

Б. И. МОРГУНОВ

ВЫСШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Развита специализированная схема метода усреднения, позволяющая находить стационарные резонансные колебательные и вращательные режимы нелинейных систем с одной степенью свободы, коэффициенты которых зависят от n произвольных параметров, и исследовать их на устойчивость. Получены уравнения второго приближения для определения стационарных точек, приведены достаточные условия устойчивости этих стационарных режимов.

§ 1. Постановка задачи

В работах [1—3] рассматривались стационарные резонансные колебательные и вращательные режимы нелинейных систем с одной степенью свободы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[m(x) \dot{y}] + Q(x, y) &= \varepsilon f(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= v(x) + \varepsilon \Theta(x, y, \dot{y}, \vartheta, \varepsilon). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь y — одномерная координата, $\dot{y}$ — скорость, $x = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ — совокупность медленно изменяющихся параметров, $Q(x, y)$ — потенциальная сила, вызывающая движение εf , εX , $\varepsilon \Theta$ — малые нелинейные возмущения, $m(x)$ — масса, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, ϑ — функция, описывающая зависимость возмущений от времени. Функции f , X , Θ предполагаются периодическими по ϑ с периодом 2π . Кроме того, в случае вращений предполагается, что все функции, входящие в (1), периодичны по y и Q имеет y нулевое среднее значение. С помощью некоторой замены переменных (подобные преобразования проводились в [2] и [3]) система (1) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \varepsilon M(\mu, x, \vartheta, \psi, \varepsilon), \\ \dot{x} &= \varepsilon X(\mu, x, \vartheta, \psi, \varepsilon), \\ \dot{\vartheta} &= v(x) + \varepsilon \Theta(\mu, x, \vartheta, \psi, \varepsilon), \\ \dot{\psi} &= \omega(\mu, x) + \varepsilon \Psi(\mu, x, \vartheta, \psi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ — некоторый медленно изменяющийся параметр, характеризующий состояние системы (для вращений это энергия системы, для колебаний — амплитудная кривая), ψ — фаза собственных колебаний или вращений, ω — собственная частота системы при $\varepsilon=0$. Явный вид функций, входящих в правые части (2), приведен в [2] — [3].

Мы говорим, что в системе наступает резонанс, если для некоторых значений параметров выполняется равенство

$$p\omega = q\nu, \quad (3)$$

где p и q — взаимно простые целые числа. В работах [1 — 3] рассматриваются вопросы существования и устойчивости стационарных резонансных режимов. При этом под стационарными резонансными режимами, как обычно, понимаются постоянные значения параметров, обладающие тем свойством, что из близости начальных значений возмущенной системы к стационарным значениям следует близость решений в течение длительного времени. В [1—3] рассмотрение проведено в первом приближении по ε (учитываются только члены порядка ε). Настоящая статья посвящена исследованию стационарных резонансных режимов во втором приближении. Рассмотрение второго приближения необходимо в тех случаях, когда по первому приближению нельзя сделать заключения об устойчивости стационарного режима (случай чисто мнимых корней характеристического уравнения). Кроме того, оно позволяет увеличить интервал времени, на котором гарантируется устойчивость. Поставим следующую задачу: получить уравнения второго приближения для определения координат стационарных точек и вывести условия устойчивости стационарных режимов во втором приближении. Для исследования мы будем применять специализированную схему метода усреднения, разработанную в [1]. Резонансные режимы некоторых систем, являющихся частными случаями (1), исследовались другими методами в [4—6].

§ 2. Преобразование исходной системы

Объединим в (2) медленно изменяющиеся переменные μ и x в вектор $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ и перейдем от переменных ϑ и ψ к новым переменным $\varphi = \vartheta - \frac{p}{q}\psi$, $\beta = \frac{1}{q}\psi$, где p и q определяются из (3), переменная φ характеризует фазовую расстройку между фазой собственных колебаний или вращений и фазой внешнего воздействия. Система (2) примет вид

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, \varphi, \beta, \varepsilon),$$

$$\dot{\varphi} = \lambda(x) + \varepsilon \Phi(x, \varphi, \beta, \varepsilon),$$

$$\dot{\beta} = \Omega(x) + \varepsilon B(x, \varphi, \beta, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\Phi = \Theta - \frac{p}{q}\Psi$, $B = \frac{1}{q}\Psi$, $\Omega(x) = \frac{1}{q}\omega(x)$, $\lambda(x) = \nu(x) - \frac{p}{q}\omega(x)$,

причем $\lambda(x_0) = 0$ (x_0 — корень (3)), $X = \{M, X_1, \dots, X_{n-1}\}$, функции X , Φ , B периодичны по φ и β с периодом 2π .

Определим понятие «средних значений» функций, входящих в (4), следующим образом. Пусть $x = x_0$ — корень (3). Тогда при $\varepsilon=0$ имеем: $x = x_0 = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\beta = \beta_0 + \Omega(x_0)(t - t_0)$. Среднее значение функции $X(x, \varphi, \beta, \varepsilon)$ определим так:

$$X_1(x_0, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} X(x_0, \varphi, \beta, \varepsilon) \left| \begin{array}{l} \varphi = \text{const} \\ \beta = \beta_0 + \Omega(x_0)(t - t_0) \end{array} \right. d\beta. \quad (5)$$

Тогда $X(x_0, \varphi, \beta, \varepsilon) = X_1(x_0, \varphi, \varepsilon) + X_2(x_0, \varphi, \beta, \varepsilon)$, где $X_2 = X - X_1$. (Средние значения функции Φ и B вводятся аналогично.) Мы определили средние значения только для $x = x_0$, так как при $x \neq x_0$, вообще говоря, $\lambda(x) \neq 0$ и φ в нулевом приближении не является постоянной. Тем не менее мы будем сейчас рассматривать их как функции от x , чтобы найти замену переменных, позволяющую провести преобразование системы (2) вполне корректным путем.

Разложим правые части (4) по степеням ε и удержим только члены первого и второго порядка. Мы приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X_1^{(0)}(x, \varphi) + \varepsilon X_2^{(0)}(x, \varphi, \beta) + \varepsilon^2 X_1^{(1)}(x, \varphi) + \varepsilon^2 X_2^{(1)}(x, \varphi, \beta), \\ \dot{\varphi} &= \lambda(x) + \varepsilon \Phi_1^{(0)}(x, \varphi) + \varepsilon \Phi_2^{(0)}(x, \varphi, \beta) + \varepsilon^2 \Phi_1^{(1)}(x, \varphi) + \varepsilon^2 \Phi_2^{(1)}(x, \varphi, \beta), \\ \dot{\beta} &= \Omega(x) + \varepsilon B^{(0)}(x, \varphi, \beta) + \varepsilon^2 B^{(1)}(x, \varphi, \beta), \end{aligned} \quad (6)$$

где введены средние значения в смысле (5). Произведем в (6) формальную замену

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u, \quad (\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon \bar{x} u_2(\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon^2 U_1(\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon^2 \bar{x} U_2(\bar{\varphi}, \beta), \\ \varphi &= \bar{\varphi} + \varepsilon \vartheta, \quad (\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon \bar{x} \vartheta_2(\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon^2 V_1(\bar{\varphi}, \beta) + \varepsilon^2 \bar{x} V_2(\bar{\varphi}, \beta), \end{aligned} \quad (7)$$

приводящую (6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon X_1^{(0)}(\bar{x}, \bar{\varphi}) + \varepsilon^2 X_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{\varphi}) + O(\varepsilon^3), \\ \dot{\bar{\varphi}} &= \lambda(\bar{x}) + \varepsilon \Phi_1^{(0)}(\bar{x}, \bar{\varphi}) + \varepsilon^2 \Phi_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{\varphi}) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (8)$$

Для функций $u_i(\bar{\varphi}, \beta)$, $\vartheta_i(\bar{\varphi}, \beta)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \Omega_0 \frac{\partial(u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta} &= X_{20}^{(0)}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial(u_1 + x_0 u_2)}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial(u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta} + \Omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \beta} &= \frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial x_0}, \\ \Omega_0 \frac{\partial(\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \beta} &= \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial(\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial(\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \beta} + \Omega_0 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} &= \\ &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

(Нуль в индексе означает, что функция берется при значении $x = x_0$.) Решения уравнений (9), периодические по β с периодом 2π и имеющие по β нулевые средние значения, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_i(\bar{\varphi}, \beta) &= G[A_i], \quad \vartheta_i(\bar{\varphi}, \beta) = G[B_i], \\ G[f] &= \int_{\beta_0}^{\beta} f(\bar{\varphi}, \beta) d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} \left(\int_{\beta_0}^{\beta} f(\bar{\varphi}, \beta) d\beta \right) d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\Omega_0} X_{20}^{(0)} - \frac{1}{\Omega_0} x_0 \frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial x_0} + \frac{1}{\Omega_0^2} x_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} X_{20}^{(0)} + \frac{1}{\Omega_0^2} x_0 \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} G \left[\frac{\partial X_{20}^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} \right], \\
A_2 &= \frac{1}{\Omega_0} \frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial x_0} - \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} X_{20}^{(0)} - \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} G \left[\frac{\partial X_{20}^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} \right], \\
B_1 &= \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)} \right) - \frac{1}{\Omega_0} x_0 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_0} \right) + \frac{1}{\Omega_0^2} x_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\Omega_0^2} x_0 \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} G \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)} \right) \right], \quad (10) \\
B_2 &= \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial x_0} \right) - \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \cdot \\
&\quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)} \right) - \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} G \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \Phi_{20}^{(0)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Для определения $U_i(\bar{\varphi}, \beta)$, $V_i(\bar{\varphi}, \beta)$ получаем систему, аналогичную системе (9),

$$\begin{aligned}
\Omega_0 \frac{\partial (U_1 + x_0 U_2)}{\partial \beta} &= X_{20}^{(1)} + \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial X_0^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2) - \\
&\quad - u_2 X_{10}^{(0)} - \Phi_{10}^{(0)} \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + B_0^{(0)} \right), \\
\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial (U_1 + x_0 U_2)}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial (U_1 + x_0 U_2)}{\partial \beta} + \Omega_0 \frac{\partial U_2}{\partial \beta} &= \frac{\partial X_2^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x_0} u_2 + \\
&\quad + \frac{\partial X_0^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} \vartheta_2 + \frac{\partial^2 X^{(0)}}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial^2 X^{(0)}}{\partial x_0 \partial \bar{\varphi}} (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2) - \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0} - \\
&\quad - \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta} \frac{\partial B^{(0)}}{\partial x_0} - u_2 \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} - \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\varphi}} \Phi_{10}^{(0)} - \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta}, \quad (11) \\
&\quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) \right) - \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + B_0^{(0)} \right) + \\
&\quad + \left[\frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} - \frac{\partial (u_1 + x_0 u_2)}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 X_2^{(0)}}{\partial x_0^2} \right] \delta x, \\
\Omega_0 \frac{\partial (V_1 + x_0 V_2)}{\partial \beta} &= \Phi_{20}^{(1)} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} (U_1 + x_0 U_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2)^2 + \\
&\quad + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2) - \vartheta_2 X_{10}^{(0)} - \\
&\quad - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \bar{\varphi}} \Phi_{10}^{(0)} - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) + B_0^{(0)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial (V_1 + x_0 V_2)}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial (V_1 + x_0 V_2)}{\partial \beta} + \Omega_0 \frac{\partial V_2}{\partial \beta} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} U_2 + \\
& + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (U_1 + x_0 U_2) + \frac{\partial \Phi_2^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) u_2 + \\
& + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial \bar{\varphi}} \vartheta_2 + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \\
& + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_0 \partial \bar{\varphi}} (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x_0^3} (u_1 + x_0 u_2)^2 - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0} - \\
& - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} u_2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial B^{(0)}}{\partial x_0} \right) - \\
& - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \bar{\varphi}} \Phi_{10}^{(0)} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} \left(B_0^{(0)} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} (u_1 + x_0 u_2) \right) - \vartheta_2 \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} + \\
& + \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} u_2 + u_2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x_0^3} (u_1 + x_0 u_2) + \frac{\partial^2 \Phi_2^{(0)}}{\partial x_0^2} - \right. \\
& \quad - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} - \frac{\partial (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2)}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} - \\
& \quad \left. - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \bar{\varphi}} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} \right] \delta x.
\end{aligned}$$

Для уравнений (11) нетрудно получить формулы решений типа (10).
Произведем в (8) замену переменных:

$$\bar{x} = x(\varepsilon) + z, \quad \bar{\varphi} = \varphi(\varepsilon) + y, \quad (12)$$

где $x(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ — координаты резонансной точки во втором приближении:

$$\begin{aligned}
x(\varepsilon) &= x_0 + \varepsilon \delta x + \varepsilon^2 \bar{\delta} x, \\
\varphi(\varepsilon) &= \varphi_0 + \varepsilon \delta \varphi + \varepsilon^2 \bar{\delta} \varphi.
\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь x_0 , φ_0 определяются из уравнений первого приближения:

$$X_1^{(0)}(x_0, \varphi_0) = 0, \quad \lambda(x_0) = 0,$$

величины δx , $\delta \varphi$, $\bar{\delta} x$, $\bar{\delta} \varphi$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned}
& \Phi_1^{(0)}(x_0, \varphi_0) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \delta x = 0, \\
& \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} \delta x + \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \delta \varphi + X_1^{(1)}(x_0, \varphi_0) = 0, \\
& \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \bar{\delta} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} \delta^2 x + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0} \bar{\delta} x + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \delta \varphi + \Phi_1^{(1)}(x_0, \varphi_0) = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

Последнего уравнения (14) недостаточно для нахождения $\bar{\delta} x$, $\bar{\delta} \varphi$. Однако мы не выписываем здесь недостающих уравнений, поскольку эти величины не потребуются в дальнейшем.

В новых переменных система (8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \left[\varepsilon \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial x_0^2} \delta x + \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} \delta \varphi \right) \right] z + \\ & + \left[\varepsilon \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} \delta x + \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0^2} \delta \varphi \right) \right] y + \\ & + 0 (\varepsilon^3 + \varepsilon z^2 + \varepsilon y^2), \\ \dot{y} = & \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} \delta x + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} \overline{\delta x} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \lambda}{\partial x_0^3} \delta^2 x + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0^2} \delta x + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} \delta \varphi + \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x_0} \right) \right] z + \\ & + \left[\varepsilon \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} \delta x + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0^2} \delta \varphi \right) \right] y + \\ & + 0 (\varepsilon^3 + z^2 + \varepsilon y^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Мы привели исходную систему к виду (15), удобному для исследования стационарных режимов на устойчивость, но при этом пользовались формальными преобразованиями. Однако из формул (7), (12), (13) нетрудно найти замену переменных, позволяющую перейти к системе (15) вполне корректным путем. Такая замена переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} x = & x_0 + z + \varepsilon \delta x + \varepsilon (u_1 + x_0 u_2) + \varepsilon z u_2 + \\ & + \varepsilon^2 \delta x u_2 + \varepsilon^2 \overline{\delta x} + \varepsilon (U_1 + x_0 U_2) + \varepsilon^2 z U_2, \\ \varphi = & \varphi_0 + y + \varepsilon \delta \varphi + \varepsilon (\vartheta_1 + x_0 \vartheta_2) + \varepsilon z \vartheta_2 + \\ & + \varepsilon^2 \delta x \vartheta_2 + \varepsilon^2 \overline{\delta \varphi} + \varepsilon^2 (V_1 + x_0 V_2) + \varepsilon^2 z V_2. \end{aligned} \quad (16)$$

При проведении преобразования (16) все функции берутся при значении $x = x_0$, и явные выражения для функций, входящих в (16), известны.

Преобразования этого параграфа представляют собой специализированную схему усреднения, разработанную для первого приближения в [1].

§ 3. Устойчивость стационарных режимов

Мы нашли уравнения второго приближения для определения координат стационарной резонансной точки во втором приближении. Исследование этих режимов на устойчивость сводится к исследованию устойчивости тривиального решения системы (15). Основным условием, обеспечивающим устойчивость стационарных резонансных режимов (13), является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения:

$$\text{Det} (A - kE) = 0, \quad (17)$$

где A — матрица коэффициентов линейной части системы (15), E — единичная матрица соответствующей размерности. Для случая, когда медленные параметры в (1) отсутствуют (в (4) единственным параметром x является энергия для вращательных режимов и амплитудная кри-

вая колебательных режимов), условие отрицательности вещественных частей корней (17) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial \varphi_0} - \left(\frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} \right) \Phi_{10}^{(0)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \right)^{-1} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial x_0 \partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0^2} \right) \left[\Phi_{10}^{(0)} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \right)^{-1} - X_{10}^{(1)} \left(\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \right)^{-1} \right] \right\} < 0, \\ & \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x_0} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0 \partial x_0} \Phi_{10}^{(0)} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_0^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \right)^{-1} \Phi_{10}^{(0)} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0^2} \left[\Phi_{10}^{(0)} \frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial x_0} \left(\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \right)^{-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - X_{10}^{(1)} \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \left(\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial \varphi_0} \right)^{-1} \right] \right\} < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

При выполнении основного условия устойчивости (18) и при некоторых других ограничениях типа условий гладкости, которые здесь не формулируются, стационарный резонансный режим (13) является устойчивым в следующем смысле: для сколь угодно большого $T > 0$ и сколь угодно малого $\eta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что из выполнения условия $\max |x(t_0) - x_0, \varphi(t_0) - \varphi_0| < \delta$ для всех моментов времени $t_0 \leq t \leq T$ вытекает неравенство $\max |x(t) - x_0, \varphi(t) - \varphi_0| < \eta$.

Здесь $x(t), \varphi(t)$ — решение системы (4). Приведенное утверждение можно уточнить: если начальные данные для системы (4) задавать в $\varepsilon^{3/4}$ -окрестности стационарной резонансной точки, то решение не покинет ε -окрестности стационарной точки за время порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Рассмотрение устойчивости стационарных режимов в первом приближении (см. [1—3]) позволяет утверждать, что решение останется в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности стационарной точки на интервале времени порядка $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, если в начальном момент времени оно находилось в ε -окрестности стационарной точки.

Мы видим, что рассмотрение второго приближения позволяет увеличить интервал времени, на протяжении которого исследуется поведение системы. Аналогичные результаты могут быть сформулированы и для общего случая, когда коэффициенты системы зависят от любого числа медленно изменяющихся параметров.

Отметим, что подобные результаты могут быть получены и для приближений более высокого порядка.

В заключение приношу благодарность В. М. Волосову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 153, № 3, 559—561, 1963.
2. Моргунов В. И. ДАН СССР, 155, № 2, 277—280, 1964.
3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 156, № 1, 1964.
4. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев, 1955.
5. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 3, № 1, 145—158, 1963.
6. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и мат. физ.», 3, № 1, 131—144, 1963.