

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1965

УДК 621.371

С. А. АХМАНОВ, А. С. ЧИРКИН

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙЧАТОГО СПЕКТРА В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ КВАДРАТИЧНОГО ВИДА

Изложены результаты теоретического исследования преобразования суперпозиций волн, равноотстоящих по частоте, в средах, обладающих нелинейностью квадратичного вида. Показано, что фазовые флуктуации в этих волнах вызывают избыточные флуктуации в мощностях волн гармоники; причем при достаточно большом числе основных волн флуктуации мощностей волн гармоники описываются распределением Рэлея. В этом случае задача вычисления флуктуаций в мощности всей гармоники сведена к задаче вычисления флуктуаций в сумме величин, имеющих рэлеевское распределение. Проведено рассмотрение зависимости флуктуаций мощности гармоники от расстояния в нелинейной среде. Установлено, что, если фазовые скорости взаимодействующих волн равны, дисперсия мощности гармоники сначала возрастает с расстоянием, достигает максимального значения и затем убывает, стремясь к нулю. В среде, где изменение мощности гармоники с расстоянием имеет вид пространственных биеений, дисперсия мощности гармоники также испытывает пространственные биеения.

Введение

В последние годы значительное внимание привлекает проблема умножения частоты бегущих электромагнитных волн в диспергирующих нелинейных средах. Теоретическое исследование таких задач было выполнено в [1—3], [10]. Однако авторы этих работ ограничивались лишь рассмотрением умножения частоты монохроматических волн. Такая постановка вопроса не всегда отвечает экспериментально реализуемым условиям. Действительно, спектральная линия реальных генераторов, возбуждающих нелинейную среду, имеет конечную ширину, и весьма важно исследовать вопрос о ее влиянии на процесс умножения частоты. Среди возникающих задач особое место занимает задача о преобразовании в среде с нелинейной поляризуемостью линейчатого спектра, состоящего из набора эквидистантных дискретных линий. Именно такой спектр излучается генераторами оптического диапазона [4—7]. При этом в некоторых случаях число одновременно генерируемых типов колебаний (мод) достигает ~ 10 [8]. При таком спектре основного излучения спектральные линии (моды) в нелинейной среде могут возникать как в результате умножения частоты, так и за счет смешения мод основного излучения.

Мощности мод гармоники, которые образуются одновременно двумя указанными способами, будут, очевидно, зависеть от фаз мод основного излучения, участвующих в образовании данной моды гармоники. Флук-

туационный разброс фаз в модах основного излучения естественно приведет к флуктуациям мощностей мод гармоник. Таким образом, наличие в преобразуемой волне нескольких мод, или типов колебаний, отличающихся по частоте, приводит к тому, что мощность волны гармоник определяется не только мощностью основной волны, но и фазами мод этой волны [9].

Предметом настоящей статьи является теоретическое исследование процесса преобразования частот линейчатого спектра шириной $\Delta\Omega = N \cdot \Delta\omega$, сгруппированного вблизи частоты ω_0 ($\Delta\Omega/\omega_0 \ll 1$) в среде с поляризуемостью квадратичного типа. Особое внимание уделено вопросу о влиянии статистики фаз основного излучения на мощность излучения второй гармоники, группирующегося вблизи частоты $2\omega_0$. При этом вычисления проделаны не только для области малых КПД преобразования, но также и для режимов, в которых мощности основного излучения и второй гармоники становятся сравнимыми.

§ 1. Вывод основных уравнений

Распространение электромагнитных волн в слабонелинейной анизотропной недиссипативной диспергирующей среде описывается уравнением

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E} + \hat{\chi} \vec{E} \vec{E}$; $\hat{\epsilon}(\omega)$ и $\hat{\chi}(\omega)$ — тензоры второго и третьего ранга соответственно.

Пусть рассматриваемая среда заполняет полупространство при $z \geq 0$, и на границу этой среды падает суперпозиция N плоских волн, обладающих одинаковой поляризацией и имеющих одинаковые направления:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 \sum_{m=1}^N A_{1m} \cos [\omega_{1m} t - \vec{k}_{1m} \vec{r} + \varphi_{1m}(t)]. \quad (2)$$

Для дальнейшего упрощения амплитуды мод A_{1m} считаем постоянными; $\vec{e}_1$ — характеризует поляризацию волн, $\vec{k}_{1m}$ — волновое число и $\varphi_{1m}(t)$ — случайная фаза m -й моды. Спектр падающих волн будем считать эквидистантным, причем частота m -й моды равна $\omega_m = \omega_0 + (m-1) \cdot \Delta\omega$

и
$$N \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (3)$$

В рассматриваемой квадратичной среде за счет нелинейной части индукции $\vec{D}$ возбуждятся волны на удвоенных и суммарных частотах мод основной волны (2). Вследствие этого генерируемая в нелинейной среде волна гармоник представляет собой, очевидно, суперпозицию $(2N-1)$ мод. Поле гармоник в среде имеет вид

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_2 \sum_{n=1}^{2N-1} A_{2n}(\mu \vec{r}, t) \cos [(2\omega_0 + (n-1) \Delta\omega) t - \vec{k}_{2n} \vec{r} + \varphi_{2n}(\mu \vec{r}, t)], \quad (4)$$

где параметр μ , ($\mu \ll 1$) характеризует медленность изменения амплитуд и фаз по пространственным координатам (нелинейность, как обыч-

но, считаем малой). В (4) $\vec{e}_2$ поляризация волны гармоники, амплитуды $A_{2n}(\vec{\mu}r, t)$ и фазы $\varphi_{2n}(\vec{\mu}r, t)$ — случайные функции времени, $\vec{k}_{2n}$ — волновое число n -й моды гармоники. Поскольку волновые векторы $\vec{k}_{1m}$ (2) имеют одинаковые направления, волновые векторы $\vec{k}_{2n}$ (4) будут иметь также одинаковые направления. Пренебрегая дисперсией среды в полосе $N \cdot \Delta\omega$, можем написать

$$2\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{\Delta};$$

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega_0}{\omega_{1m}} \vec{k}_{1m}, \quad \vec{k}_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_{2n}} \vec{k}_{2n} \quad \left| \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots, N; \\ n = 1, 2, \dots, (2N-1) \end{array} \right| \quad (5)$$

«Вектор расстройки» $\vec{\Delta}/k_{1,2} \sim \mu/$ характеризует расстройку фазовых скоростей волн на частотах ω_0 и $2\omega_0$.

В пассивной нелинейной среде амплитуды мод гармоники могут расти только за счет отбора энергии от мод основной волны, которые, естественно, затухают. Таким образом, суммарное поле основной волны и волны гармоники в нелинейной квадратичной среде можно представить в виде

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 \sum_{m=1}^N A_{1m}(\vec{\mu}r, t) \cos(\omega_{1m}t - \vec{k}_{1m}\vec{r} + \varphi_{1m}(\vec{\mu}r, t)) +$$

$$+ \vec{e}_2 \sum_{n=1}^{2N-1} A_{2n}(\vec{\mu}r, t) \cos(\omega_{2n}t - \vec{k}_{2n}\vec{r} + \varphi_{2n}(\vec{\mu}r, t)). \quad (6)$$

Будем считать, что амплитуды мод основной волны равны

$$A_{1m} = A_{10}, \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Случайные фазы $\varphi_{1m}(t)$ на границе нелинейной среды будем считать независимыми, а их одномерные функции распределения равны

$$\omega(\varphi_{1m})|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}; \quad -\pi \leq \varphi_{1m} \leq \pi \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (8)$$

Для практически реализуемых условий времени корреляции случайных фаз $\varphi_{1m}(t)$ оказываются существенно большими времен распространения основной волны в нелинейной среде. Это обстоятельство позволяет рассматривать задачу в квазистатическом приближении ($\partial/\partial t = 0$)*.

Подставляем выражение (6) в уравнение (1), пренебрегая членами второго порядка относительно μ . Приравнявая в полученном таким образом уравнении поочередно нулю коэффициенты при $\sin \Phi_{1m}$, $\cos \Phi_{1m}$, $\sin \Phi_{2n}$ и $\cos \Phi_{2n}$ ($\Phi_{1m} = \omega_{1m}t - \vec{k}_{1m}\vec{r} + \varphi_{1m}$ и $\Phi_{2n} = \omega_{2n}t - \vec{k}_{2n}\vec{r} + \varphi_{2n}$), получим систему укороченных уравнений для амплитуд и фаз (направление z совпадает с нормальным к границе раздела) (см. [10]):

$$\frac{dA_{1m}}{dz} + \beta_1 \sum_{n=l=m-1} A_{2n} A_{1l} \sin(\varphi_{1m} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta}r) = 0, \quad (9)$$

* Следует отметить, что переход в уравнении (1) к координатам $\xi = t + \frac{z}{u_l}$ и $\eta = t - \frac{z}{u_i}$ (u_l — групповые скорости волны в среде) позволяет исследовать задачу (см. [11]) в общем случае.

$$\frac{d\varphi_{1m}}{dz} + \beta_1 \frac{1}{A_{1m}} \sum_{n=l=m-1} A_{2n} A_{1l} \cos(\varphi_{1m} + \varphi_{1l} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta r}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dA_{2n}}{dz} - \beta_2 \left\{ A_{1m}^2 \sin(2\varphi_{1m} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta r}) + 2 \sum_{i+j=n+1} A_{1l} \times \right. \\ \left. \times A_{1j} \sin(\varphi_{1i} + \varphi_{1j} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta r}) \right\} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\varphi_{2n}}{dz} + \beta_2 \frac{1}{A_{2n}} \left\{ A_{1m}^2 (2\varphi_{1m} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta r}) + 2 \sum_{i+j=n+1} A_{1i} A_{1j} \times \right. \\ \left. \times \cos(\varphi_{1i} + \varphi_{1j} - \varphi_{2n} + \vec{\Delta r}) \right\} = 0, \quad (12)$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_0^2 (\vec{e}_1 \hat{\chi}(\omega_0) \vec{e}_2 \vec{e}_1)}{c^2 k_1 \cos \vec{k}_1 s, \cos \vec{s}_1 z_0} \text{ и } \beta_2 = \frac{(2\omega_0)^2 (\vec{e}_2 \hat{\chi}(2\omega_0) \vec{e}_1 \vec{e}_1)}{2c^2 \vec{k}_2 \cos \vec{s}_2 z_0 \cos \vec{s}_2 z_2}, \quad (13)$$

где $\vec{s}_{1,2}$ — направления лучевых векторов, z_0 — единичный вектор, нормальный к границе раздела. В (9) — (13) принято во внимание (5).

Суммирование в (9) — (12) производится по возможным значениям m, n, l, i, j , удовлетворяющим равенствам, записанным снизу знака суммы. Общее число амплитудных и фазовых уравнений определяется числом мод N в основной волне. Так, при $N=3$ получаем 16 уравнений; для $N=4$ — 22. Число уравнений от числа мод N зависит, как $2(3N-1)$. Характерная особенность полученной системы (9) — (12) состоит в том, что все уравнения связаны друг с другом. И даже в самом простейшем случае ($N=2$) данную систему не удастся решить аналитически; необходимо использование методов численного интегрирования. Однако некоторые упрощающие предположения допускают получение приближенных решений, анализ которых позволяет исследовать флуктуации в волне гармоника и качественно рассмотреть их зависимость от расстояния в нелинейной среде.

§ 2. Зависимость флуктуаций в гармонике от числа мод основной волны

Рассмотрим прежде всего случай точного синхронизма взаимодействующих волн и ограничимся пока такими расстояниями z в среде, на которых возбужденные волны не успевают достаточно сильно нарасти ($A_{2n} \ll A_{1m}$). В этом случае амплитуды мод основной волны можно считать постоянными ($A_{1m} = \text{const}$) и ограничиться лишь рассмотрением уравнений (11) — (12). Из этих уравнений получаем значения амплитуд мод гармоника на расстоянии l от границы среды (рассматривается однородная нелинейная среда)

$$A_{2n}^2 = \beta_2^2 l^2 \left\{ A_{1m}^4 + 4 \sum_{2m=n+1} A_{1l}^2 A_{1j}^2 + 4 A_{1m}^2 \sum_{i+j=n+1} A_{1l} A_{1j} \cos(2\varphi_{1m} - \varphi_{1l} - \varphi_{1j}) \right. \\ \left. + 8 \sum_{i+j=p+l=n+1} A_{1l} A_{1j} A_{1p} A_{1l} \cdot \cos(\varphi_{1i} + \varphi_{1j} - \varphi_{1p} - \varphi_{1l}) \right\}. \quad (14)$$

($i < j, p < l; i < p$)

В (14) первый член соответствует генерации n -й моды гармоники за счет умножения частоты m -й моды основной волны ($2\omega_{1m} = \omega_{2n}$); вторые члены — за счет смещения частот мод i и j основной волны, удовлетворяющих условию $\omega_{1i} + \omega_{1j} = \omega_{2n}$, или $i + j = n + 1$. Наконец, остальные члены в (14) присутствуют, если данная мода гармоники образуется одновременно как в результате умножения частоты, так и в результате смещения частот мод основной волны. Величина этих членов определяется соотношением фаз. Поскольку последние флуктуируют, амплитуда моды гармоники в этом случае будет случайной функцией. Наименьшее число мод N , при котором уже образуется мода гармоники с флуктуирующей амплитудой, равно 3. Это мода гармоники

$$A_{23}^2 = \beta_2^2 \{A_{12}^4 + 4A_{11}^2 A_{13}^2 + 4A_{12}^2 A_{11} A_{13} \cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13})\}. \quad (15)$$

Остальные амплитуды мод гармоники (A_{21} , A_{22} , A_{24} и A_{25}) для этого случая не зависят от фаз и постоянны при сделанных ранее предположениях. Если для регистрации мощности второй гармоники, генерируемой квадратичной средой $p_2(t)$, используется система с постоянной временной τ_p

$$\tau_p \gg \frac{1}{\Delta \omega}, \quad (16)$$

то ток на выходе регистрирующей системы будет равен

$$I(t) = aP_2(t) = a \sum_{n=1}^{2N-1} A_{2n}^2 = a \sum_{n=1}^{2N-1} P_{2n}, \quad (17)$$

где a — аппаратная константа.

Поскольку при $N \geq 3$ мощности одной или нескольких мод гармоники зависят от фаз мод основного излучения, полная мощность $P_2(t)$ будет в силу (8) случайной функцией времени. Уровень этих флуктуаций будем характеризовать в дальнейшем относительной величиной

$$\xi^2 = \frac{\sigma^2}{(\bar{P}_2)^2} = \frac{\overline{P_2^2} - \bar{P}_2^2}{(\bar{P}_2)^2}. \quad (18)$$

Подстановка (17) в (18) дает следующее значение для дисперсии:

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{2N-1} (\overline{A_{2n}^4} - (\overline{A_{2n}^2})^2) + 2 \sum_{l=n+1}^{2N-1} \sum_{n=1}^{2N-2} (\overline{A_{2l}^2 A_{2n}^2} - \overline{A_{2l}^2} \cdot \overline{A_{2n}^2}). \quad (19)$$

В связи с тем что амплитуды мод основной волны считаются постоянными, наличие корреляций между амплитудами A_{2l}^2 и A_{2n}^2 определяется, следовательно, исключительно фазовыми корреляциями. Поскольку при $A_{2n}^2 \ll A_{1m}^2$, фазы φ_{1m} статистически независимы, амплитуды A_{2l}^2 и A_{2n}^2 коррелированы только тогда, когда в выражение для указанных амплитуд входят слагаемые, содержащие одинаковую комбинацию фаз. Последнее невозможно, а следовательно, амплитуды A_{2l}^2 и A_{2n}^2 не коррелированы. С учетом этого обстоятельства дисперсия σ^2 равна

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{2N-1} \{\overline{A_{2n}^4} - (\overline{A_{2n}^2})^2\} = \sum_{n=1}^{2N-1} \sigma_n^2. \quad (20)$$

Следует отметить, что в (18) — (20) черта означает статистическое усреднение, которое в рассматриваемом случае (поскольку стационарность случайного процесса во времени сохраняется) может быть заменено временным. По пространственной координате амплитуды мод A_{2n} , а следовательно, и полная мощность второй гармоники $P_2(t)$ являются неоднородными процессами. Последнее видно, например, из (15); дисперсия $\sigma_3^2 = \overline{A_{23}^4} - (\overline{A_{23}^2})^2$ зависит от l . Проанализируем зависимость величины ξ^2 от N . Увеличение числа мод основного излучения N приводит к тому, что увеличивается число флуктуирующих мод в гармонике. Количество же мод гармоники с постоянными, не зависящими от фаз основной волны амплитудами, всегда остается постоянным и равно четырем (A_{21} , A_{22} , $A_{2, 2N-2}$ и $A_{2, 2N-1}$). С ростом N моды гармоники образуются от все большего числа мод основной волны. Таким образом, задача вычисления флуктуаций в мощности данной моды сводится фактически к задаче вычисления флуктуаций в колебании, получаемом от сложения достаточно большого числа колебаний со случайно распределенными фазами. Такая задача была рассмотрена еще Рэлеем [12]. Как показано в [12], функция распределения амплитуд в этом случае имеет вид

$$w(A_{2n}) = \frac{2A_{2n}}{MA_{10}^4} \exp \left\{ -\frac{A_{2n}^2}{MA_{10}^4} \right\}, \quad (21)$$

где M — число мод основного излучения, образующих рассматриваемую моду гармоники (в (21) учтено (7)).

Из (21) следует, что при достаточно больших M (для них и справедливо распределение (21) относительные флуктуации мощности n -й моды гармоники

$$\xi_n^2 = \frac{\overline{A_{2n}^4} - (\overline{A_{2n}^2})^2}{(\overline{A_{2n}^2})^2} = 1. \quad (22)$$

Точный расчет по формуле (14) показывает, что (22) справедливо для центральной моды второй гармоники уже при $N \geq 10$. Флуктуации полной мощности второй гармоники P_2 при достаточно больших N могут быть рассчитаны как флуктуации суммы независимых случайных величин, распределенных по Рэлеевскому закону. При этом для разных мод второй гармоники (разных n) число M различно. При достаточно больших N для подавляющего большинства мод второй гармоники можно считать $M \approx n/2$ и тогда

$$\xi \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot N^{-1/2}. \quad (22a)$$

Точную аналитическую зависимость относительных флуктуаций от числа мод в основной волне можно получить, если в (17), (18) и (20) подставить (14). Производя необходимые операции и принимая во внимание (7), (8), получаем

$$\xi^2 = 8 \frac{\sum_{n=1} C_{N-n}^2 + 2 \sum_{n=1} C_{N-2n}^2}{N^2 (2N-1)^2}, \quad (23)$$

где символ C означает сочетания.

График функции $\xi = \xi(N)$ представлен на рис. 1. Из него видно, что при $N=2$ относительные флуктуации ξ равны нулю. В интервале изменения N от 3 до 5 ξ возрастает, достигая максимального значения при

$\xi = 0,25$. При N более 5 ξ монотонно уменьшается с ростом N . При достаточно большом N из (23) можно получить асимптотическую зависимость $\xi \approx (1,5N)^{-1/2}$.

§ 3. Зависимость флуктуаций в гармонике от расстояния

Результаты § 2, полученные в приближении заданного поля основного излучения ($A_{2n} \ll A_{1m}$), дают возможность выявить зависимость

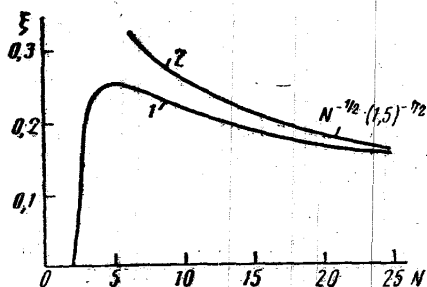


Рис. 1. График зависимости интенсивности относительных флуктуаций мощности второй гармоники $\xi =$

$$= \sqrt{\frac{\bar{P}_2^2 - (\bar{P}_2^2)}{(\bar{P}_2)^2}} \quad \text{от числа мод ос-}$$

новного излучения N . Кривая 1 соответствует расчету по точной формуле (23), кривая 2 соответствует асимптотической зависимости $\xi = (1,5 \cdot N)^{-1/2}$.

дисперсии мощности гармоники от расстояния лишь до тех пор, пока можно пренебречь реакцией волны гармоники на основную волну. В этом случае дисперсия σ^2 (см. (20) и (14) пропорциональна l^4 . На достаточно больших расстояниях l , когда волна гармоники успевает существенно нарасти, необходимо учитывать ее воздействие на основную волну. В этом случае для анализа зависимости флуктуаций в гармонике от расстояния надо исходить из полной системы (9) — (12). Наиболее характерным для рассматриваемой задачи является то, что при учете обратной реакции излучения второй гармоники на основную волну существенно изменяются статистические характеристики фаз основного излучения. Из (10) видно, что они становятся коррелированными; изменяются и их одномер-

ные законы распределения. Однако если представить суперпозицию мод основной волны (2) в виде волны с меняющейся во времени амплитудой

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 A_1(t) \cos(\omega_0 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1(t)), \quad (24)$$

то удастся получить качественную зависимость дисперсии гармоники от расстояния l , минуя решение системы (9) — (12) на вычислительной машине. В (24) $A_1(t)$ определяется выражением

$$A_1^2(t) = \sum_{m=1}^N A_{1m}^2 + 2 \sum_{l=m+1}^N \sum_{m=1}^{N-1} A_{1m} A_{1l} \cos[(l-m)\Delta\omega t + \varphi_{1l} - \varphi_{1m}]. \quad (25)$$

Волну гармоники в этом случае естественно искать также в виде

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_2 A_2(\mu \vec{r}, t) \cos(2\omega_0 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2(\mu \vec{r}, t)). \quad (26)$$

Как и раньше, ограничиваясь квазистатическим рассмотрением, опуская индексы m, n и полагая $A_{1i} A_{1j} = 0$ в (9) — (12), получим следующую систему укороченных уравнений для амплитуд и фаз:

$$\frac{dA_1}{dz} + \beta_1 A_1 A_2 \sin \Phi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{dA_2}{dz} - \beta_2 \cdot A_1^2 \sin \Phi = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} + \Delta_z + \left(2\beta_1 \cdot A_2 - \beta_2 \frac{A_1^2}{A_2} \right) \cos \Phi = 0, \quad (29)$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta_z z$, Δ_z — проекция $\vec{\Delta}$ на ось z . Решение (27) — (29) для $\Delta_z = 0$ имеет вид

$$A_2^2 = \alpha A_0^2 th^2 [\beta A_0 l]. \quad (30)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = \beta_2/\beta_1, \quad \beta = \sqrt{\beta_1 \beta_2}, \quad (31)$$

В (30)

$$A_0^2 = A_1^2(t, z=0), \quad (32)$$

A_0^2 можно представить в виде

$$A_0^2 = A_p^2 + A_\Phi^2, \quad (33)$$

где A_p — регулярная, а A_Φ — флуктуирующая часть A_0 (учитываем лишь флуктуации фаз φ_{1m}), определяемые выражениями

$$A_p^2 = \sum_{m=1}^N A_{1m}^2(z=0),$$

$$A_\Phi^2 = 2 \sum_{l=m+1}^N \sum_{m=1}^{N-1} A_{1m}(z=0) A_{1l}(z=0) \cos [(l-m)\Delta\omega t + \varphi_{1l}(z=0) - \varphi_{1m}(z=0)]. \quad (34)$$

Таким образом, для мощности $P_2(t, l)$ получаем

$$P_2(l, t) = \overline{\alpha A_0^2 th^2 [\beta A_0 l]}, \quad (35)$$

где черта означает усреднение за время τ_p , удовлетворяющее условию (16); далее такое усреднение обозначается знаком $\sim$.

Для того чтобы выделить в (35) регулярную и флуктуирующую части, разложим P_2 в ряд Тейлора около точки A_p^2

$$P_2 = \alpha A_p^2 th^2 [\beta A_p l] + \frac{\partial P_2}{\partial A_0^2} \bigg|_{A_0^2 = A_p^2} \cdot \tilde{A}_\Phi^2 + \frac{\partial^2 P_2}{\partial A_0^4} \bigg|_{A_0^2 = A_p^2} \cdot \tilde{A}_\Phi^4. \quad (36)$$

Будем представлять мощность P_2 в виде суперпозиции регулярной и флуктуирующей частей

$$P_2 = P_{2p} + P_{2\Phi}. \quad (37)$$

Регулярная часть:

$$P_{2p} = \alpha A_p^2 th^2 \{\beta A_p l\} = P_0 th^2 \{\xi\} \quad (38)$$

и флуктуирующая часть

$$P_2 \Phi = \alpha A_p^{-2} \cdot \tilde{A}_0^2 \cdot \Phi(\xi), \quad (39)$$

где

$$\Phi(\xi) = \left\{ \frac{3}{2} \frac{\xi \operatorname{th} \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^4 \xi} - \frac{\xi^2 \operatorname{th}^2 \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} \right\}, \quad (40)$$

$$\xi = \beta A_p l. \quad (41)$$

Дисперсия мощности P_2 определится выражением

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \Phi^1(\xi). \quad (42)$$

Величина

$$\sigma_0^2 = \alpha^2 A_p^{-4} \{(\overline{A_\Phi})^2 - (\overline{A_\Phi^1})^2\} \quad (43)$$

определяется числом мод в основной волне.

Пользуясь (38) (41), можно проанализировать зависимость регулярной части мощности второй гармоники и ее флуктуаций от расстояния.

При $l \rightarrow \infty$ и $\Delta = 0$ флуктуации мощности второй гармоники исчезают. Действительно, в этом случае

$$P_2 = \alpha A_0^2 \operatorname{th}^2 \beta A_0 l, \quad (44)$$

откуда при $l \rightarrow \infty$ получаем

$$P_2 = \alpha A_0^2 = \alpha A_p^2, \quad (45)$$

т. е. величину, не зависящую от фаз основного излучения.

Графики изменения P_{2p} и σ от l представлены на рис. 2. Регулярная часть мощности второй гармоники нарастает с ростом l ; дисперсия же сначала нарастает, проходит через максимум ($\sigma_{\max}/\sigma_0 \approx 0,4$) и затем стремится к нулю. При этом максимальное значение дисперсии достигается при $l \approx 0,7/\beta A_p$.

Здесь, по-видимому, уместно провести аналогию между изменением в пространстве неоднородной дисперсии нарастающей волны в квадратичной среде и нестационарной дисперсией амплитуды устанавливающихся автоколебаний [13]. Сказанное означает, что пространственно-временная аналогия, отмеченная в [14], справедлива и для статистических задач. Не представляет труда исследование флуктуаций мощности второй гармоники и в том случае, когда точный синхронизм фазовых скоростей взаимодействующих волн отсутствует ($\Delta \neq 0$).

Для этого случая зависимость средней мощности и дисперсии гармоники описываются (38), (40) — (43). На рис. 3 приведены графики зависимости P_{2p} и σ от l , при $\Delta_0 = 1$ и $\beta A_p = 1$. При больших значениях Δ_0 для мощности гармоники можно пользоваться выражением

$$P_2 = \alpha \beta^2 \tilde{A}_0^4 \frac{\sin^2 \Delta_0 l}{\Delta_0^2}$$

или

$$P_2 = P_{2p} + P_{2\Phi},$$

где

$$P_{2p} = \alpha \beta^2 A_p^4 \frac{\sin^2 \Delta_0 l}{\Delta_0^2} = P_M \sin^2 \Delta_0 l$$

и

$$P_{2\Phi} = \alpha \beta^2 A_\Phi^4 \frac{\sin^2 \Delta_0 l}{\Delta_0^2}$$

Дисперсия мощности гармоники в этом случае равна

$$\sigma^2 = \alpha^2 \beta^4 \{(\overline{A_\Phi^4})^2 - (\overline{A_\Phi^2})^2\} \frac{\sin^4 \Delta_0 l}{\Delta_0^4} = \sigma_1^2 \sin^4 \Delta_0 l. \quad (46)$$

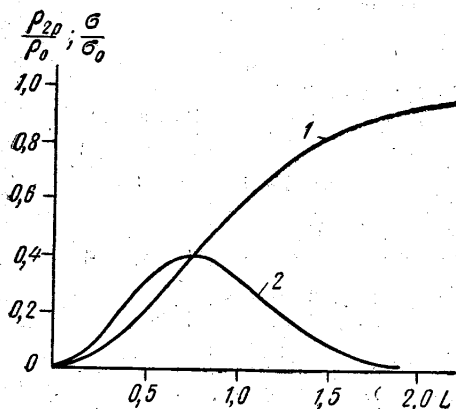


Рис. 2. График зависимости приведенной средней мощности второй гармоники $\frac{P_{2p}}{P_0}$ (кривая 1) и приведенной дисперсии флуктуаций мощности второй гармоники σ/σ_0 (кривая 2) от приведенной длины $L = \beta A_p l$. Обе кривые соответствуют полному синхронизму взаимодействующих волн ($|\vec{\Delta}| = 0$)

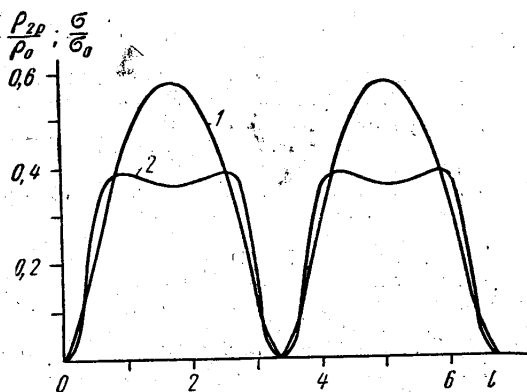


Рис. 3. Графики зависимости P_{2p}/P_0 (кривая 1) и σ/σ_0 (кривая 2) от l при наличии расстройки взаимодействующих волн ($\Delta_0 = 1$; $\beta A_p = 1$)

Из рис. 3 и формулы (46) видно, что при наличии в среде дисперсии, когда изменение мощности гармоники с расстоянием имеет вид пространственных биений, дисперсия мощности гармоники также испытывает биения.

Выводы

Наиболее существенным результатом проведенного расчета является исследование неоднородной дисперсии флуктуаций мощности второй гармоники, связанных с флуктуационным разбросом фаз основного излучения*. Рассмотренные эффекты, по-видимому, хорошо объясняют полученные нами ранее [9] экспериментальные данные. Следует подчеркнуть, что полученные результаты (см. рис. 1) справедливы для любых N . Аналогичный ход неоднородной дисперсии должен наблюдаться, оче-

* Расчет избыточных флуктуаций мощности гармоники, связанных с флуктуационным разбросом фаз ϕ_{1m} при $A_{1m} \gg A_{2n}$ проведен также в работе J. Dusing, N. Bloembergen, Phys. Rev. 133, A 1493, 1964, ставшей нам известной после того, как наша работа была закончена и сдана в редакцию.

видно, и для нелинейных процессов более высокого порядка: при $l \rightarrow \infty$ флуктуации краевых условий «забываются» и между фазами взаимодействующих волн устанавливается статистическая связь. В настоящей работе мы ограничились наиболее важным для практики квазистатическим приближением. Следует подчеркнуть, что оно справедливо лишь до тех пор, пока различие групповых запаздываний $(l/u_i - l/u_k)$ взаимодействующих волн в полосе $N\Delta\omega$ можно пренебречь. В противном случае требуется, вообще говоря, отдельный анализ. Заметим, наконец, что, пользуясь полученными результатами, можно проанализировать и временные (спектральные) характеристики флуктуаций мощности гармоник.

Примечание. Расчет избыточных флуктуаций мощности гармоники, связанных с флуктуационным разбором фаз Φ_{1m} при $A_{1m} \gg A_{2m}$ проведен также в работе J. Ducuing, N. Bloembergen Phys. Rev., **133**, A 1493, 1964. Работа эта стала нам известна после того как наша статья была закончена и сдана в журнал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», **6**, 1116, 1961.
2. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Phys. Rev., **127**, 6, 1919, 1962.
3. Kleinman D. A. Phys. Rev., **128**, 4, 1761, 1962.
4. Ciftan M., Krutchkoff A., Kozzekapani S. PIRE, **50**, 1, 1962.
5. Mc Murtry B. J. Applied Optics., **2**, 767, 1963.
6. Коробкин В. В., Леонтович А. М. ЖЭТФ, **44**, 1847, 1963.
7. Ванюков М. П., Исаенко В. И., Любимов В. В. «Оптика и спектроскопия», **14**, 734, 1963.
8. Garfienkel M., Engeler W. E. Appl. Phys. Lett., **3**, 10, 1963.
9. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Хохлов Р. В., Чунаев О. Н. ЖЭТФ, **45**, 5, 1336, 1963.
10. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., ИЛ, 1964.
11. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. «Радиофизика и электроника», **6**, 1813, 1961.
12. Рэлей. Теория звука, т. 1. М., ГИТТЛ, 1953.
13. Ахманов С. А. «Изв. вузов». Радиофизика, **3**, 1, 110, 1960.
14. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», **7**, 8, 1453, 1962.

Поступила в редакцию
2. 6 1964 г.

Кафедра
радиотехники