (14)$$

Из полученных выше результатов непосредственно вытекают условия устойчивости Гурвица для уравнения третьей степени

$$a_1>0,\ \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ 1\ a_2 \end{vmatrix}>0 \text{ и } a_3>0. \qquad (15)$$

* В уравнении критических частот опускаем корень $\omega=0$, который соответствует апериодической потере устойчивости, наступающей при $K<0$.

Рассмотрим уравнение 4-й степени типа (1):

$$p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + K = 0. \tag{16}$$

Так как при устойчивости соответствующего уравнения третьей степени мнимую ось пересекает только одна пара нечетных асимптот $(\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{4})$, то уравнение (16) устойчиво при K, меньшем критического значения $K=K^*$. Уравнения (7) и (8) критической частоты и критического значения K имеют вид

$$a_3 - a_1(\omega^2) = 0 \text{ и } K^* - a_2(\omega^2) + (\omega^2)^2 = 0. \tag{17}$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{a_3}{a_1},\ \omega = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_1}},\ K^* = \frac{1}{a_1^2}(a_1a_2 - a_3)\,a_3. \tag{18}$$

Следовательно, (16) устойчиво в пределах значений

$$0 < a_4 < \frac{1}{a_1^2}(a_1a_2 - a_3)\,a_3. \tag{19}$$

Отсюда непосредственно вытекают условия устойчивости Гурвица для уравнения 4-й степени:

$$a_1 > 0 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и } a_4 > 0. \tag{20}$$

Примененный выше алгоритм можно, очевидно, неограниченно продолжать. Особенностью устойчивых уравнений типа (1) при степенях выше четвертой является то, что мнимую ось в них пересекает больше чем одна пара комплексно-сопряженных асимптот и уравнение критических частот (начиная с $n=6$) выше второй степени (относительно ω^2). Это затрудняет непосредственное совместное решение уравнений критических частот и критического K^* в общем виде.

Чтобы выяснить методы преодоления возникающих затруднений и не слишком осложнять выкладки, рассмотрим еще переход от устойчивого уравнения четвертой степени к уравнению пятой степени. Составим из (16) при a_4, удовлетворяющем (19), уравнение пятой степени:

$$p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + K = 0. \tag{21}$$

Запишем для него уравнения (7) и (8) критических частот (ω^2) и K^*:

$$\begin{gathered} a_4 - a_2(\omega^2) + (\omega^2)^2 = 0, \\ K^* - a_3(\omega^2) + a_1(\omega^2)^2 = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

В уравнении 5-й степени (21) мнимую ось пересекают две пары комплексно-сопряженных асимптот, нечетная $(\varphi_1 = \pm \frac{2\pi}{5})$ и четная $\varphi_2 = \pm \frac{2\pi}{5}$.

С ростом K от нуля колебательная потеря устойчивости наступит при пересечении мнимой оси парой комплексно-сопряженных корней, идущих к *нечетной* паре асимптот. При этом уравнения (22) будут иметь общий корень (ω^2). Общая алгебраическая теория исключения дает условие существования общего корня двух уравнений в виде равенства нулю их детерминанта, который может быть записан в форме определителя Сильвестра [3]. В рассматриваемом случае этот детерминант имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & K^* & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & K^* \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 0^*. \tag{23}$$

Относительно переменного K (23) является уравнением второго порядка, позволяющим найти оба критических его значения $K=K_1^*$ и $K=K_2^*$. Верхний предел устойчивости для рассматриваемого уравнения 5-й степени дается положительным значением $K=K^*$, соответствующим $\left(\varphi_1=\pm\frac{\pi}{5}\right)$. Действительно, при $K=0$ детерминант Сильвестра (23) переходит в последний детерминант Гурвица для уравнения четвертой степени, который больше нуля. С ростом K детерминант (23), очевидно, будет оставаться положительным до первого положительного корня $K=K_1^*$.

Таким образом, уравнение 5-й степени (21) устойчиво при значениях свободного члена, лежащих в пределах

$$0<\alpha_5<K_1^*. \tag{24}$$

В этих пределах детерминант (23) совпадает с предпоследним детерминантом Гурвица для уравнения пятой степени. Учитывая, что соответствующее (21) уравнение четвертой степени устойчиво, получаем полную систему неравенств Гурвица для уравнения пятой степени:

$$a_1>0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a & a_3 & a_5 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}>0 \text{ и } a_5>0. \tag{25}$$

Так как изложенный метод определения пределов устойчивости есть метод перехода от n к $n+1$ и закон составления детерминантов Сильвестра для любого n определен, то можно считать, что эквивалентность совместности двух критических уравнений (7) и (8) нарушению предпоследнего неравенства Гурвица доказана для любого n. При этом изложенное выявляет физический смысл потери устойчивости и связь его с нарушением предпоследнего неравенства Гурвица.

Если сохранить лишь формально математическую часть вывода, то это дает весьма элементарный вывод неравенств Гурвица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, 1946.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. «Траектории корней линейных автоматических систем. «Наука», 1964.
3. Окунев А. Я. Высшая алгебра, гл. 10. ГИТТЛ, 1949.

Поступила в редакцию
11. 5 1964 г.

Кафедра
физики колебаний

* Для получения (23) вводим в (22) новое переменное $x=-\omega^2$ и записываем в виде $a_1x^2+a_3x+K^*=0$; $x^2+a_2x+a_4=0$.