

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Б. И. МОРГУНОВ

РАСЧЕТ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Постановка задачи. В работах [1]—[3] рассматривались вращательные режимы нелинейных систем с одной степенью свободы вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m(x)\dot{y}] + Q(x, y) &= \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где y — одномерная координата, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ — совокупность медленно изменяющихся параметров, Q — потенциальная сила, вызывающая вращения, εf , εX — малые нелинейные возмущения ($\varepsilon > 0$ — малый параметр).

При $\varepsilon = 0$ система (1) является канонической. В настоящей работе исследуются вращательные режимы систем более общего вида:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= G(x, y, p) + \varepsilon g(x, y, p, \varepsilon), \\ \dot{p} &= F(x, y, p) + \varepsilon f(x, y, p, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, p, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

причем не делается предположения о гамильтоновости вырожденной системы (системы, в которую переходит (2) при $\varepsilon = 0$). Правые части (2) предполагаются периодическими функциями y с периодом 2π .

Нашей задачей является асимптотический расчет вращательных режимов систем типа (2).

Основные результаты. Предположим, что известен интеграл вырожденной системы (системы (2) при $\varepsilon = 0$)

$$p = P(x, y, c), \quad (3)$$

соответствующий области вращательных режимов. (Предполагается, что (3) — периодическая функция y .) Переходя от переменных y, p, x к переменным c, x, ψ , где ψ — фаза вращения, получим уравнения, определяющие в первом приближении по ε изменение c и x в виде

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{\varepsilon}{T} \int_0^{2\pi} \frac{A_1(x, y, c) dy}{G(x, y, P(x, y, c))} + O(\varepsilon^2), \quad \dot{x} = \frac{\varepsilon}{T} \int_0^{2\pi} \frac{X_1(x, y, P) dy}{G(x, y, P(x, y, c))} + O(\varepsilon^2), \\ A_1 &= \left(\frac{\partial P}{\partial c} \right)^{-1} \left[-\frac{\partial P}{\partial y} g(x, y, P, 0) + f(x, y, P, 0) - \frac{\partial P}{\partial x} X(x, y, P, 0) \right], \\ X_1 &= X(x, y, P(x, y, c), 0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $T = \int_0^{2\pi} \frac{dy}{G(x, y, P(x, y, c))}$ — период вращения. Заметим, что в частном случае систем вида (1) в роли переменной c может выступать энергия вращения E (см. [1] — [3]). Возмущения g, f, X в (4) берутся при $\varepsilon = 0$.

Учет членов порядка ε^2 позволяет получить уравнения второго приближения для переменных c и x . Члены второго порядка в уравнении для c имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{A_2 dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_1}{\partial c} K[A_1] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_1}{\partial y} K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] K[A_1] dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_1}{\partial x} K[X_1] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_1}{\partial y} K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] K[X_1] dy - \right. \\ \left. - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{\partial A_1}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{A_1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} - \right. \\ \left. - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} A_1 K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} \right] \frac{dy}{G} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{A_1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{G} - \right. \\ \left. - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} A_1 K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{G} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial A_1}{\partial y} \left\{ K \left[\frac{g_1}{G} \right] - K \left[A_1 K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - K \left[X_1 K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} dy K[K[A_1]] + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy K[K[X_1]] \right\} dy \}. \end{aligned}$$

Члены второго порядка в уравнении для x имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{X_2 dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial X_1}{\partial c} K[A_1] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial X_1}{\partial y} K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] K[A_1] dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial X_1}{\partial x} K[X_1] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial X_1}{\partial y} K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] K[X_1] dy - \right. \\ \left. - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{\partial X_1}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} + \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{X_1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{A_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} X_1 K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{dy}{G} - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{\partial X_1}{\partial x} \right] \frac{dy}{G} + \\
& + \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} K \left[\frac{X_1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{G} - \\
& - \frac{1}{T^2} \int_0^{2\pi} \frac{X_1 dy}{G} \int_0^{2\pi} X_1 K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{G} + \\
& + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\partial X_1}{\partial y} \left\{ K \left[\frac{g_1}{G} \right] - K \left[A_1 K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \right] - K \left[X_1 K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{G^2} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} dy K [K [A_1]] + \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dy K [K [X_1]] \left\{ dy \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь K — оператор вида: $K[\varphi] = \int_0^y \frac{\varphi dy}{G} - \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi dy}{G} \int_0^y \frac{dy}{G}$, A_2 получается из A_1 подстановкой вторых членов разложения возмущений g, f, X в ряд по степеням ε . Поправки к c, x , учитывающие «быстрые» изменения этих параметров, равны $\Delta c = K[A_1]$, $\Delta x = K[X_1]$. Уравнение для фазы вращения интегрируется в квадратурах, если решены уравнения второго приближения для c и x :

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \frac{2\pi}{T^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{g_1 dy}{G^2} - \int_0^{2\pi} K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{A_1 dy}{G} - \right. \\
\left. - \int_0^{2\pi} K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{X_1 dy}{G} \right\}.
\end{aligned}$$

Знание в первом приближении c, x, ψ позволяет найти первые приближения для исходных переменных y и p :

$$\begin{aligned}
\int_0^{y(t)} \frac{dy}{G} = \frac{T}{2\pi} \int_{t_0}^t \left\{ \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \frac{2\pi}{T^2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{g_1 dy}{G^2} - \int_0^{2\pi} K \left[\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial c} \right] \frac{A_1 dy}{G} - \right. \right. \\
\left. \left. - \int_0^{2\pi} K \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \frac{X_1 dy}{G} \right\} dt,
\end{aligned}$$

$$p(t) = P(x, c, y(t)).$$

Отметим, что подобным образом могут быть вычислены и приближения более высоких порядков.

Некоторые частные случаи. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt} [m(x) \dot{y}] + Q(x, y, \dot{y}) = \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \varepsilon), \quad \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \varepsilon), \quad (5)$$

принадлежащую к типу (2). Некоторые частные виды систем (5) рассматривались в [4]. В ряде важных для приложений случаев интеграл (3) находится элементарно. Так, если $Q = S(x, y)R(x, \dot{y})$, то (3) имеет вид

$$\int \frac{p dp}{R\left(x, \frac{p}{m}\right)} = -m \int S(x, y) dy + c.$$

Если $Q = S(x, y) + R(x, y) \dot{y}^2$, то (3) определяется формулой

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C - 2m \int S \exp \left\{ \frac{2}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $Q = R(x, y) \dot{y}^2 + S(x, y) \dot{y}^{2\alpha}$, то для (3) справедливо выражение

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C + \frac{2(\alpha-1)}{m^{2\alpha-1}} \int S \exp \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}.$$

В заключение приношу благодарность В. М. Волосову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 151, № 6, 1963.
2. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 6, 35, 1963.
3. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 1, 23, 1964.
4. Ярошевский В. А. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 4, № 2, 1964.

Поступила в редакцию
20. 9 1964 г.

Кафедра
математики

УДК 531.391

В. М. ВОЛОСОВ, Б. И. МОРГУНОВ

К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи. В работах [1—3] рассматривались стационарные резонансные колебательные и вращательные режимы нелинейных систем следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m(x) \dot{y}] + Q(x, y) &= \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где y — координата, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ — набор медленно изменяющихся параметров, Q — основная сила, вызывающая движение, εf , εX , $\varepsilon \Theta$ — малые нелинейные возмущения, зависящие периодически от ϑ , ϑ — фаза внешнего воздействия, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Резонансные задачи для некоторых нелинейных систем рассматривались в [4—7]. В данной работе исследуются резонансные стационарные колебательные режимы нелинейных систем, являющихся обобщением (1):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= G(x, y, p) + \varepsilon g(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{p} &= F(x, y, p) + \varepsilon f(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, p, \vartheta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$