Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1965

УДК 621.378.001

Б. В. ПЕТУХОВ, Ю. И. ПОЛЯКОВ, Ю. М. ШИРОКОВ

СВЯЗЬ ФОРМФАКТОРОВ ОДНОЧАСТИЧНОГО МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА С ЗАРЯДОМ И МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ

Найдены наиболее сильные особенности матричного элемента тензора энергии импульса одной частицы, связанные с зарядом и магнитным моментом. Коэффициенты при особенностях выражены через заряд и магнитный момент.

Работа посвящена изучению обусловленных электромагнитным полем аналитических особенностей матричного элемента тензора энергии—импульса, заданного между одночастичными состояниями. В тензор энергии — импульса $T_{\mu\nu}(x)$ дают вклад различные поля, создаваемые частицей (электромагнитное, мезонное и т. д.), но, если, как обычно, пренебречь гравитационным полем, электромагнитный вклад в $T_{\mu\nu}(x)$ выделяется своим дальнодействием. В классической физике это дает возможность найти электрический заряд частицы по известной плотности энергии $T_{00}(x)$ (см., например, [1]), пользуясь формулой

$$T_{00}(r) = \frac{e^2}{8\pi r^4}. \tag{1}$$

Квантовомеханическое обобщение заключается в том, что сопоставляются заряд (и магнитный момент) и особенности матричного элемента $\langle \vec{p} \,|\, T_{\mu\nu}(x) \,|\, p' \rangle$ тензора энергии—импульса по переменной $t = -(p - p')^2$ в нуле.

Рассмотрим среднее от $T_{\mu\nu}(x)$ по состоянию $|\psi\rangle$ одной свободной частицы в момент времени $x^0 = 0$

$$\langle \psi \,|\, T_{\mu\nu}(\vec{x}, 0) \,|\, \psi \rangle = \int d^3p\, d^3p'\, \psi^*(p)\, \psi(p')\, e^{-i\vec{x}(\vec{p}-\vec{p}')} \langle \vec{p} \,|\, T_{\mu\nu}(0) \,|\, \vec{p} \,| \rangle. \tag{2}$$

Квантовым аналогом классической покоящейся частицы будет волновой пакет, локализованный в координатном и импульсном пространствах.

Будем считать средние импульс и координату равными нулю, а средний квадратичный импульс много меньшим квадрата массы частицы $\varkappa^2$. В этом случае $t \to -(\vec{p} - \vec{p}')^2$, $\sqrt{p_0 p_0'} \to \varkappa$. Для бесспиновой частицы матричный элемент $\langle \vec{p} \,|\, T_{00}(0) \,|\, \vec{p}' \rangle$ параметризуется следующим обра-

зом [1]:

$$\langle \vec{p} \,|\, T_{00}(0) \,|\, \vec{p}' \rangle = (3\pi)^{-3} (4p_0p_0')^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(2p_0p_0' - \frac{t}{2}\right) F_1(t) + [(p_0 - p_0')^2 + t] F_2(t) \right\} \to$$

$$\to (2\pi)^{-3} (2\varkappa)^{-1} \{2\varkappa^2 F_1(-k^2) - k^2 F_2(-k^2)\} \equiv F(k^2), \qquad (3)$$

где $k^2 = \vec{k}^2$, $\vec{k} = \vec{p} - \vec{p}'$. Поэтому

$$\overline{T}_{00}(\vec{x}) = \langle \psi \,|\, T_{00}(\vec{k}, 0) \,|\, \psi \rangle = \int d^3k \rho(k) F(k^2) e^{-i\vec{x}\vec{k}},$$

где $\rho(k) = \int d^3p \psi^*(p) \psi(p - k)$ является Фурье-образом $|\psi(x)|^2$,

$$(2\pi)^{3/2} \rho(k) F(k^2) = \tau_{00}(k), \qquad (4)$$

$\tau_{\mu\nu}(\vec{k})$ — Фурье-образ $\overline{T}_{\mu\nu}(\vec{x})$. Плотность энергии бесспиновой частицы сферически симметрична, поэтому

$$\tau_{00}(k) = (2\pi)^{-3/2} \int \overline{T}_{00}(x) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^2 \overline{T}_{00}(r) \frac{\sin kr}{kr} dr.$$

Заметим, что $\tau_{00}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^2 \overline{T}_{00}(r) dr = \frac{\varkappa}{(2\pi)^{3/2}}$ и что функция $\frac{\sin u}{u}$ является целой функцией квадрата своего аргумента. Поэтому

$$\int_0^A r^2 \overline{T}_{00}(r) \frac{\sin kr}{kr} dr$$

будет целой функцией k^2 (см., например, [2]). Возможные особенности $\tau_{00}(k)$ в конечных точках содержатся в слагаемом $\int_A^\infty r^2 \overline{T}_{00}(r) \frac{\sin kr}{kr} dr$.

Рассмотрим интеграл $I_3(k) = \frac{1}{k} \int_A^\infty \frac{\sin kr}{r^3} dr$. Интегрирование по частям дает $I_3(k) = \frac{k^2}{2} I_1(k) + \Phi_1(k^2)$:

$$I_1(k) = \frac{1}{k} \int_A^\infty \frac{\sin kr}{r} dr = \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{r} dr - \frac{1}{k} \int_0^A \frac{\sin kr}{r} dr = \frac{\pi}{2k} - \Phi_2(k^2).$$

Здесь $\Phi_1(k^2)$ и $\Phi_2(k^2)$ целые функции k^2. В дальнейшем все аналитические по k^2 в точке $k^2 = 0$ функции будут обозначаться через $\Phi(k^2)$.

Окончательно $I_3(k) = -\frac{\pi}{4} k + \Phi(k^2)$. (5)

Выбирая достаточно большое A, имеем $T_{00}(r) = \frac{e^2}{8\pi r^4}$ $(r \geqslant A)$.

Используя (5), получаем $\tau_{00}(k) = -\frac{e^2}{16\sqrt{2\pi}} k + \Phi(k^2)$. (6)

Таким образом, $\tau_{00}(k)$ как функция k^2 имеет точку ветвления второго порядка в нуле. Отметим, что ввиду равенства нулю следа тензора энергии—импульса в классической электродинамике $\tau_{ii}(k)$ (сумма по i от 1 до 3) имеет такую же особенность, что и $\tau_{00}(k)$.

Вернемся к (4). О функции $\rho(k)$ известно следующее $\rho(0)=1$. Кроме того, $\rho(k)$ можно считать аналитической функцией k^2, точно так же, как и $\int_0^A r^2\overline{T}_{00}(r)\frac{\sin k^2}{kr}dt$, поскольку частица предполагается локализованной в координатном пространстве. Поэтому из (4) следует, что максимальная, т. е. наиболее сильная особенность по k^2 величины $F(k^2)$ в нуле та же, что и у $\tau_{00}(k)$ из (6).

Воспользовавшись параметризационными формулами (3) (см. также (1))

$$\langle\vec{p}\,|\,T_{ii}(0)\,|\,\vec{p}\,'\rangle=(2\pi)^{-3}(2\varkappa)^{-1}\{k^2[F_1(-k^2)-2F_2(-k^2)]\},$$

получаем для максимальных особенностей формфакторов $F_1(t)$ и $F_2(t)$ выражения

$$\begin{aligned}F_1(t)&=\varkappa(t)-\frac{\pi e^2}{16\varkappa}\sqrt{-t},\\ tF_2(t)&=\psi(t)-\frac{\pi e^2}{8}\varkappa\sqrt{-t},\end{aligned}\qquad(7)$$

где $\chi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые в нуле функции.

Перейдем к частицам со спином $\frac{1}{2}$. Матричный элемент выражается через 3 формфактора (см. (3)) $g_{1,0}(t)$, $g_{4,0}(t)$ и $g_{6,0}(t)$.

С учетом того, что средний импульс равен нулю, а среднеквадратичный импульс много меньше $\varkappa^2$, получаем для интересующих нас компонент тензора энергии—импульса:

$$\langle\vec{p}\,|\,T_{00}(0)\,|\,\vec{p}\,'\rangle=(2\pi)^{-3}(2\varkappa)^{-1}\{2\varkappa^2g_{1,0}(t)+tg_{6,0}(t)\},$$

$$\langle\vec{p}\,|\,T_{ii}(0)\,|\,\vec{p}\,'\rangle=(2\pi)^{-3}(2\varkappa)^{-1}\{2tg_{6,0}(t)\},$$

$$\langle\vec{p}\,|\,T_{0i}(0)\,|\,\vec{p}\,'\rangle=(2\pi)^{-3}i\varkappa^2g_{4,0}(t)\,[\vec{k}\vec{s}]_i.$$

Распределение плотности энергии оказывается сферически симметричным, несмотря на наличие у частицы магнитного момента $\vec{\mu}=\mu_0\vec{s}$

$$\overline{T}_{00}(r)=\frac{e^2}{8\pi r^4}+\frac{3(\vec{\mu}\vec{n})^2+\mu^2}{8\pi r^6}=\frac{e^2}{8\pi r^4}+\frac{7\mu_0^2}{32\pi r^6},$$

$$(\vec{s}\vec{n})^2=\frac{1}{4}(\vec{\sigma}\vec{n})^2=\frac{1}{4}.$$

Поэтому исследование формфакторов $g_{1,0}$ и $g_{6,0}$ полностью аналогично случаю бесспиновой частицы, причем имеют место формулы (7), в которых надо заменить F_1 на $g_{1,0}$ и F_2 на $g_{6,0}$. Магнитный момент дает вклад в особенности формфакторов $g_{1,0}$ и $tg_{6,0}$ соответственно

$$-\frac{7\pi\mu_0^2}{768\varkappa}t\sqrt{-t}\ \text{и}\ -\frac{7\pi\mu_0^2}{384}\varkappa t\sqrt{-t}.$$

Дополнительное уравнение для формфактора $g_{4,0}(t)$ получается из рассмотрения среднего от $T_{0i}(x)$

$$\langle\psi\,|\,T_{0i}(\vec{x},0)\,|\,\psi\rangle=i\varkappa^2(2\pi)^{-3}\int d^3k\rho(k)e^{-i\vec{x}\vec{k}}g_{4,0}(-k^2)\,[\vec{k}\vec{s}]_i.\qquad(8)$$

Для сферически симметричной функции $f(k)$ справедливо соотношение

$$\int f(k)\, n_{k_i} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, d^3k = 2\pi i n_i \int_0^\infty k^2 f(k)\, b'(kr)\, dk, \tag{9}$$

где

$$n_{k_i} = \frac{k_i}{|\vec{k}|},\quad n_i = \frac{r_i}{|r|},\quad b'(u) = \frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right).$$

Обращая формулу (9) и вторично применяя ее для перехода от k-пространства к r-пространству, можно получить соотношение ортогональности

$$k'^2 \int_0^\infty r^2 b'(kr)\, b'(k'r)\, dr = 2\pi\delta(k' - k). \tag{10}$$

Полагая в (9) $f(k)$ равным подынтегральному выражению в (8), приходим к соотношению

$$\langle\psi|\, T_{0i}(\vec{x}, 0)\, |\psi\rangle = (2\pi^{-1}\varkappa^2 [\vec{n}\vec{s}]_i \int_0^\infty dk\rho(k)\, k^3 g_{4,0}(-k^2)\, b'(kr). \tag{11}$$

Соответствующая классическая формула имеет вид

$$\overline{T}_{0i}(\vec{r}) = -\frac{e\mu_0}{4\pi r^5}[\vec{n}\vec{s}]_i. \tag{12}$$

Приравнивая друг другу (11) и (12), получаем для больших расстояний

$$\frac{\varkappa^2}{2\pi}\int_0^\infty dk\rho(k)\, k^3 g_{4,0}(-k^2)\, b'(kr) = \frac{e\mu_0}{4\pi r^5}. \tag{13}$$

Умножим (13) на $b'(k', r)$ и интегрируем по r с помощью (10)

$$k\rho(k)\, g_{4,0}(-k^2) = \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\infty \overline{T}_{0i}(r)\, b'(kr)\, dr.$$

Методом, аналогичным получению (6), находим для максимальной особенности формфакторы $g_{4,0}(t)$ выражение

$$g_{4,0}(t) = \frac{\pi e\mu_0}{16\varkappa^2}\sqrt{-t} + \theta(t),$$

где функция $\Theta(t)$ имеет ограниченную в нуле первую производную.

Метод может быть использован и для нахождения особенностей одночастичных формфакторов оператора $T_{\mu\nu}(x)$, обусловленных последующими мультипольными моментами у частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков Ю. М. ЖЭТФ, 44, 203, 1963.
2. Уитекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.
3. Чешков А. А., Широков Ю. М. ЖЭТФ, 44, 1982, 1963.

Поступила в редакцию
29. 2 1964 г.

НИИЯФ

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА