

Ю. И. ПОЛЯКОВ, Б. В. ПЕТУХОВ

О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА В S-МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ

Приводится новый вывод одного из условий микроковариантности, сформулированных в [1]. Устанавливается связь условия макропричинности и условия микропричинности в той форме, в которой оно сформулировано в [1]. Из общих условий микроковариантности и микропричинности получены некоторые строгие соотношения для компонентов тензора энергии-импульса, одно из которых похоже на коммутационное условие Швингера, предложенное им в ряде работ (см. [2] — [5]), но не тождественно ему.

1. В работе получены дальнейшие следствия из сделанного в [1] физического допущения о существовании S-матричного описания в слабо искривленном пространстве-времени, обращающемся в плоское на бесконечности. В [1] показано, что из этого допущения следует существование и сохранение оператора тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, связанного с S-матрицей соотношением

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{i} S + \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}, \quad (1)$$

где $g^{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор, а $g(x) = \det \|g_{\mu\nu}(x)\|$. Все следствия из этого допущения названы в [1] условиями микроковариантности квантовой теории (УМК). Из постулированных тензорных свойств оператора $T_{\mu\nu}(x)$ там получено новое УМК, сходящееся к существованию оператора $\frac{\delta \tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)}$, удовлетворяющего в плоском пространстве-времени соотношению

$$2 \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(g^{\alpha\sigma} \frac{\delta \tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)} \right) = \left(\tau_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \tau_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \right. \\ \left. + \tau_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x} \mu + \frac{\partial \tau_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \right) \delta(x-y). \quad (2)$$

Здесь $\tau_{\mu\nu}(x) = \sqrt{-g(x)} T_{\mu\nu}(x)$ является оператором плотности тензора энергии — импульса, он удовлетворяет соотношению

$$2 \left(\frac{\delta \tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)} - \frac{\delta \tau_{\lambda\sigma}(y)}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right) = i [\tau_{\mu\nu}(x), \tau_{\lambda\sigma}(y)] \quad (3)$$

и при бесконечно малом изменении метрики

$$g^{\mu\nu}(x) = g'^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu}(x)$$

играет роль генератора преобразования S -матрицы по функциональному аргументу

$$S = S' \left[1 + \frac{i}{2} \int d^4x \tau_{\mu\nu}(x) |\delta g^{\mu\nu}(x)| \right]. \quad (4)$$

Покажем, что соотношение (2) можно получить без использования тензорных свойств оператора $T_{\mu\nu}(x)$. Действительно, это соотношение возникает, если произвести дифференцирование условия сохранения

$$T_{\mu;\nu}^\nu(x) = 0 \quad (5)$$

по функциональному аргументу $g^{\lambda\sigma}(y)$ (точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование). Таким образом, при преобразованиях координат, не затрагивающих бесконечно удаленных областей, тензорные свойства оператора $T_{\mu\nu}(x)$ проявляются автоматически, как следствие уравнения (5). Дальнейшее функциональное дифференцирование уравнения (5) в «точке» $g_{(x)}^{\mu\nu}(x) = g_{(0)}^{\mu\nu}$, где $g_{(0)}^{\mu\nu}$ — галилеева метрика плоского пространства-времени, приведет к новым УМК, сводящимся к существованию дальнейших вариационных производных оператора $T_{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющих определенным соотношениям.

2. Остановимся на вопросе о связи условия микропричинности в той форме, в которой он сформулирован в [1],

$$\frac{\delta \tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)} = 0 \text{ при } x \leq y \quad (6)$$

(т. е. при $x^0 < y^0$ или $(x-y)^2 < 0$) с условием макропричинности. Прежде всего следует отметить, что в [1] предполагается, что изменение метрики, обращающееся в нуль на минус (плюс) бесконечности во времени, не влияет на вектора состояния в in(out)-базисе. Это предположение и является условием макропричинности. Покажем, что из этого условия следуют некоторые ограничения на $\frac{\delta \tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)}$. Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат в плоском пространстве-времени.

$$x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu(x'), \quad (7)$$

где $\xi^\mu(x') \rightarrow 0$ при $|x'| \rightarrow \infty$, $x'^0 \rightarrow +\infty$ и $\xi^\mu(x') \rightarrow \xi^\mu(\vec{x}') \neq 0$ при $x'^0 \rightarrow -\infty$. Соответствующее тензорное изменение метрики есть

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu;\nu}(x) + \xi^{\nu;\mu}(x), \quad (8)$$

и уравнение (4) имеет вид

$$S = S' \left[1 - \int_{y^0 \rightarrow -\infty} d\sigma_a(y) \tau_\lambda^a(y) \xi^\lambda(\vec{y}) \right].$$

Условия сохранения S -матричного описания и макропричинности приводят к

$$\Psi_{in} = \left[1 + i \int_{y^0 \rightarrow -\infty} d\sigma_a(y) \tau_\lambda^a(y) \xi^\lambda(\vec{y}) \right] \Psi'_{in} \equiv [1 + i\delta U] \Psi'_{in}. \quad (9)$$

Функциональное преобразование $\tau_{\mu\nu}(x)$ при изменении метрического тензора (8) имеет вид

$$\tau_{\mu\nu}(x) = [1 + \delta R - \delta G] \tau'_{\mu\nu}(x),$$

$$\delta R = 2\Phi d\sigma_\alpha(y) \xi^\lambda(y) g_{(0)}^{\alpha\epsilon} \frac{\delta}{\delta g^{\lambda\epsilon}(y)} \rightarrow 2 \int d\sigma_\alpha \xi^\lambda(y) g_{(0)}^{\alpha\epsilon} \frac{\delta}{\delta g^{\lambda\epsilon}(y)}, \quad (10)$$

$$\delta G = 2 \int d^4 y \xi^\lambda(y) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(g_{(0)}^{\alpha\sigma} \frac{\delta}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)} \right).$$

Обозначим через $\bar{\delta}L$ оператор изменения по тензорным индексам при фиксированном значении координаты. УМК в форме (2) как раз означает, что

$$-\delta G \tau'_{\mu\nu}(x) = \bar{\delta}L \tau'_{\mu\nu}(x). \quad (11)$$

Функциональное изменение оператора $\tau_{\mu\nu}(x)$, таким образом, не сводится к тензорному при преобразовании координат, затрагивающем область $x^0 \rightarrow -\infty$, из-за наличия δR . Поэтому нужно постулировать тензорные свойства величины $\langle \Psi_{in} | \tau_{\mu\nu}(x) | \Psi_{in} \rangle$, т. е. мы потребуем, чтобы

$$\langle \Psi_{in} | \tau_{\mu\nu}(x) | \Psi_{in} \rangle = (1 + \bar{\delta}L) \langle \Psi'_{in} | \tau_{\mu\nu}(x) | \Psi'_{in} \rangle$$

или, согласно (9) и (10),

$$[\delta R - \delta G] \tau'_{\mu\nu}(x) = \bar{\delta}L \tau'_{\mu\nu}(x) + i [\delta U, \tau'_{\mu\nu}(x)]. \quad (11')$$

Учитывая (11), а также уравнения (3) и (10) и используя произвол в выборе $\xi^\lambda(y)$ и гиперповерхности интегрирования в (9), получаем

$$\frac{\delta \tau_{\lambda\sigma}(y)}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = 0 \text{ при } y^0 \rightarrow -\infty. \quad (12)$$

Это соотношение устанавливает связь между условиями макро- и микропричинности. Из (2) и (12) может быть получено известное соотношение

$$[\tau_{\mu\nu}(x), P_\lambda] = i \frac{\partial \tau_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}, \quad (13)$$

где $P_\lambda = \int d\sigma_\alpha(y) \tau_\lambda^\alpha(y)$ — импульс системы.

3. За последнее время Швингером опубликован ряд работ ([2—5]), в которых он исследует оператор $T_{\mu\nu}(x)$ в рамках лагранжевой формулировки квантовой теории поля. В этих работах сделан ряд попыток получения перестановочного соотношения

$$-[T^{00}(x), T^{00}(x')] = -i(T^{0k}(x) + T^{0k}(x')) \delta_{,k}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (k=1, 2, 3) \quad (14)$$

между компонентами $T^{00}(x)$ в один и тот же момент времени. Каждый из трех различных выводов соотношения (14), приведенных в работах Швингера, основан на тех или иных дополнительных допущениях частного характера, общность которых не является бесспорной.

Покажем, что исходя только из общих условий микроковариантности и микропричинности, можно получить некоторые строгие соотношения для компонентов $T_{\mu\nu}(x)$, один из которых похож на (14), но не тождествен ему. Ключевым моментом для вывода этих соотношений является введение несколько необычной совокупности бесконечно малых преобразований метрики (4). Именно, будем считать, что $\delta g^{\mu\nu}(x)$ имеет вид

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = (\xi^{\mu;\nu}(x) + \xi^{\nu;\mu}(x) \theta(x^0 - c), \quad (15)$$

где $c = \text{const}$, а $\xi^\mu(x) \rightarrow 0$ при $x^\lambda \rightarrow \pm\infty$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$ и являются достаточно гладкими. По виду это изменение метрики связано с изменением координат (7) тензорным законом, однако наличие обрезającego фактора $\Theta(x^0 - c)$ не допускает такого истолкования. Тем не менее мы используем уравнение (7) для установления закона умножения преобразований (15) с различными $\xi^\mu(x)$. Если каждому преобразованию (15) поставить в соответствие преобразование (7) с теми же $\xi^\mu(x)$, то совокупность преобразований (15) будет обладать более точным групповым свойством, чем совокупность преобразований координат (7). Использование этого обстоятельства и лежит в основе последующего вывода.

Совершим последовательно два преобразования типа (15), характеризующиеся тем, что $\xi^\mu(x) = \xi_1^\mu(x)$, $c = t$ и $\xi^\mu(x) = \xi_2^\mu(x)$, $c = t + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ соответственно.

При $x^0 > t + \varepsilon$ им эквивалентно одно изменение типа (15) с $c = t + \varepsilon$ и $\xi_3^\mu(x)$, определяющими произведение соответствующих преобразований координат, т. е.

$$\xi_3^\mu(x) = \xi_1^\mu(x) + \xi_2^\mu(x) + \xi_1^\nu(x) \xi_{2,\nu}^\mu(x). \quad (16)$$

Предположим, что $\tau_{\mu\nu}$ непрерывны по x^0 . Для функционального изменения S -матрицы можно написать

$$\begin{aligned} S'' & \left[1 - i \int d^4x \tau_{\mu}^0(x) \xi_1^\mu(x) \delta(x^0 - t) \right] \times \\ & \times \left[1 - i \int d^4x \tau_{\nu}^0(y) \xi_2^\nu(y) \delta(y^0 - t - \varepsilon) \right] = \\ & = S'' \left[1 - i \int d^4x \tau_{\nu}^0(x) \xi_3^\nu(x) \delta(x^0 - t - \varepsilon) \right], \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (17)$$

Это уравнение нетривиально только во втором порядке малости, поэтому мы различаем $\tau_{\mu\nu}''(x)$ и $\tau_{\mu\nu}'(x)$, разница между которыми имеет первый порядок малости, $\tau_{\mu\nu}(x) = \tau_{\mu\nu}'(x) + \delta\tau_{\mu\nu}(x)$. Подставляя в уравнение (17) (16), опуская S и штрихи у τ , получаем

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y \xi_1^\mu(x) \xi_2^\nu(y) \delta(x^0 - t) \delta(y^0 - t - \varepsilon) \tau_{\mu}^0(x) \tau_{\nu}^0(y) + \\ & + i \int d^4y \xi_2^\nu(y) \delta(y^0 - t - \varepsilon) \delta\tau_{\nu}^0(y) = \\ & = i \int d^4x \xi_1^\mu(x) \cdot \xi_{2,\mu}^\nu(x) \delta(x^0 - t - \varepsilon) \tau_{\nu}^0(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Выразим $\delta\tau_{\nu}^0(x)$ через компоненты $\tau_{\mu\nu}$, исходя из уравнений (10). Прежде всего, по аналогии с (11), имеем

$$\begin{aligned} \delta G \tau_{\nu}^0(y) & = \delta L \tau_{\nu}^0(y) = \tau_{\nu,\mu}^0(y) \xi_1^\mu(y) - \tau_{\mu}^0(y) \times \\ & \times \xi_{1,\nu}^\mu(y) + \tau_{\nu}^\lambda(y) \xi_{1,\lambda}^0(y) - \tau_{\nu}^0(y) \xi_{1,\lambda}^\lambda(y). \end{aligned}$$

Поскольку нас интересует $\delta\tau_{\nu}^0(y)$ при $y^0 = t + \varepsilon$, можно написать, используя условие микропричинности (10) и соотношение (3),

$$\delta R \tau_{\nu}^0(y) = i \int d^4x \xi_1^\mu(x) \delta(x^0 - t) [\tau_{\mu}^0(x), \tau_{\nu}^0(y)].$$

Подставляя полученное таким образом выражение для $\delta\tau_{\nu}^0(y)$ в уравнение (18), производя вариацию по $\xi_1^\mu(x)$, $\xi_{12}^{0\nu}(y)$, антисимметризуя полученное уравнение, находим

$$\begin{aligned} & \delta(x^0 - t - \varepsilon) \delta(y^0 - t) \tau_0^0(x) \tau_0^0(y) - \delta(x^0 - t) \delta(y^0 - \\ & - t - \varepsilon) \tau_0^0(y) \tau_0^0(x) = i \delta(x^0 - t - \varepsilon) (\tau_0^k(x) \frac{\partial}{\partial y^k} - \\ & - \tau_0^k(y) \delta(x - y)), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегрируя это соотношение по dx^0 , dy^0 , получаем

$$\begin{aligned} & \tau_0^0(t + \varepsilon, x) \tau_0^0(t, y') - \tau_0^0(t, x) = i \left(\tau_0^k(t, x) \frac{\partial}{\partial y^k} - \right. \\ & \left. - \tau_0^k(t, y) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \delta(x - y). \end{aligned}$$

Аналогично, варьируя (18) по другим комбинациям $\xi_1^\mu(x)$, $\xi_2^\nu(y)$, находим после антисимметризации и интегрирования еще два соотношения

$$\begin{aligned} & \tau_0^0(t + \varepsilon, \vec{x}) \tau_j^0(t, \vec{y}) - \tau_j^0(t + \varepsilon, \vec{y}) \tau_0^0(t, \vec{x}) = i \left(\tau_0^0(t, \vec{y}) \frac{\partial}{\partial x^j} + \right. \\ & \left. + \tau_j^k(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \delta(x - y), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \tau_v^0(t + \varepsilon, \vec{x}) \tau_k^0(t, y) - \tau_k^0(t + \varepsilon, y) \tau_v^0(t, \vec{x}) = \\ & = i \left(\tau_j^0(t, y) \frac{\partial}{\partial x^k} - \tau_k^0(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \delta(x - y). \end{aligned} \quad (21)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

Мы воспользовались тем, что $\tau_{\mu, \nu}^v = 0$. Применяя операцию эрмитового сопряжения и используя эрмитовость $\tau_{\mu, \nu}(x)$, левые части соотношений (19) — (21) можно представить в виде, явно обладающем тем свойством антисимметрии, которое должен иметь коммутатор при совпадающих временах. Так, соотношение (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ [\tau_0^0(t + \varepsilon, \vec{x}) \tau_0^0(t, \vec{y})] + [\tau_0^0(t, \vec{x}), \tau_0^0(t + \varepsilon, \vec{y})] = \\ & - i (\tau_0^k(t, \vec{x}) + \tau_0^k(t, \vec{y}) \delta_{k, \vec{k}}(\vec{k} - \vec{y})). \end{aligned} \quad (19')$$

Интегрируя соотношения (19) — (21) по d^3y , получаем уравнения (13) при $v=0$ в силу непрерывности $\tau_{\mu, \nu}(x)$. Может показаться, что из (19') при $\varepsilon=0$ получается коммутационное условие Швингера (14). Однако это соответствовало бы определению коммутатора при совпадающих временах как предела

$$\begin{aligned} & [\tau_\mu^0(t, \vec{x}), \tau_\nu^0(t, y)] = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ [\tau_\mu^0(t + \varepsilon, \vec{x}), \tau_\nu^0(t, y)] + \\ & + [\tau_\mu^0(t, \vec{x}), \tau_\nu^0(t + \varepsilon, \vec{y}')] \}, \end{aligned} \quad (22)$$

для чего нет никаких строгих оснований. Можно сказать, что истинное значение коммутатора при совпадающих временах отличается от выражения (20), определяемого соотношениями (19) — (21), квазилокальными членами. В частности, Швингером показано, что для полей, описывающих свободные частицы со спином $s \geq \frac{1}{2}$, соотношение (14) перестает быть справедливым. Заметим, что в рамках нашего подхода по-

нятен физический смысл того обстоятельства, что коммутатор $\{\tau_{\mu\nu}(x), \tau_{\lambda\sigma}(y)\}$ не имеет универсального выражения, годного для всех частиц. Действительно, это выражение, согласно (3), определяется величинами $\frac{\delta\tau_{\mu\nu}(x)}{\delta g^{\lambda\sigma}(y)}$, описывающими поляризуемость частиц под действием внешнего гравитационного поля, а связь этих величин с $\tau_{\mu\nu}(x)$, вообще говоря, должна зависеть от структуры частиц.

В заключение выражаем благодарность Ю. М. Широкову за участие в обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков Ю. М. ЖЭТФ, 44, 203, 1963.
2. Schuinger J. Phys. Rev., 127, 324, 1962.
3. Schuinger J. Phys. Rev., 130, 406, 1963.
4. Schuinger J. Phys. Rev., 130, 800, 1963.
5. Schuinger J. Nuovo Cimento, 30, 278, 1963.

Поступила в редакцию
29. 2 1964 г.

НИИЯФ