

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1965

УДК 62—502

А. В. БАРАНОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Сложная система рассматривается как совокупность более простых систем (подсистем), связанных между собой посредством распределенных связей. Предлагается общий метод исследования сложной системы по свойствам изолированных подсистем и заданным связям между ними.

В статье [1] для описания сложных систем введены динамические коэффициенты действия (ДКД) и динамические коэффициенты влияния (ДКВ). Было показано, что ДКВ являются удобным средством исследования свойств сложной системы, если они выражены через ДКВ изолированных подсистем. Там же был дан единый алгоритм для выражения ДКВ сложных систем через ДКВ подсистем при произвольной структуре связей между ними. Все это было сделано для случая, когда внешнее воздействие на систему и взаимодействие между подсистемами осуществляется в отдельных точках.

В настоящей статье дается обобщение основных результатов работы [1] на случай, когда внешнее воздействие на подсистемы и их взаимодействие осуществляется по контуру, поверхности и т. п.

§ 1. Определения

Пусть поведение некоторой системы описывается функцией пространственных координат s и времени t : $Q(t, s)$, значение которой в заданные моменты времени можно непосредственно только измерять. Поведение системы $Q(t, s)$ зависит от некоторой другой функции $F(t, r)$, которую в допустимой области можно менять по заданному закону. Эту функцию назовем внешним воздействием.

Предположим, что независимо от предыдущего поведения системы $F(t, r)$ можно выбрать таким образом, что начиная с некоторого момента времени между F и Q устанавливается однозначное соответствие. Такое соответствие может установиться, например, после того, как система приведена в равновесие. Системы, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем определяемыми в отношении F и Q . В дальнейшем рассматриваются только определяемые системы, и для простоты считаем, что s и r содержат по одной переменной. Все приведенные ниже формулы без труда обобщаются на случай, когда s и r содержат несколько переменных.

Для определимых систем с постоянными во времени параметрами можно указать такой алгоритм их исследования, в результате которого уравнения связи между изображениями F и Q получаются в виде

$$\int A(\lambda, \rho, \sigma) q(\lambda, \sigma) d\sigma = f(\lambda, \rho), \quad (1)$$

где q и f — изображения функций Q и F ; λ, σ, ρ — в общем случае комплексные переменные, соответствующие переменным t, s, r . В уравнении (1) имеется в виду интеграл по выбранной области, для простоты записей здесь и далее пределы интегрирования опущены.

Если исследуемый объект описывается системой дифференциальных и интегральных уравнений, то уравнение (1) может быть получено непосредственно переходом от функций времени к их изображениям. Приведем пример такого перехода. Пусть имеем линейное уравнение

$$L[Q(x)] = F(x), \quad (2)$$

где x изменяется в области $[0, \infty]$, L — дифференциальный или интегральный оператор. Используя далее преобразование Лапласа

$$q(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} Q(x) dx,$$

умножая (2) на $e^{-\rho x}$ и интегрируя по x , получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} dx \lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - i\sigma_2}^{\sigma_1 + i\sigma_2} L[e^{\sigma x}] q(\sigma) d\sigma = f(\rho). \quad (3)$$

Меняя в (3) порядок интегрирования, приводим (3) к виду

$$\int A(\rho, \sigma) q(\sigma) d\sigma = f(\rho), \quad (4)$$

где

$$A(\rho, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} L[e^{\sigma x}] dx. \quad (4a)$$

Переход к изображениям в уравнениях с переменными коэффициентами в нелинейных уравнениях и в уравнениях с запаздыванием требует удачного выбора вида преобразования и использования разработанного аппарата операционного исчисления и интегральных преобразований [2].

В случае переменных во времени параметров вместо уравнения (1) получим

$$\iint A(\lambda, \mu, \rho, \sigma) q(\mu, \sigma) d\mu d\sigma = f(\lambda, \rho),$$

т. е. переменные, соответствующие временным и пространственным координатам, оказываются равноправными. В дальнейшем будем рассматривать только уравнения вида (1), опуская зависимость функций от λ . Все полученные формулы легко обобщаются на случай кратных интегралов, если под ρ, σ в (1) понимать вектора.

При переходе от функций времени к их изображениям начальные условия следует считать нулевыми. Решение задач с ненулевыми начальными условиями может быть сведено к решению задачи с нулевыми начальными условиями. Для этого достаточно перенести условно начальный момент времени и подобрать на дополнительном промежутке времени

$[t_1, t_0]$ внешнее воздействие так, чтобы при нулевых начальных условиях в момент t_1 к начальному моменту времени t_0 система пришла в заданные начальные условия.

В общем случае для систем с переменными параметрами и для нелинейных систем функция A может быть оператором от q . В случае линейной системы с постоянными коэффициентами A есть функция λ, ρ, σ . По аналогии с ДКД назовем $A(\rho, \sigma)$ — динамической функцией действия (ДФД). Допустим, что для заданной ДФД $A(\rho, \sigma)$ существует такая функция $\Phi(\lambda, \sigma, \rho)$, что имеет место следующее равенство:

$$\int \Phi(\lambda, \sigma, \rho) f(\lambda, \rho) d\rho = q(\lambda, \sigma). \quad (5)$$

Равенство (5) можно рассматривать как решение интегрального уравнения (1) относительно q . К (5) относятся все замечания, сделанные в отношении уравнения (1). Будем говорить, что $\Phi(\lambda, \sigma, \rho)$ — обратная функция для $A(\lambda, \rho, \sigma)$, и по аналогии с ДКВ назовем ее динамической функцией влияния (ДФВ).

ДФВ легко вычисляется, если известно решение уравнения (2):

$$Q(x) = L^{-1}[F(x)]. \quad (6)$$

Умножая равенство (6) на $e^{-\sigma x}$ и интегрируя по x , получим

$$q(\sigma) = \int \Phi(\sigma, \rho) f(\rho) d\rho,$$

где

$$\Phi(\sigma, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} L^{-1}[e^{\rho x}] dx.$$

ДФВ оказываются удобным средством для исследования как собственного, так и вынужденного поведения систем. Вынужденное поведение может быть исследовано прямо по формуле (5). Несколько сложнее получается решение однородного уравнения. Однако нетрудно убедиться, что если $\Phi(\lambda, \sigma, \rho)$ как функция ρ имеет полюс первого порядка при $\rho = b_1$, то

$$q_1(\lambda, \sigma) = \lim_{b \rightarrow b_1} \Phi(\lambda, \sigma, b) (b - b_1) \quad (7)$$

является решением однородного уравнения.

§ 2. Связанные системы

Пусть имеем N изолированных систем, которые описываются уравнениями вида (1)

$$\int A_{ii} q_i d\sigma = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8)$$

Функции q_i и f_i можно рассматривать как координаты векторов $\bar{q}$ и $\bar{f}$. Введем для интегральной операции (8) условное обозначение

$$\{A_{ii} q_i\} = f_i. \quad (9)$$

Переходя к векторам $\bar{q}$ и $\bar{f}$, (8) условно будем записывать так:

$$\{A\bar{q}\} = \bar{f}. \quad (10)$$

В (10) A рассматриваем как матрицу ДФД. Если мы имеем набор изолированных систем, то эта матрица диагональная. Если теперь изолированные системы связывать между собой каким-либо образом, то в матрице A недиагональные элементы будут отличными от нуля, при этом, возможно, изменятся и диагональные элементы, т. е. в общем случае установление связи приводит к изменению матрицы A .

Если при установлении связи изменяется только один элемент исходной матрицы ДФД, то такую связь будем называть *элементарной распределенной связью*, а разность между соответствующими элементами матриц исходной и связанной систем — функцией связи.

В прикладных задачах часто встречается связь, при установлении которой вместо двух строк, например, l -й и m -й и двух столбцов i -го и k -го получаем одну строку и один столбец, которые представляют собой сумму указанных строк и столбцов соответственно. Такую связь будем называть *распределенной усекающей связью*, а систему — усеченной.

Физический смысл введенных связей почти тот же, что и в [1] для дискретных элементарных и усекающих связей. Отличие лишь в том, что дополнительное воздействие от элементарной связи получается в виде интегральной операции

$$F'_k = \{C_{kl} Q_l\}.$$

Для распределенной же усекающей связи вместо равенства величин имеем функциональные равенства

$$Q_i(t, s) = Q_k(t, s) \quad (11)$$

при условии, что дополнительные воздействия от усекающей связи удовлетворяют равенству

$$F'_e(t, s) = -F'_m(t, s). \quad (12)$$

Примером усекающей связи в механической системе будет жесткая связь двух распределенных систем по некоторой линии, которая в параметрической форме записывается через параметр s .

Введенные понятия позволяют сформулировать следующую задачу. Имеем сложную систему, которая описывается матрицей ДФД. Требуется найти матрицу ДФВ, т. е. матрицу таких функций Φ_{sr} , через которые решение системы интегральных уравнений

$$\{A \bar{q}\} = \bar{f}$$

можно записать в виде

$$\bar{q} = \{\Phi \bar{f}\}.$$

Можно в принципе Φ выразить через ДФД. Однако во многих задачах удобнее выражать Φ через ДФВ подсистем. Для решения этой задачи в самом общем случае достаточно знать, как преобразуются ДФВ некоторой системы при установлении в ней одной элементарной или усекающей распределенной связи. Соответствующие формулы нетрудно получить, но их вывод несколько громоздок. Поэтому воспользуемся формулами, полученными для дискретных элементарной и усекающей связей. Они без труда обобщаются на случай распределенных связей, если только все матричные операции, которые входят в эти формулы, обобщить на функции. Этому обобщению мы и посвящаем следующий параграф.

§ 3. Операции над динамическими функциями

Операции над функциями, которые здесь вводятся, можно рассматривать как обобщение соответствующих операций над матрицами и векторами. Однако это обобщение связано с определенными трудностями, которые, впрочем, при определенных оговорках не мешают почти автоматически обобщить полученные в [1] формулы на системы с определенными связями.

Укажем на некоторые из отмеченных трудностей. В классе ограниченных функций не существует тождественного и обратного интегральных преобразований, аналогичных соответствующим матричным преобразованиям с помощью единичной и обратной матриц. Поэтому можно показать, что ДФД и ДФВ являются неограниченными и уравнение (1) — сингулярным интегральным уравнением. Поэтому строгое математическое обоснование всех изложенных результатов базируется на теории сингулярных интегральных уравнений [3, 4]. В данной статье мы не касаемся математических вопросов и приводим лишь окончательные результаты, используя аналогию с формулами, полученными в [1]. Для практического использования этих результатов достаточно иметь в виду, что все интегралы понимаются в смысле главного значения, а в область интегрирования не включаются полюса первой из функций под знаком интеграла.

Переходим к обобщению некоторых операций над матрицами. Сложению матриц соответствует обычное сложение функций

$$C(\rho, \sigma) = A(\rho, \sigma) + B(\rho, \sigma).$$

Естественным обобщением произведения матриц будет следующая интегральная операция:

$$\int A(\rho, \tau) B(\tau, \sigma) d\tau = \{AB\}.$$

Обобщение тождественного матричного преобразования на интегральные требует ряда оговорок. Дело в том, что в классе ограниченных функций $H(\sigma, \rho)$ тождественное преобразование не выражается в форме

$$\int H(\sigma, \rho) q(\rho) d\rho = q(\sigma).$$

Однако в принятом здесь понимании интегралов при условии, что $q(\rho)$ может быть представлено в виде

$$q(\rho) = \frac{\psi(\rho)}{\prod_{i=1}^N (\rho - \rho_i)}, \quad (13)$$

где $\psi(\rho)$ — полином степени не выше $N-1$, тождественное преобразование осуществляет функция

$$E(\sigma, \rho) = \frac{1}{\sigma - \rho}.$$

Если отмеченное условие не выполнено, то вообще имеем нетождественное преобразование

$$\int E(\sigma, \rho) q(\rho) d\rho = q_1(\sigma).$$

Однако в этом случае оригиналы изображений $q(\sigma)$ и $q_1(\sigma)$ совпадают. Поэтому такое преобразование естественно назвать условно-тождествен-

ным. В дальнейшем считаем, что либо сформулированное выше условие (13) для используемых функций выполнено, либо знак равенства означает лишь совпадение оригиналов правой и левой частей соответствующего равенства.

Отметим одно очевидное равенство

$$\int A(\sigma, \tau) E(\tau, \rho) d\tau = A(\sigma, \rho).$$

Осталось обобщить на функции понятие обратной матрицы. Функцию $\Phi = A^{-1}$ будем называть обратной к A , если имеет место равенство

$$\int A(\sigma, \tau) \Phi(\tau, \rho) d\tau = E(\sigma, \rho).$$

В общем случае вычисление обратных функций представляет собой сложную задачу. Укажем на один общий способ вычисления обратных функций, основанный на обобщении известного матричного равенства

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Используя введенные операции, нетрудно получить подобное равенство для функций

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \{A\}^k \quad (14)$$

при условии, что ряд (14) сходится.

Используя очевидное тождество

$$A^{-1} = \{T(E - A_T)^{-1}\}, \quad (15)$$

где

$$A_T = E - \{AT\}$$

и (14), получим

$$A^{-1} = \{T \sum_{k=0}^{\infty} \{A_T\}^k\}. \quad (16)$$

Функция T в (15), (16) произвольна. Этот произвол можно использовать для улучшения сходимости ряда (16).

§ 4. Основные формулы для распределенных связей

Поскольку все операции над матрицами, которые входят в формулы для дискретных связей [1], обобщены на операции над функциями, то мы без вывода запишем соответствующие формулы для распределенных связей.

Если известна обратная функция Φ для функции A , то обратная функция для $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = A - C$$

может быть получена по формуле

$$\tilde{\Phi} = \{\Phi(E - \{C\Phi\})^{-1}\}. \quad (17)$$

Если исходная система описывается матрицей ДФД и в этой системе устанавливается одна элементарная связь с функцией связи C_{ki} , то элементы матрицы ДФВ связанной системы вычисляются по формуле

$$\tilde{\Phi}_{sr} = \Phi_{sr} + \{\Phi_{sk}(E - \{C_{ki}\Phi_{ik}\})^{-1}C_{ki}\Phi_{ir}\}. \quad (18)$$

Если же в исходной системе устанавливается одна усекающая связь при условиях (11), (12), то элементы матрицы ДФВ усеченной системы выражаются через ДФВ исходной системы следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_{sr} = \Phi_{sr} - \{(\Phi_{sm} - \Phi_{sl})(\Phi_{il} + \Phi_{km} - \Phi_{kl} - \Phi_{im})^{-1}(\Phi_{kr} - \Phi_{ir})\}. \quad (19)$$

Наиболее существенной и сложной операцией в формулах (17—19) является нахождение обратных функций. Для применения (17) можно, например, воспользоваться формулой (14). Тогда получим

$$\tilde{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\Phi \{C\Phi\}^k\}. \quad (20)$$

Если ряд (20) достаточно быстро сходится, то вычисление приближенной обратной функции сводится к конечному числу интегральных операций.

Смысл приведенных формул состоит в том, что ДФВ сколь угодно сложной системы интегральных уравнений могут быть выражены через ДФВ упрощенной системы и функции связи. Такой подход к исследованию сложных систем назовем методом сечений. Метод сечений проиллюстрируем примером.

§ 5. Пример

Получим изложенным методом сечений решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \frac{\partial^m Q_1}{\partial x^m} - a_2 \frac{\partial^2 Q_2}{dt^2} &= F_1(t, x), \\ e^{\beta x} \frac{\partial^n Q_2}{\partial x^n} - a_1 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= F_2(t, x). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i(\lambda, x) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_i(t, x) dt, \\ \tilde{F}_i(\lambda, x) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_i(t, x) dt \end{aligned}$$

и предполагая начальные условия нулевыми, вместо (21) получим

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \frac{d^m \tilde{Q}_1}{dx^m} - a_2 \lambda^2 \tilde{Q}_2 &= \tilde{F}_1(\lambda, x), \\ e^{\beta x} \frac{d^n \tilde{Q}_2}{dx^n} - a_1 \lambda^2 \tilde{Q}_1 &= \tilde{F}_2'(\lambda, x). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее используем преобразования

$$q_i(\lambda, \sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \tilde{Q}_i(\lambda, x) dx,$$

$$f_i(\lambda, \rho) = \int_0^{\infty} e^{-\rho x} \tilde{F}_i(\lambda, x) dx.$$

Для простоты записей зависимость q и $\tilde{f}$ от λ не будем указывать. Изложенным в § 1 методом приводим уравнения (22) к виду

$$\int A_{11}(\rho, \sigma) q_1(\sigma) d\sigma + \int A_{12}(\rho, \sigma) q_2(\sigma) d\sigma = f_1(\rho),$$

$$\int A_{21}(\rho, \sigma) q_1(\sigma) d\sigma + \int A_{22}(\rho, \sigma) q_2(\sigma) d\sigma = f_2(\rho)$$

или в условных обозначениях (10):

$$\{\tilde{A} \bar{q}\} = \bar{f}. \quad (23)$$

Элементы матрицы $\tilde{A}$ вычисляются по формуле (4a) и, следовательно, имеем

$$\tilde{A} = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^m}{\rho - \sigma - \alpha} & -\frac{a_2 \lambda^2}{\rho - \sigma} \\ -\frac{a_1 \lambda^2}{\rho - \sigma} & \frac{\sigma^n}{\rho - \sigma - \beta} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Задача состоит в том, чтобы найти такую матрицу $\tilde{\Phi}$, которая позволяет получить решение системы уравнений (23) в виде

$$\bar{q} = \{\tilde{\Phi} \bar{f}\}.$$

Прямое обращение матрицы функций (24) весьма затруднительно. Применим метод сечений и рассмотрим сначала упрощенную систему, полагая A_{12} и A_{21} равными нулю. Тогда вместо (24) получим матрицу функций упрощенной системы

$$A = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^m}{\rho - \sigma - \alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^n}{\rho - \sigma - \beta} \end{pmatrix}.$$

Обращение этой матрицы не представляет труда, поскольку система распалась на два уравнения, каждое из которых легко решается. Любым из методов, изложенных в § 1, 3, получаем

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma - \rho + \alpha} & \frac{1}{(\rho - \alpha)^m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma - \rho + \beta} & \frac{1}{(\rho - \beta)^n} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Упрощенная система была получена отбрасыванием некоторых членов в уравнениях, что было эквивалентно устранению определенных связей. Теперь последовательно будем восстанавливать связи и получать ДФВ по исходным ДФВ (25) и функциям связи.

На первом этапе рассматриваем промежуточную систему

$$\{A_{11} q_1\} + \{A_{12} q_2\} = f_1,$$

$$\{A_{22} q_2\} = f_2.$$

Таким образом, функция связи в данном случае

$$C_{12} = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_2 \lambda^2}{\rho - \sigma}.$$

ДФВ промежуточной системы Φ_{sr}^* вычисляем по формуле (18)

$$\Phi_{sr}^* = \Phi_{sr} + \{\Phi_{s1}(E - \{C_{12}\Phi_{21}\})^{-1} C_{12}\Phi_{rr}\}.$$

Поскольку $\Phi_{21} = 0$, то имеем

$$\Phi_{sr}^* = \Phi_{sr} + \{\Phi_{s1} C_{12}\Phi_{rr}\}.$$

По этой формуле получаем

$$\begin{aligned} \Phi^*(\sigma, \rho) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{\sigma - \rho + \alpha} & \frac{1}{(\rho - \alpha)^m} & \frac{a_2 \lambda^2}{\sigma - \rho + \alpha + \beta} & \frac{1}{(\rho - \alpha - \beta)^m} & \frac{1}{(\rho - \beta)^n} \\ & 0 & & \frac{1}{\sigma - \rho + \beta} & \frac{1}{(\rho - \beta)^n} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Осталось восстановить последнюю связь, для которой имеем функцию связи

$$C_{21} = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_1 \lambda^2}{\rho - \sigma}.$$

Для вычисления ДФВ полной системы используем ту же формулу (18)

$$\tilde{\Phi}_{sr} = \Phi_{sr}^* + \{\Phi_{s2}^*(E - \{C_{21}\Phi_{12}^*\})^{-1} C_{21}\Phi_{1r}^*\}. \quad (26)$$

Наиболее трудоемкой операцией является вычисление обратной функции. Для ее вычисления применяем формулу (14)

$$(E - \{C_{21}\Phi_{12}^*\})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \{C_{21}\Phi_{12}^*\}^k.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} 2\pi i \{C_{21}\Phi_{12}^*\}^k &= 2\pi i P_k(\tau, \mu) = \\ &= \frac{(a_1 a_2)^k \lambda^{2k}}{[\tau - \mu + k(\alpha + \beta)] \prod_{l=1}^k [\mu - l(\alpha + \beta)]^m \prod_{l=0}^{k-1} [\mu - \beta - l(\alpha + \beta)]}. \end{aligned}$$

По известной обратной функции все ДФВ легко вычисляются по формуле (26). Запишем результат в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k, \quad \Phi_k = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} R_k & N_k \\ S_k & M_k \end{pmatrix}, \\ R_k &= \frac{P_k(\sigma, \rho - \alpha)}{\rho - \alpha}, \quad M_k = \frac{P_k(\sigma, \rho - \beta)}{\rho - \beta}, \\ S_k &= \frac{a_1 \lambda^2}{(\rho - \alpha) [\rho - (k+1)(\alpha + \beta)]} P_k(\sigma + \beta, \rho - \alpha), \\ N_k &= \frac{1}{\rho - \beta} \frac{a_2 \lambda^2}{\rho - (k+1)(\alpha + \beta)} P_k(\sigma + \alpha, \rho - \beta). \end{aligned}$$

Знание Φ позволяет сравнительно просто получить как решение однородной системы (7), так и неоднородной (5). Подставляя решение однородной системы в заданные граничные условия, получим уравнение для собственных значений λ .

Выводы

Получено обобщение результатов, изложенных в [1] на случай распределенных связей. Получены формулы, позволяющие выразить ДФВ сложной системы с распределенными связями через ДФВ изолированных подсистем и функции связи при произвольной структуре связей между ними.

В применении к сложным системам интегральных и дифференциальных уравнений предлагаемый метод сводится к следующему. Отбрасыванием некоторых членов в уравнениях приводят систему к виду, для которого решение известно или сравнительно легко может быть получено. Метод сечений позволяет по решению упрощенной системы и отброшенным членам восстановить полное решение.

Метод сечений оказывается особенно эффективным в задачах, в которых исследуют изменение свойств системы при изменении некоторых ее параметров, поскольку соответствующие выражения дают явную зависимость свойств сложной системы от свойств подсистем и позволяют при каждом новом значении изменяемых параметров повторять сравнительно небольшую часть полного расчета.

Метод может быть использован для исследования влияния принятых в уравнениях идеализаций (например, влияние принятой аппроксимации для функций, входящих в решаемые уравнения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов А. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроф., № 4, 1965.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1946.
4. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., ГИТТЛ, 1950.

Поступила в редакцию
21.4 1964 г.

Кафедра
общей физики для мехмата