

$$\int \frac{p dp}{R\left(x, \frac{p}{m}\right)} = -m \int S(x, y) dy + c.$$

Если $Q = S(x, y) + R(x, y) \dot{y}^2$, то (3) определяется формулой

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C - 2m \int S \exp \left\{ \frac{2}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $Q = R(x, y) \dot{y}^2 + S(x, y) \dot{y}^{2\alpha}$, то для (3) справедливо выражение

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C + \frac{2(\alpha-1)}{m^{2\alpha-1}} \int S \exp \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}.$$

В заключение приношу благодарность В. М. Волосову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 151, № 6, 1963.
2. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 35, 1963.
3. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 1, 23, 1964.
4. Ярошевский В. А. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 4, № 2, 1964.

Поступила в редакцию
20. 9 1964 г.

Кафедра
математики

УДК 531.391

В. М. ВОЛОСОВ, Б. И. МОРГУНОВ

К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

§ 1. Постановка задачи. В работах [1—3] рассматривались стационарные резонансные колебательные и вращательные режимы нелинейных систем следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m(x) \dot{y}] + Q(x, y) &= \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где y — координата, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ — набор медленно изменяющихся параметров, Q — основная сила, вызывающая движение, εf , εX , $\varepsilon \Theta$ — малые нелинейные возмущения, зависящие периодически от ϑ , ϑ — фаза внешнего воздействия, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Резонансные задачи для некоторых нелинейных систем рассматривались в [4—7]. В данной работе исследуются резонансные стационарные колебательные режимы нелинейных систем, являющихся обобщением (1):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= G(x, y, p) + \varepsilon g(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{p} &= F(x, y, p) + \varepsilon f(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, p, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, p, \vartheta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что относительно вырожденной системы, соответствующей (2) (т. е. системы, получающейся из (2) при $\varepsilon=0$), не делается предположения о гамильтоновости, тогда как вырожденная система, соответствующая (1), является канонической. Для исследования (2) воспользуемся методом, развитым в [1].

§ 2. Основные результаты. Мы будем предполагать известным интеграл вырожденной системы, соответствующей (2)

$$p = P(x, y, c). \quad (3)$$

Введем с помощью соотношений $G(x, F_1, P(x, F_1, c))=0$, $G(x, F_2, P(x, F_2, c))=0$ амплитудные кривые F_1 и F_2 (см. [1], [3]). Переходя от переменных y, p, x, ϑ к новым переменным $F_1, F_2, x, \vartheta, \psi$, где ψ — фаза колебаний, перепишем систему (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= \varepsilon B_i(x, F_1, F_2, y, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) \\ \dot{\psi} &= \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \Psi_i(x, F_1, F_2, y, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p = P_i(x, y, F)$, причем $i=1$ соответствует изменению y от F_1 до F_2 , $i=2$ — изменению y от F_2 до F_1 ,

$$B_i = \left(\frac{\partial P_i}{\partial F} \right)^{-1} \left[\frac{\partial P_i}{\partial y} g(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) + f(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) - \frac{\partial P_i}{\partial x} X(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) \right],$$

$$\begin{aligned} \Psi_i &= 2\pi(-1)^{i+1} \left[-\frac{1}{TG} g(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int_y^{F_1} \frac{dy}{G} \right) X(x, y, P_i, \vartheta, \varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{1}{T} \int_y^{F_1} \frac{dy}{G} \right) B_i \right], \end{aligned}$$

$T = \sum_{i=1,2} \int_{F_2}^{F_1} \frac{dy}{G(x, y, P_i)}$ — период колебаний (ω — частота колебаний), ν — частота внешнего воздействия.

Мы будем рассматривать резонансный режим, определяемый целыми взаимно простыми числами p и q , т. е. будем предполагать, что для некоторых значений x и F выполнено равенство $p\omega = q\nu$.

Введем в (4) в качестве новой переменной расстройку $\varphi = \vartheta - \frac{p}{q}\psi$. Определим, следуя [1], средние значения следующим образом:

$$\begin{aligned} B_1(x_0, F_0, \varphi) &= \frac{1}{qT_0} \sum_{k=0}^{q-1} \int_{F_0}^{F_{10}} \sum_{i=1,2} B_i \left(x_0, F_0, y, \varphi + \frac{p}{q}\psi^0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi pk}{q} + (-1)^{i+1} \nu_0 \int_y^{F_{10}} \frac{dy}{G} \right) \frac{dy}{G}. \end{aligned}$$

Уравнения для определения в первом приближении стационарных резонансных значений амплитуды F_0 , параметров x_0 и расстройки φ_0 , согласно [1], имеют вид

$$B_1(F_0, x_0, \varphi_0) = 0, \quad X_1(F_0, x_0, \varphi_0) = 0, \quad \lambda(F_0, x_0) = 0. \quad (5)$$

Поправки к найденным из (5) координатам стационарной точки определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial F_0} \delta F + \frac{\partial B_1}{\partial x_0} \delta x + \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_0} \delta \varphi &= 0, \\ \frac{\partial X_1}{\partial F_0} \delta F + \frac{\partial X_1}{\partial x_0} \delta x + \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_0} \delta \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial F_0} \delta F + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \delta x + \Phi_1(x_0, F_0, \varphi_0) = 0.$$

$$\left(\text{В уравнениях (5), (6)} \quad \lambda = \nu - \frac{p}{q} \omega, \quad \Phi = \Theta - \frac{p}{q} \Psi \right).$$

Как следует из [1], основным условием устойчивости стационарных режимов (5), (6) является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения $\text{Det}(M - kE) = 0$, где E — единичная матрица, M — матрица следующего вида:

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial F_0}; & & & & \\ & \varepsilon \frac{\partial X_1}{\partial F_0}; & & & \\ \frac{\partial \lambda}{\partial F_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial F_0^2} \delta F + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial F_0 \partial x_0} \delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_0} \right); & & & & \\ & \varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial x_0}; & & \varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial \varphi_0} \\ & \varepsilon \frac{\partial X_1}{\partial x_0}; & & \varepsilon \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0 \partial F_0} \delta F + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} \delta x + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} \right); & \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_0} \end{pmatrix}$$

При выполнении этого основного условия и некоторых других ограничениях (см. [1]) имеет место устойчивость, которая понимается в следующем смысле: для сколь угодно малого $\xi > 0$ и сколь угодно большого $T > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\delta(\varepsilon)$, обладающее тем свойством, что при выполнении неравенства $\max |F(t_0) - F_0, x(t_0) - x_0, \varphi(t_0) - \varphi_0| < \delta$ для всех $t_0 \leq t \leq T$ выполняется неравенство: $\max |F(t) - F_0, x(t) - x_0, \varphi(t) - \varphi_0| < \xi$.

Отметим, что уравнения для определения стационарных резонансных режимов и условия устойчивости этих режимов могут быть получены с любой степенью точности.

§ 3. Некоторые конкретные системы. Рассмотрим систему, отличающуюся от (1) тем, что сила Q зависит от y (см. [7]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m(x) \dot{y}] + Q(x, y, \dot{y}) &= \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= \nu(x) + \varepsilon \Theta(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

Укажем некоторые случаи, когда интеграл (3) для системы (7) находится элементарно. Пусть $Q = S(x, y) R(x, \dot{y})$. Тогда имеем:

$$\int \frac{p dp}{R\left(x, \frac{p}{m}\right)} = -m \int S(x, y) dy + C.$$

Если $Q = S(x, y) + R(x, y) \dot{y}^2$, то для (3) справедлива формула

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C - 2m \int S \exp \left\{ \frac{2}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{1/2}.$$

Если $Q = R(x, y) \dot{y}^2 + S(x, y) y^{2\alpha}$, то (3) принимает вид

$$p = \exp \left\{ -\frac{1}{m} \int R dy \right\} \left(C + \frac{2(\alpha-1)}{m^{2\alpha-1}} \int S \exp \left\{ \frac{2(1-\alpha)}{m} \int R dy \right\} dy \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}.$$

Для этих конкретных случаев формулы § 2 приводят к простым квадратурным выражениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **153**, № 3, 1963.
2. Моргунов Б. И. ДАН СССР, **155**, № 2, 1964.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **156**, № 1, 1964.
4. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», **3**, № 1, 1963.
5. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», **3**, № 1, 1963.
6. Арнольд В. И. ДАН СССР, **161**, 1, 1965.
7. Ярошевский В. А. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», **4**, № 2, 1964.

Поступила в редакцию
20. 10 1964 г.

Кафедра
математики

УДК 621.372.061.3

Д. Н. КЛЫШКО, В. С. ТУМАНОВ, В. П. ЯРЫГИН

ВЫЧИТАНИЕ ЧАСТОТЫ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ

В работах [1, 2] рассмотрен эффект вычитания частоты за счет нелинейных свойств трехуровневой квантовой системы. Аналогичный эффект возможен и в случае двухуровневой системы, обладающей диагональными матричными элементами дипольного момента $\vec{\mu}$. В настоящем сообщении приводятся результаты наблюдения этого эффекта на радиочастотах с помощью зеemanовских уровней свободного радикала дифенилпикрилгидразила (ДФПГ).

Расчет эффекта нетрудно выполнить исходя из уравнений для матрицы плотности с феноменологическими временами релаксации T_1 и T_2 (см., например, [3]). Пусть на систему с бортовой частотой ω_0 действуют 2 монохроматические поля

$$(\vec{H}_1 e^{i\omega_1 t} + \vec{H}_2 e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.})/2 \text{ и пусть выполнены условия } \omega_0 T_2 \gg 1:$$

$$\omega_{1,2} \sim \omega_0, |\vec{\mu}_{12} \vec{H}_1 / \hbar| \ll \omega_0 \text{ и } |\vec{\mu}_{12} \vec{H}_2 / \hbar|^2 \ll 1/T_1 T_2^*.$$

В этом случае получается следующее выражение для фурье-компонента намагниченности (или поляризации) системы на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 v_1^* v_2 R, \quad (1)$$

$$R = \frac{x - i}{(1 + x^2 + |v_1|^2 T_1/T_2)} \cdot \frac{(z + 2i)(z + x + i)}{(z + iT_2/T_1)(z - x + i)(z + x + i) - |v_1|^2(z + i)},$$

где $M_0 \equiv (\mu_{11} - \mu_{22}) \frac{\Delta N}{2}$ — равновесная статическая намагниченность образца (ΔN — разность населенностей) и введены безразмерные величины $\vec{v}_{1,2} \equiv -\vec{\mu}_{12} \vec{H}_{1,2} T_2 / \hbar$, $x \equiv (\omega_1 - \omega_0) T_2$, $z \equiv (\omega_1 - \omega_2) T_2$.

* При этом в общем случае следует учитывать и поле с частотой $2\omega_1 - \omega_2$, возникающее за счет нелинейности системы [4], однако в условиях нашего эксперимента это поле пренебрежимо мало. По этой же причине мы не учитываем обратного влияния на систему поля с частотой $\omega_1 - \omega_2$.