Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1965

УДК 521.2

А. М. МИКИША, Ф. А. ЦИЦИН

О ФОРМУЛЕ ДЛЯ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ

Указана ошибка в распространенной трактовке формулы для времени релаксации в динамике звездных систем. Рассматриваются некоторые звездно-динамические следствия устранения этой ошибки.

1. В динамике звездных систем к наиболее важным результатам теории принадлежит формула для времени релаксации T. Одно из нескольких примерно эквивалентных определений T таково: время релаксации есть время, в течение которого среднее значение изменения скорости звезды $(\overline{\Delta V})$ в результате сближений станет равным величине средней скорости $(\overline{V})$. В одной из типичных записей [1] формула для времени релаксации имеет вид

$$T=\frac{(\overline{V})^2}{8\pi G^2\overline{M}^2 D\left(\overline{\frac{1}{V}}\right)\cdot\ln\frac{b_2}{b_1}}. \quad (1)$$

Здесь M, V и D характеризуют соответственно массу объектов, их скорости и число их в единице объема; величины b_1 и b_2 — соответственно наименьшее и наибольшее прицельное расстояние сближения. Формула (1) получается посредством ряда интегрирований, в том числе и по прицельным расстояниям сближений.

В настоящей работе исследуется логарифмический член в знаменателе, который в дальнейшем будет обозначаться через $I(b_1, b_2)$.

Формула (1) теряет смысл при подстановке в нее любого из наиболее естественных значений наибольшего и наименьшего прицельных расстояний: ∞ и 0. Чтобы избежать расходимостей, для b_1 и b_2 более или менее искусственно принимаются конечные значения.

Для b_2 разные авторы (а иногда один и тот же автор) применяют различные понятия, например: среднее расстояние между соседними звездами ([3] стр. 24), среднее расстояние между звездами ([1, 2] стр. 61, [5]), радиус Галактики ([3] стр. 31, [4]). Такая неопределенность, по-видимому, принципиально неустранима, что указывает на существенную неполноту данной теории.

Значение наименьшего прицельного расстояния b_1, когда оно фигурирует в явном виде, принимается равным, например, 4, 5 *а. е* ([3] стр. 31), 40 *а. е.* — «динамический радиус солнечной системы» ([1], [3] стр. 25), 7500 *а. е* — средний радиус сближения, когда иррегулярная сила равна регулярной ([4]). В [1] дается следующее обоснование принятия для b_1 конечного значения, вместо казалось бы наиболее естественного нулевого: «...нельзя принимать $b_1=0$, так как приближенная формула (80.6) [у нас (3а)] дает в этом случае $\Delta V=\infty$, а более точная формула (80.5) [у нас (3)] приводит к неопределенности. ...Это является следствием лежащего в основе наших рассуждений предположения о том, что звезды практически являются точками, не имеющими размеров; в этом случае все формулы должны терять физический смысл при $b_1=0$».

Таким образом, создается впечатление, что и в этом пункте звездно-динамическая теория является несовершенной. Однако рассмотрим подробнее этот вопрос.

При выводе формулы (1) интегрирование по прицельным расстояниям (см., например, [1]) представляется квадратурой вида

$$I(b_1, b_2) = \frac{1}{2\pi A^2}\int_{b_1}^{b_2}[\Delta V(b)]^2\, 2\pi b\, db, \tag{2}$$

где

$$\Delta V(b) = \frac{A}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{b^2}}} \tag{3}$$

есть изменение скорости при сближении на прицельном расстоянии b, A — функция других параметров, не зависящая от b, $B=G(M+m)/V^2$ (M — возмущающая, m — возмущаемая массы, V — их относительная скорость). Приближенная формула получается, если в (3) пренебречь вторым множителем:

$$\Delta V(b) \approx \frac{A}{b}. \tag{3a}$$

Пренебрежение это аргументируется малой вероятностью сближений на малых прицельных расстояниях b [3] или просто тем, что «при больших расстояниях b второй сомножитель близок к единице» [1].

Совершенно справедливо утверждение, что при подстановке выражения (3а) в (2) получается логарифмический член

$$I(b_1, b_2) = \frac{1}{2\pi A^2}\int_{b_1}^{b_2}\frac{A^2}{b^2}\cdot 2\pi b\, db = \ln\frac{b_2}{b_1}, \tag{4}$$

который не имеет смысла при $b_1=0$.

Однако при подстановке в (2) точной формулы для ΔV (т. е. формулы (3)) никакой расходимости или неопределенности не возникает. Действительно, в этом случае

$$I(b_1, b_2) = \frac{1}{2\pi A^2}\int_{b_1}^{b_2}\left(\frac{A}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{b^2}}}\right)^2 2\pi b\, db = \frac{1}{2}\ln\frac{B^2+b_2^2}{B^2+b_1^2}. \tag{5}$$

При $b_1=0$ получаем

$$I(0, b_2) = \frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{b_2}{B}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Итак, область интегрирования по прицельным расстояниям b со стороны малых значений b ограничена вполне определенным значением $b_1=0$ и не содержит никаких элементов произвола. Логарифмический член в знаменателе формулы для времени релаксации должен иметь вид (6). Звездно-динамическая теория в данном пункте безупречна и полна.

Отметим, что корректное изложение этого вопроса (получение такого выражения для времени релаксации, которое не становится неопределенным при нулевом значении наименьшего прицельного расстояния) имеется в литературе (например, [2]). К сожалению, в более поздних публикациях ([1, 3, 4]) в трактовку этого пункта теории стали вкрадываться отмеченные выше неточности и недоразумения.

2. Возможно некоторое упрощение формулы (6), практически пригодное во многих случаях. Оценим порядок величины члена $(b_2/B)^2$ сравнительно с единицей. Подставляя вместо B его значение, получим

$$\left(\frac{b_2}{B}\right)^2 = \left[\frac{b_2 V^2}{G(M+m)}\right]^2. \tag{6a}$$

Очевидно, чем больше принятое значение b_2, тем больше возможностей у рассматриваемого члена оказаться $\gg 1$.

А. Рассмотрим сначала звездно-звездные сближения. Для b_2 примем наименьшее из употреблявшихся в литературе значений ([3], стр. 24): $b_2 = 3 \cdot 10^{18}$ *см*. Пусть $V = 30$ *км/сек*, $M = m_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ *г*. Подставляя эти значения в (6а), получим

$$\left(\frac{b_2}{B}\right)^2 = 10^{10} \gg 1.$$

Таким образом, в случае звездно-звездных сближений в Галактике логарифмический член в формуле для времени релаксации может быть записан в виде

$$I(0, b_2) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{b_2^2}{B^2}\right) \approx \ln\frac{b_2}{B}. \tag{7}$$

Интересно, что B в рассматриваемом случае формально совпадает с наименьшим из значений b_1, принимавшихся К. Ф. Огородниковым в [3] (стр. 31).

Б. Рассмотрим более важный (по современным представлениям) случай гравитационного взаимодействия звезды с массивной конденсацией вещества (звездное скопление, облако и т. п.). Положим $M = 10^5 m_\odot \gg m$, $V = 30$ *км/сек*, т. е. оставляем его тем же, что и в предыдущем случае, хотя, пожалуй, естественнее было бы принять несколько большее значение (что только увеличило бы величину рассматриваемого члена). Выбирая b_2 по тому же принципу, что и в первом случае, как среднее расстояние между возмущающими объектами (≈ 100 пс), получим

$$\left(\frac{b_2}{B}\right)^2 \approx 10^4 \gg 1.$$

И в этом случае логарифмический член может быть записан в форме (7).

В. Рассмотрим, наконец, случай звездного скопления. Принимая согласно [5] $V = 0{,}4$ *км/сек*, $M = m = m_\odot$ и находя (как и выше) $b_2 = 10^{18}$ *см*, получим

$$\left(\frac{b_2}{B}\right)^2 \simeq 50 \gg 1.$$

Формула (7) оказывается практически удовлетворительной.

Необходимость применения точной формулы логарифмического члена (6) все же может оказаться реальной. Например, если последующее развитие теории установит, что реальное значение b_2 заметно меньше, чем среднее относительное расстояние между соседними объектами, возмущающими движения звезд.

Следует заметить, что при $(b_2/B)^2 \ll 1$ мы получаем другую практически удобную и достаточно точную формулу для логарифмического члена, так как при этом предположении

$$\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{b_2}{B}\right)^2\right]\approx\frac{1}{2}\left(\frac{b_2}{B}\right)^2. \tag{8}$$

3. В связи со всем сказанным представляется необоснованным доказательство того, что «с точностью до порядка n-ого

$$\frac{b_2}{b_1}=\sqrt{N}, \tag{9}$$

где N — общее число объектов в данной системе», приведенное в [4] (стр. 201). Действительно, при значении b_2, принятом в [4], и правильном значении наименьшего прицельного расстояния $b_1=0$ получаем для такой системы, как Галактика,

$$\frac{b_2}{B}\approx 10^3\sqrt{N}\gg\sqrt{N},$$

т. е. даже если исправить формулу (9) и вместо b_1 подставить в знаменатель значение B, то и тогда величина соответствующего отношения оказывается на три порядка больше, чем $\sqrt{N}$

Конечно, за счет практически полного произвола в выборе величины наибольшего прицельного расстояния b_2 можно сделать отношение b_2/B (но не отношение b_2/b_1, которое при любом $b_2\neq 0$ обращается в бесконечность и не имеет физического смысла) равным чему угодно, в том числе и $\sqrt{N}$. Однако на этом пути мы получим лишь фиктивное устранение произвола в выборе величины b_2 и только замаскируем слабый пункт существующей теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зонн В., Рудницкий К. Звездная астрономия. М., 1959.
2. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М., 1948.
3. Огородников К. Ф. «Усп. астр. наук», 4, 1948.
4. Огородников К. Ф. Динамика звездных систем. М., 1958.
5. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии. М., 1954.

Поступила в редакцию
1. 6 1964 г.

Кафедра
звездной астрономии