Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1965

УДК 539.125.516.4

И. М. ТЕРНОВ, Б. А. ЛЫСОВ, Л. И. КОРОВИНА

К ТЕОРИИ β-РАСПАДА НЕЙТРОНА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуется вопрос о влиянии постоянного и однородного магнитного поля на энергетический спектр и поляризацию электронов распада неполяризованного нейтрона, находящегося в этом поле, а также оценивается зависимость полной вероятности распада от величины магнитного поля.

Известно, что спектр электронов распада свободного нейтрона определяется объемом фазового пространства, соответствующего распределению энергии между электроном и нейтрино. Внешнее магнитное поле существенно меняет характер движения заряженных частиц, что должно сказаться на структуре фазового пространства и тем самым повлиять на характер β-распада. Ниже исследуется вопрос о влиянии постоянного и однородного магнитного поля на энергетический спектр и поляризацию электронов распада неполяризованного нейтрона, находящегося в этом поле, а также оценивается зависимость полной вероятности распада от величины магнитного поля.

Учитывая, что энергия, выделяемая в β-распаде нейтрона, гораздо меньше значений энергии, при которых проявляется электромагнитная структура нуклона, мы будем считать нуклон точечным, а также пренебрежем поправками, обусловленными аномальным магнитным моментом.

Для анализа слабого взаимодействия, ответственного за β-распад нейтрона, мы воспользуемся теорией нейтрино с ориентированным спином А. А. Соколова [1—2].

В этой теории гамильтониан слабого взаимодействия для процесса распада покоящегося нейтрона имеет вид

$$H_{\text{сл}} = \sum_j G_j (\psi_p^+ O_j \psi_n)\ (\psi_e^+ O_j \psi_{\tilde{\nu}}), \tag{1}$$

где в нерелятивистском приближении по энергии нуклонов в случае $V-A$ варианта* $G_A = -1{,}18\, G_V$,[9] $O_V = I$, $O_A = \vec{\sigma}$, а 4-компонентную волновую функцию электронного антинейтрино следует взять в виде [3]

$$\psi_{\tilde{\nu}} = \frac{L^{-3/2}}{2}\, e^{ic\varkappa t - i\vec{\varkappa}\vec{r}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix},$$

* Мы пренебрегаем «слабым магнетизмом» и «эффективным псевдоскаляром», как это обычно делается при рассмотрении распада нейтрона.

$$f_1 = -(\varkappa_1 - i\varkappa_2)\ (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{\varkappa_3}{\varkappa}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

$$f_2 = \left(1 + \frac{\varkappa_3}{\varkappa}\right)^{1/2}.$$

Здесь $c\hbar\varkappa$ и $\hbar\varkappa$ — энергия и импульс антинейтрино. При наличии магнитного поля с учетом сделанных замечаний волновая функция как электрона, так и протона подчиняется уравнению Дирака

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\,(\vec{\alpha}\vec{\mathscr{P}}) - \rho_3 m_0 c^2\right) \psi_{e,p} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{\mathscr{P}} = -i\hbar\vec{\nabla} \pm \frac{e_0}{c}\vec{A}$. Здесь верхний знак соответствует электрону $e = -e_0$, а нижний — протону $e = e_0$.

В декартовых координатах (магнитное поле $\vec{\mathscr{H}}$ направлено по оси z) решение уравнения (3) имеет вид

$$\psi_e = \frac{1}{L} e^{-icKt + ik_3 z + ik_2 y} \begin{cases} C_1 & U_{n-1}(\xi) \\ iC_2 & U_n(\xi) \\ C_3 & U_{n-1}(\xi) \\ iC_4 & U_n(\xi) \end{cases}$$

$$\psi_p = \frac{1}{L} e^{-icK't + ik_3' z - ik_2' y} \begin{cases} C_1' U_{n'}(\xi') \\ -iC_2' U_{n'-1}(\xi') \\ C_3' U_{n'}(\xi') \\ -iC_4' U_{n'-1}(\xi') \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\gamma = \frac{e_0\mathscr{H}}{c\hbar}$, $\xi = \sqrt{\gamma}\, x + \frac{k_2}{\sqrt{\gamma}}$, а $U_n(\xi)$ связана с полиномами Эрмита соотношением

$$U_n(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\ e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi). \tag{5}$$

Волновая функция (4) является собственной функцией трех коммутирующих операторов [4]: оператора Гамильтона $\mathscr{H}$, оператора проекции импульса на направление поля $\hat{\mathscr{P}}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ и оператора $\hat{x}_0$ координаты центра вращения электрона $\hat{x}_0 = \frac{i}{\gamma}\frac{\partial}{\partial y}$. Собственные значения этих операторов соответственно определяются из уравнений $\hat{\mathscr{H}}\psi = c\hbar K\psi$, $\hat{\mathscr{P}}_z\psi = \hbar k_3\psi$, $\hat{x}_0\psi = x_0\psi$. При этом $K = \sqrt{k_0^2 + k^2}$, $k^2 = k_3^2 + 2\gamma n$, $k_3 = \frac{2\pi}{L} m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $x_0 = -\frac{k_2}{\gamma}$.

Спиновые коэффициенты C_i подчинены уравнению Дирака (3) и связаны условием нормировки $\sum_i |C_i|^2 = 1$, однако конкретный вид их остается неопределенным и зависит от выбора соответствующего спино-

вого оператора. Поэтому подчиним их еще одному дополнительному соотношению [5]:

$$(\vec{\sigma}\,\vec{\hat{P}})\,\psi_{e,p} = \hbar s k \psi_{e,p}. \tag{6}$$

Здесь $s = \pm 1$ — собственные значения оператора проекции спина на кинетический импульс $\frac{(\vec{\sigma}\vec{\hat{P}})}{k}$ [6], причем $s = +1$ соответствует поляризации спина по направлению движения электрона и $s = -1$ — против движения. При этом коэффициенты C_i, фигурирующие в (4), будут равны:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2} s \left(1 + \frac{k_0}{K}\right)^{1/2} \left(1 + s\frac{k_3}{k}\right)^{1/2}, \\
C_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_0}{K}\right)^{1/2} \left(1 - s\frac{k_3}{k}\right)^{1/2}, \\
C_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_0}{K}\right)^{1/2} \left(1 + s\frac{k_3}{k}\right)^{1/2}, \\
C_4 &= \frac{1}{2} s \left(1 - \frac{k_0}{K}\right)^{1/2} \left(1 - s\frac{k_3}{k}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Можно показать, что имеет место формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\varkappa_1 x} U_n\left(\sqrt{\gamma}\, x + \frac{k_2}{\sqrt{\gamma}}\right) U_{n'}\left(\sqrt{\gamma}\, x + \frac{k_2'}{\sqrt{\gamma}}\right) =$$

$$= e^{i(\mu + (n-n')\lambda)} I_{n',n}\left(\frac{\varkappa_1^2 + (k_2' - k_2)^2}{2\gamma}\right), \tag{8}$$

где $\mu = \frac{1}{2\gamma}\varkappa_1 (k_2' + k_2)$, а $\lambda = \operatorname{arg\,tg} \frac{\varkappa_1}{k_2' - k_2}$, а $I_{n',n}(\xi)$ и полиномы Лагерра $Q_n^l(\xi)$ связаны соотношением

$$I_{n',n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n', n'}}\, e^{-\frac{\xi}{2}}\, \xi^{\frac{n'-n}{2}}\, Q_n^{n'-n}(\xi). \tag{9}$$

Учитывая формулы (1)—(8) для проинтегрированного по пространству матричного элемента β-распада нейтрона, найдем

$$\begin{aligned}
M = \frac{1}{8\sqrt{2}\,L^3} e^{i\mu + i(n-n')\lambda} \{ &(G_V + G_A)\,[\varphi_1 f_1 C_1' (C_1 - C_3)\, e^{-i\lambda} I_{n',n-1}(\xi) + \\
&+ \varphi_2 f_2 C_2' (C_2 - C_4)\, e^{i\lambda} I_{n'-1,n}(\xi)] + i\,(G_V - G_A)\,[\varphi_2 f_1 C_2' (C_1 - C_3)\, I_{n'-1,n-1}(\xi) - \\
&- \varphi_1 f_2 C_1' (C_2 - C_4)\, I_{n',n}(\xi)] + 2iG_A\,[\varphi_1 f_2 C_2' (C_1 - C_3)\, I_{n'-1,n-1}(\xi) - \\
&- \varphi_2 f_1 C_1' (C_2 - C_4)\, I_{n',n}(\xi)]\}\, \delta_{k'_3 + k_3, -\varkappa_3} \cdot \delta_{k'_2 - k_2, \varkappa_2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь нештрихованные и штрихованные величины относятся к электрону и протону соответственно, а $\varphi_1 = s_n \sqrt{1 + s_n}$, $\varphi_2 = \sqrt{1 - s_n}$, где $s_n = \pm 1$ характеризует проекцию спина нейтрона на направление магнитного поля.

Матричный элемент (10) и вероятность распада для неполяризованного нейтрона связаны соотношением

$$W = \frac{\pi}{c\hbar^2} \sum M^+ M \delta(k_{on} - K' - K - \varkappa), \tag{11}$$

где $k_{on} = \frac{m_{on}c}{\hbar}$, m_{on} — масса покоя нейтрона. Суммирование в этой формуле проводится по всем значениям s_n, s_p, s_e, $\vec{\varkappa}$, k_2, k_3, k_2', k_3', n, n'. В нерелятивистском приближении по энергии нуклонов, для которого лишь и справедлива полученная выше формула (10), мы должны положить $K' = k_0'$, при этом n' не будет входить в аргумент δ-функции, так что суммирование по n' в формуле (11) необходимо проводить от 0 до бесконечности. Учитывая, далее, что

$$\sum_{n'=0}^{\infty} I_{n',l}(\xi)\, I_{n',n}(\xi) = \begin{cases} \delta_{n,l} & n, l = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & n = -1 \text{ или } l = -1, \end{cases} \tag{12}$$

приведем (11) к виду $W = W_1 + W_2$,

$$W_1 = B \sum_{s_e} \sum_{n \geqslant 1} \int dk_2 \int dk_3 \left(1 - s_e \frac{k}{K}\right) (\Delta - K)^2,$$

$$W_2 = \frac{B}{2} \sum_{s_e} \int dk_2 \int dk_3 \left(1 - s_e \frac{k_3}{|k_3|}\right) \left(1 + \frac{k_3}{K_0}\right) (\Delta - K_0)^2, \tag{13}$$

где $K_0 = \sqrt{k_0^2 + k_3^2}$, нормировочный коэффициент B равен $B = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{16\pi^3 c\hbar^2 L}$, а область изменения переменных n, k_2, k_3 определяется законом сохранения энергии

$$k_{on} - k_0' = \Delta = K - \varkappa. \tag{14}$$

Заметим, что выражение для энергии электрона (5) не зависит от величины k_2, определяющей положение центра орбиты вращения электрона. Поэтому условие (14) не содержит ограничений на изменение величины k_2 и в силу этого при суммировании (13) по всем возможным значениям k_2 мы получаем расходимость.

Чтобы устранить эту фиктивную расходимость, будем считать, что волновая функция электрона (4) отлична от нуля лишь внутри нормировочного куба с ребром L. При этом в пределе $L \to \infty$ вклад в интеграл по k_2 в формуле (13) будут давать лишь значения, заключенные в области от $-\frac{\gamma L}{2}$ до $\frac{\gamma L}{2}$, поэтому

$$\frac{1}{L} \int_{k_{2\min}}^{k_{2\max}} dk_2 = \frac{1}{L} \int_{-\frac{\gamma L}{2}}^{\frac{\gamma L}{2}} dk_2 = \gamma.$$

Исследуем теперь влияние магнитного поля на спектр энергии электронов распада. Для этого выполним в (13) суммирование по спину электрона и вместо переменной k_3 введем переменную K, тогда

$$W = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{4\pi^3 c\hbar^2} \gamma \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n,0}\right) \int_{K_n}^{\Delta} \frac{K(\Delta - K)^2\, dK}{\sqrt{K^2 - K_n^2}}, \tag{15}$$

где $K_n^2 = k_0^2 + 2\gamma n$,

$$N = \left[\frac{\Delta^2 - k_0^2}{2\gamma}\right]. \tag{16}$$

(Здесь введено обозначение [x] — целая часть x.).

Как непосредственно следует из (15), наличие магнитного поля приводит к резонансному характеру спектра электронов распада. Резонанс имеет место в тех случаях, когда электрон после распада захватывается на плоскую орбиту (проекция импульса электрона на направление поля $k_3=0$). Число резонансов в силу (16) изменяется обратно пропорционально величине поля. Далее из соотношения (16) следует, что для полей, превышающих некоторое критическое значение, которое определяется из условия $\gamma_{кр} = \frac{1}{2}(\Delta^2 - k_0^2)$, т. е. $\mathscr{H}_{кр} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta}{k_0}\right)^2 - 1\right]\mathscr{H}_0$, где $\mathscr{H}_0 = \frac{m_0^2 c^3}{e_0 \hbar} = 4{,}4 \cdot 10^{13}$ *эрст*, имеется один единственный резонанс при $K = k_0$ и спектр энергии в этом случае не зависит от величины поля. Интересно отметить, что электрон, находящийся в полях, близких по величине к критическому, должен двигаться по орбите, радиус которой $R \sim \frac{1}{k_0}$ лишь на порядок больше так называемого вакуумного радиуса электрона [7], равного

$$R_{вак} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^{1/2} \frac{\hbar}{m_0 c}.$$

Перейдем теперь к вопросу о полной вероятности распада. Формулу (15) можно записать в виде

$$W = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{4\pi^3 c\hbar^2}\gamma\left\{\sum_{n=0}^{N} f(n) - \frac{1}{2} f(0)\right\}, \tag{17}$$

$$f(n) = \int_0^{\sqrt{\Delta^2 - k_0^2 - 2\gamma n}} \left(\Delta - \sqrt{k_0^2 + x^2 + 2\gamma n}\right)^2 dx. \tag{18}$$

Учитывая далее [8], что

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = \int_0^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(N) + f(0)] + \int_0^N Q(x) f''(x)\,dx, \tag{19}$$

где $Q(x)$ — периодическая функция $Q(x+1) = Q(x)$, равная $Q(x) = \frac{x}{2}(1-x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, получаем следующую оценку для W в случае, когда $\frac{\gamma}{\Delta^2} \ll 1$,

$$W = \frac{(G_V^2 + 3G_A^2)\Delta^5}{120\pi^3 c\hbar^2}\left[0{,}47 + 9{,}7\,a\left(\frac{\gamma}{\Delta^2}\right)^2\right], \tag{20}$$

где коэффициент a имеет порядок единицы. Здесь мы приняли во внимание, что $0 \leqslant Q(x) \leqslant \frac{1}{8}$ и, следовательно, имеет место оценка

$$\gamma \int_0^N Q(x) f''(x)\,dx = a\frac{\gamma}{8}\{f'(N) - f'(0)\},$$

причем $f'(N)$ при $\frac{\gamma}{\Delta^2} \ll 1$ — величина более высокого порядка по γ, чем $f'(0)$.

Первое слагаемое в (20) представляет собой вероятность свободного распада. Таким образом, вероятность распада нейтрона при наличии магнитного поля больше вероятности распада свободного нейтрона, причем в полях, малых по сравнению с критическим, она растет пропорционально квадрату поля. При $\gamma = \gamma_{кр}$ отношение этих вероятностей достигает значения $\frac{W}{W_{св}} = \frac{5\gamma_{кр}}{\Delta^2} = 2{,}1$ и с дальнейшим увеличением поля W растет линейно, как это следует из формулы (17).

Исследование поляризационных эффектов приводит, согласно формуле (13), к рассмотрению двух членов, каждый из которых по-разному влияет на поляризацию электронов распада. При малых полях $\mathcal{H} \ll \mathcal{H}_{кр}$, когда вероятность распада определяется первым членом W_1, электроны оказываются левополяризованными (спин направлен против движения электрона). Степень поляризации в этом случае

$P = \frac{w_{+1} - w_{-1}}{w_{+1} + w_{-1}} = -\frac{v}{c}$ совпадает с соответствующей величиной свободного β-распада.

Для полей $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}_{кр}$ спин вылетающих электронов ориентирован против направления магнитного поля, причем степень поляризации равна $P = -\frac{k_3}{|k_3|}$. Таким образом, электроны, движущиеся в направлении поля, полностью левополяризованы, а движущиеся против поля — полностью правополяризованы.

Однако следует заметить, что вероятность вылета электронов в зависимости от направления магнитного поля оказывается различной. Действительно, как это следует из формулы (13), вероятность вылета электронов пропорциональна $1 + \frac{k_3}{K_0} = 1 \pm \frac{|k_3|}{K_0} = 1 \pm \beta$, где знак плюс относится к движению электрона по оси z (по полю), и знак минус — соответственно к движению электрона против оси z (против поля).

Авторы выражают признательность профессору А. А. Соколову за дискуссию результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А. ЖЭТФ, **33**, 794, 1957.
2. Sokolov A. A. Nucl. Phys., **9**, 420, 1959.
3. Sokolov A. A. Phys. Lett., **3**, 211, 1963.
4. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. ЖЭТФ, **23**, 632, 1952.
5. Sokolov A. A. J. Phys., USSR, **9**, 363, 1945.
6. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.
7. Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. «Изв. АН УССР», № 5, 10, 1946.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. ГИТТЛ, 1949, стр. 275—279.
9. L. Adler Stephen. Phys. Rev. Lett., **14**, No 25, 1965.

Поступила в редакцию
26. 5 1964 г.

Кафедра
теоретической физики