

В. П. ГУЖОВ

## ОБ УСТАНОВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ИСКУССТВЕННОЙ ЛИНИЕЙ ЗАДЕРЖКИ

Излагаются результаты расчета процессов установления колебаний в автоколебательной системе, включающей нелинейный усилитель и искусственную линию задержки с конечным числом звеньев, нагруженную на активное сопротивление. Число звеньев в линии выбрано с таким расчетом, чтобы в полосе прозрачности системы оказались две частоты, для которых выполняются условия самовозбуждения. При анализе процессов установления учитывались гармоника и комбинационная частота, попадающие в полосу прозрачности линии задержки. Нелинейность ламповой характеристики аппроксимировалась неполным кубическим полиномом. Расчеты проводились с помощью электронной вычислительной машины.

### Введение

В автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью условия самовозбуждения в общем случае могут быть выполнены для целого ряда частот. Процессы установления в таких системах исследовались в ряде работ для случая установления только одной частоты [1, 2].

В настоящей статье содержатся результаты исследования процессов установления колебаний в автоколебательной системе с искусственной линией задержки с конечным числом звеньев. Процессы возбуждения в такой системе рассмотрены в работе [3]. При выборе пятизвенной линии задержки условия самовозбуждения выполняются для двух частот (колебательных компонентов). Количественное рассмотрение процессов установления с учетом взаимодействия двух колебательных компонентов на нелинейности оказалось возможным провести для частного случая аппроксимации нелинейности неполным кубическим полиномом ( $i = S_1 u - S_3 u^3$ ).

### Система уравнений

Процессы установления в автоколебательной системе с искусственной линией задержки в качестве цепи обратной связи (рис. 1) описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этом смысле рассматриваемая система не является системой с запаздыванием в отличие, например, от системы с коаксиальным кабелем, процессы в которой описываются дифференциально-разностными уравнениями.

В то же время рассматриваемая автоколебательная система имеет

и много общего с системой с идеальным запаздыванием, где с помощью колебательного контура из всего множества возможных частот выделяется конечное число частот, для которых выполняются условия возбуждения. Фазовые сдвиги в искусственной линии вызывают эффекты, аналогичные эффектам запаздывания.

Процессы установления в генераторе с пятизвенной искусственной линией задержки в качестве цепи обратной связи описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$2\ddot{u}_1 + u_1 = u_2 - 2\dot{u}_1 - 2\sqrt{\frac{L}{C}}(S_1 - 3S_3 u_6^2)\dot{u}_6,$$

$$2\ddot{u}_k + u_k = \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_{k-1}), \quad k = 2, 3, 4, 5, \quad (1)$$

$$2\ddot{u}_6 + u_6 = u_5 - 2\dot{u}_6.$$

Здесь  $u_k$  — напряжения в узловых точках линий задержки,  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — согласующее сопротивление, равное низкочастотному характеристическому сопротивлению линии. Дифференцирование ведется по безразмерному времени  $t = \frac{2t_1}{\sqrt{LC}}$ .

Решение системы уравнений (1) будем искать в виде суммы двух колебательных компонентов. В качестве начальных условий используем результаты решения линейной задачи [3], определяющие соотношение между амплитудами и фазовые сдвиги вдоль линии для каждого из колебательных компонентов. При возбуждении от флуктуаций амплитуда первого (нижнего) колебательного компонента будет всегда преобладать над амплитудой второго, поскольку скорость регенерации для низшей частоты оказывается наибольшей. Не останавливаясь на причинах, приведших к такому соотношению между амплитудами, будем рассматривать также и такие начальные условия, в которых амплитуда второго колебательного компонента преобладает. Во всех случаях амплитуды колебательных компонентов в начальных условиях должны быть настолько малыми, чтобы нелинейным взаимодействием можно было пренебречь.

Итак, решение системы (1) ищем в виде

$$u_k(t) = A_{k1}(t) \sin \theta_{k1}(t) + A_{k2}(t) \sin \theta_{k2}(t), \quad (2)$$

$$k = 1, \dots, 6,$$

где  $A_{km}(t)$  — амплитуда  $m$ -го колебательного компонента ( $m = 1, 2$ ) на  $k$ -том звене линии задержки;  $\theta_{km}(t) = \eta_m(t)t - \varphi_{km}(t)$ ,  $\eta_m(t)$  — безразмерные частоты, а разность  $\varphi_{km}(t) - \varphi_{k-1,m}(t)$  определяет сдвиг фаз на  $k$ -том звене линии для  $m$ -го колебательного компонента.

После двукратного дифференцирования выражения (2) по времени и подстановки величин  $u_k$ ,  $\dot{u}_k$ ,  $\ddot{u}_k$  в систему уравнений (1) получим новую

систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитуд и фаз колебательных компонентов. Нелинейные уравнения этой системы содержат помимо членов с частотами  $\eta_1$  и  $\eta_2$  члены с гармониками и комбинационными частотами. В дальнейшем учтем лишь те гармоники и комбинационные частоты колебательных компонентов, которые попадают в полосу прозрачности линии задержки.

Для пятизвенной линии задержки частоты первого и второго колебательных компонентов равны  $0,3\eta_0$  и  $0,8\eta_0$ ,  $\eta_0$  — критическая частота линии. Следовательно, в полосу прозрачности попадают также третья гармоника  $3\eta_1$  и комбинационная частота  $\eta_2 - 2\eta_1$ , близкие к частотам  $\eta_2$  и  $\eta_1$ . Таким образом, из всей совокупности членов, появляющихся при подстановке в выражение  $3S_3 u_6^2$  величин  $u_6$  и  $\dot{u}_6$ , учтем лишь члены со следующими фазовыми углами при гармонических функциях:  $\theta_{61}$ ,  $\theta_{62}$ ,  $3\theta_{61}$  и  $\theta_{62} - 2\theta_{61}$ .

Вводя обозначения  $3\theta_{61} = \theta_{62} + \Delta\theta$  и  $\theta_{62} - 2\theta_{61} = \theta_{61} - \Delta\theta$  и группируя члены при  $\sin \theta_{km}$  и  $\cos \theta_{km}$ , получим окончательно следующую систему из 24 дифференциальных уравнений для амплитуд и фаз колебательных компонентов:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{1m} + \frac{1}{2} A_{1m} &= -\dot{A}_{1m} + A_{1m} \dot{\theta}_{1m}^2 + \frac{1}{2} A_{2m} \cos(\theta_{2m} - \theta_{1m}) - \\ &- S_1 \sqrt{\frac{L}{C}} [P_{1m} \cos(\theta_{6m} - \theta_{1m}) - P_{2m} \sin(\theta_{6m} - \theta_{1m})], \\ \ddot{\theta}_{1m} &= \frac{1}{A_{1m}} \left\{ -(2\dot{A}_{1m} + A_{1m}) \dot{\theta}_{1m} + \frac{1}{2} A_{2m} \times \right. \\ &\times \sin(\theta_{2m} - \theta_{1m}) - S_1 \sqrt{\frac{L}{C}} [P_{1m} \sin(\theta_{6m} - \theta_{1m}) + P_{2m} \cos(\theta_{6m} - \theta_{1m})] \left. \right\}, \\ \ddot{A}_{km} + \frac{1}{2} A_{km} &= A_{km} \dot{\theta}_{km}^2 + \frac{1}{4} A_{k+1,m} \cos(\theta_{k+1,m} - \theta_{km}) + \\ &+ \frac{1}{4} A_{k-1,m} \cos(\theta_{km} - \theta_{k-1,m}), \\ \ddot{\theta}_{km} &= \frac{1}{A_{km}} \left\{ -2\dot{A}_{km} \dot{\theta}_{km} + \frac{1}{4} A_{k+1,m} \sin(\theta_{k+1,m} - \theta_{km}) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{4} A_{k-1,m} \sin(\theta_{km} - \theta_{k-1,m}) \right\}, \\ \ddot{A}_{6m} + \frac{1}{2} A_{6m} &= -\dot{A}_{6m} + A_{6m} \dot{\theta}_{6m}^2 + \frac{1}{2} A_{5m} \cos(\theta_{6m} - \theta_{5m}) \\ \ddot{\theta}_{6m} &= \frac{1}{A_{6m}} \left\{ -(2\dot{A}_{6m} + A_{6m}) \dot{\theta}_{6m} - \frac{1}{2} A_{5m} \sin(\theta_{6m} - \theta_{5m}) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k = 2, \dots, 5$ ,  $m = 1, 2$ , а  $P_{1m}$ ,  $P_{2m}$  равны соответственно

$$\begin{aligned} P_{11} &= \dot{A}_{61} \left\{ 1 - \frac{3S_3}{S_1} \left[ \frac{3}{4} A_{61}^2 + \frac{1}{2} A_{62}^2 + A_{61} A_{62} \frac{\dot{A}_{62}}{\dot{A}_{61}} - \right. \right. \\ &- \cos \Delta\theta \left( \frac{1}{2} A_{61} A_{62} + \frac{1}{4} A_{61}^2 \frac{\dot{A}_{62}}{\dot{A}_{61}} \right) - \\ &- \left. \left. \sin \Delta\theta \cdot \frac{1}{2} A_{61} A_{62} \frac{\dot{\theta}_{61} - \frac{1}{2} \dot{\theta}_{62}}{\dot{A}_{61}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$P_{21} = A_{61} \dot{\theta}_{61} \left\{ 1 - \frac{3S_3}{S_1} \left[ \frac{1}{4} A_{61}^2 + \frac{1}{2} A_{62}^2 - \sin \Delta\theta \cdot \frac{\frac{1}{2} A_{62} \dot{A}_{61} + \frac{1}{4} A_{61} \dot{A}_{62}}{\dot{\theta}_{61}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \Delta\theta \cdot \frac{1}{2} A_{61} A_{62} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\theta}_{62}}{\dot{\theta}_{61}} \right) \right] \right\},$$

$$P_{12} = \dot{A}_{62} \left\{ 1 - \frac{3S_3}{S_1} \left[ \frac{1}{2} A_{61}^2 + \frac{3}{4} A_{62}^2 + A_{61} A_{62} \frac{\dot{A}_{61}}{\dot{A}_{62}} - \right. \right. \quad (4) \\ \left. \left. - \cos \Delta\theta \cdot \frac{1}{4} A_{61}^2 \frac{\dot{A}_{61}}{\dot{A}_{62}} - \sin \Delta\theta \cdot \frac{1}{4} A_{61}^3 \frac{\dot{\theta}_{61}}{\dot{A}_{62}} \right] \right\},$$

$$P_{22} = A_{62} \dot{\theta}_{62} \left\{ 1 - \frac{3S_3}{S_1} \left[ \frac{1}{2} A_{61}^2 + \frac{1}{4} A_{62}^2 + \sin \Delta\theta \cdot \frac{1}{4} \frac{A_{61}^2}{A_{62}} \cdot \frac{\dot{A}_{61}}{\dot{\theta}_{62}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \Delta\theta \cdot \frac{1}{4} \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \cdot \frac{\dot{\theta}_{61}}{\dot{\theta}_{62}} \right] \right\}.$$

Так как рассматриваемая автоколебательная система (1) не является системой, близкой к консервативной, то условие медленности изменения амплитуд, выполнимое при коэффициенте усиления  $K=1+\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) в режиме возбуждения колебаний, может не выполняться при возникновении нелинейных взаимодействий. В этом случае эквивалентные коэффициенты усиления для каждого из колебательных компонентов могут претерпевать значительные изменения. В связи с этим в системе уравнений (3) необходимо учитывать вторые производные  $\ddot{A}_{km}$ ,  $\ddot{\theta}_{km}$ . В отдельных случаях можно пренебречь вторыми производными и тем самым упростить решение системы уравнений (3).

Как следует из выражений (4), взаимное влияние колебательных компонентов через нелинейность определяется не только величинами амплитуд, но также скоростью изменения амплитуд и фаз и разностью фаз  $\Delta\theta$  между третьей гармоникой первого колебательного компонента и вторым колебательным компонентом. В случае выполнения условия медленности изменения амплитуд в процессе установления возможно усреднение по времени для  $P_{1m}$  и  $P_{2m}$ . При этом взаимодействие на нелинейности будет определяться лишь величинами амплитуд колебательных компонентов.

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями [3] проводилось с помощью электронной цифровой вычислительной машины.

Ниже приводятся результаты вычислений, полученные при различных соотношениях между амплитудами колебательных компонентов в начальных условиях.

#### Установление первого колебательного компонента

I. Начальные амплитуды выбраны таким образом, чтобы при возникновении нелинейного взаимодействия амплитуда первого колебательного компонента значительно превосходила амплитуду второго.

Оценку нелинейного взаимодействия можно провести из рассмотрения средних крутизн для каждого из колебательных компонентов с учетом действия другого колебательного компонента. Так как в процессе установления колебаний условие медленности изменения амплитуд и фаз в общем случае может не выполняться, а амплитуды и фазы оказываются зависимыми, то при определении средней крутизны для данного колебательного компонента нельзя проводить усреднение по фазе другого колебательного компонента.

В этом случае модуль средней крутизны запишется в виде

$$|\bar{S}_m| = \sqrt{\left[ \frac{1}{\pi A_{6m}} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin \theta_{6m} d\theta_{6m} \right]^2 + \left[ \frac{1}{\pi A_{6m}} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos \theta_{6m} d\theta_{6m} \right]^2}, \quad (5)$$

где  $f(u) = S_1 u - S_3 u^3$ , а  $u = A_{61}(t) \sin \theta_{61} + A_{62}(t) \sin \theta_{62}$ .

Подставляя  $u(t)$  в (5) и производя интегрирование, получим

$$|\bar{S}_1| \approx S_1 \sqrt{\left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} (A_{61}^2 + 2A_{62}^2 - A_{61}A_{62} \cos \Delta\theta) \right]^2 + \left( \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} A_{61}A_{62} \sin \Delta\theta \right)^2}, \quad (6)$$

$$|\bar{S}_2| \approx S_1 \sqrt{\left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} \left( 2A_{61}^2 + A_{62}^2 - \frac{1}{3} \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \cos \Delta\theta \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{4} \frac{S_3}{S_1} \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \sin \Delta\theta \right]^2}. \quad (7)$$

При выводе выражений (6) и (7) предполагалось, что все слагаемые с частотами, большими  $3\eta_1 - \eta_2$ , при интегрировании дают нуль.

Как следует из выражения (7), заметное влияние первого колебательного компонента на второй возникает в том случае, когда амплитуда третьей гармоники первого колебательного компонента становится сравнимой с амплитудой второго колебательного компонента:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \sim 1. \quad (8)$$

Может оказаться, что амплитуда  $A_{61}$  при этом еще весьма далека от своего установившегося значения и влиянием остальных нелинейных (квадратичных) членов в (7) можно пренебречь. Таким образом, абсолютное значение средней крутизны для второго колебательного компонента изменается заметным образом в течение периода разностной частоты  $3\eta_1 - \eta_2$ .

Для  $|\bar{S}_1|$  справедливы неравенства

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61}^2 \gg \frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61}A_{62} \gg \frac{3}{2} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{62}^2,$$

из которых следует, что при принятом соотношении между амплитудами влиянием второго колебательного компонента в  $\bar{S}_1$  можно пренебречь.

На рис. 2, а представлен график установления амплитуд  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ . В верхней части графика в более крупном масштабе дан участок установления амплитуды второго колебательного компонента при выполнении условия (8). На рис. 2, б представлен график установления величин  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$ , на рис. 2, в — график установления фазы  $\Delta\theta = 3\theta_{11} - \theta_{12}$ .

При рассмотрении рис. 2 можно выделить следующие этапы процесса установления колебаний.

1. На начальном участке амплитуды  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  малы, и автоколебательную систему можно считать линейной. Амплитуды колебательных компонентов растут по экспоненциальному закону, скорость регенерации первого колебательного компонента значительно превосходит скорость регенерации второго. Частоты  $\eta_1 = \theta_{k1}$  и  $\eta_2 = \theta_{k2}$  постоянны [3]. Закон изменения  $\Delta\theta$  линейный (независимые колебания).

2. При приближении амплитуды третьей гармоники первого колебательного компонента к амплитуде второго начинается этап взаимодействия колебательных компонентов на нелинейности. Крутизна характе-

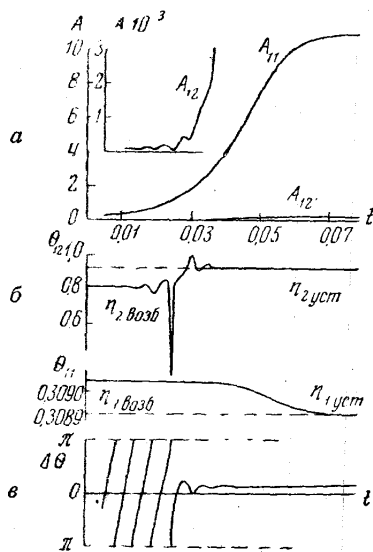


Рис. 2

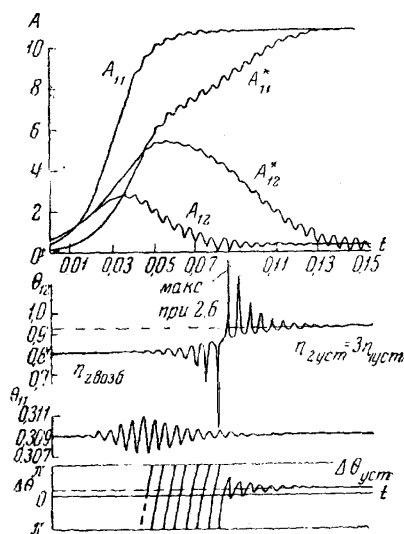


Рис. 3

ристики для второго колебательного компонента начинает изменяться с периодом разностной частоты  $3\eta_1 - \eta_2$ , причем амплитуда этих изменений растет по мере развития процесса. Увеличивающаяся третья гармоника первого колебательного компонента оказывает все возрастающее влияние и на движение фазы второго колебательного компонента, замедляя или ускоряя это движение на отдельных участках периода разностной частоты. Как следует из графика установления разностной фазы  $\Delta\theta$ , нелинейное воздействие приводит к замедлению движения  $\Delta\theta$  при проходе разностной фазой области, близкой к установившемуся значению и ускорению движения  $\Delta\theta$  вдали от установившегося значения разностной фазы.

Наконец, при увеличении амплитуды третьей гармоники первого колебательного компонента до значений, равных или несколько больших амплитуды второго колебательного компонента, разностная фаза  $\Delta\theta$  после очередного замедленного прохождения установившегося значения возвращается к установившемуся значению. В последующем процесс установления  $\Delta\theta$  носит характер затухающих колебаний около установившегося значения.

График производной фазы  $\theta_{12}$ , являющейся практически взятой с обратным знаком производной разностной фазы  $\Delta\theta$ , дает картину уста-

новления частоты — переход от частоты второго колебательного компонента к частоте третьей гармоники первого колебательного компонента.

3. Процесс перехода от второго колебательного компонента к третьей гармонике первого колебательного компонента произошел до установления стационарной амплитуды первого колебательного компонента. На заключительном этапе переходного процесса происходит установление стационарных значений амплитуд основной и третьей гармоник, медленное (неколебательное) приближение фазы  $\Delta\theta$  и производных  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{12}$  к установившемуся значению.

Стационарное значение частоты  $\eta_1$  оказывается несколько меньшим ее значения, посчитанного в линейном приближении. При этом фазовый сдвиг в линии задержки для основной частоты меньше  $\pi$ . Необходимое дополнение до  $2\pi$  (условие баланса фаз) дает нелинейность. Соответствующий фазовый угол  $\alpha_1$  (сдвиг фаз между первой гармоникой анодного тока и напряжением этой частоты на сетке) связан с установившимися значениями амплитуд и разностной фазы  $\Delta\theta_{уст}$  соотношением

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos \theta_{61} d \theta_{61}}{\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin \theta_{61} d \theta_{61}} \Bigg|_{уст} = \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61} A_{62} \sin \Delta\theta_{уст}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61}^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{62}^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61} A_{62} \cos \Delta\theta_{уст}}, \end{aligned}$$

где  $u$  есть сумма основной и третьей гармоники, сдвинутых по фазе на  $\Delta\theta_{уст}$ .

Для третьей гармоники фазовый сдвиг в линии значительно больше  $3\pi$  (примерно на  $0,65\pi$ ). Необходимый для выполнения условия баланса фаз сдвиг фаз  $\alpha_2$  на нелинейности определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\frac{1}{4} \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \sin \Delta\theta_{уст}}{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{61}^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{62}^2 + \frac{1}{4} \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{A_{61}^3}{A_{62}} \cos \Delta\theta_{уст}}$$

II. Начальные условия выбраны таким образом, чтобы при возникновении нелинейного взаимодействия амплитуды колебательных компонентов были соизмеримы. Этот случай отличается от рассмотренного ранее тем, что в процессе установления второй колебательный компонент заметным образом влияет на первый.

На рис. 3 представлены графики установления амплитуд, разностной фазы  $\Delta\theta$  и производных фаз  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$ . Как следует из рис. 3, а, взаимодействие колебательных компонентов приводит к модуляции амплитуд с частотой  $3\eta_1 - \eta_2$  (для сравнимых амплитуд коэффициенты при синусах и косинусах в (6) и (7) оказываются сравнимыми с квадратичными относительно амплитуд членами).

Подобно предыдущему варианту, разностная фаза  $\Delta\theta$  изменяется по закону, близкому к линейному, пока амплитуда второго колебательного компонента остается больше амплитуды третьей гармоники первого колебательного компонента. Лишь при уменьшении амплитуды второго колебательного компонента до значений, близких к амплитуде третьей

гармоники первого колебательного компонента, возникают процессы, приводящие к установлению стационарного режима с основной частотой и ее третьей гармоникой, подобного полученному ранее.

В рассматриваемом случае процесс установления разностной фазы  $\Delta\theta$  протекает при практически установившемся значении амплитуды первого колебательного компонента. Поэтому взаимодействие на нелинейности оказывается более глубоким, что выражается в значительной модуляции амплитуд второго колебательного компонента — третьей гармоники, в существенном изменении в течение одного периода разностной частоты производных разностной фазы  $\Delta\theta$  и фазы  $\theta_{12}$  (рис. 3, б, в). По этой же причине оказывается затянутым во времени колебательное движение фазы  $\Delta\theta$  к установившемуся значению.

На рис. 3, а приведены также графики установления амплитуд при другом соотношении между амплитудами в начальных условиях. В этом случае амплитуда  $A_{12}$  в процессе установления достигает больших значений. Существенно замедляется установление амплитуды  $A_{11}$ . Графики установления разностной фазы и производных фаз аналогичны приведенным на рис. 3, б, в.

### Установление второго колебательного компонента

I. Начальные условия для амплитуд выбраны таким образом, чтобы при возникновении нелинейного взаимодействия амплитуда  $A_{12}$  значительно превосходила амплитуду  $A_{11}$ .

При выполнении этого условия средние крутизны оказываются зависящими лишь от амплитуды второго колебательного компонента:

$$\bar{S}_1 = S_1 \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{62}^2 \right), \quad \bar{S}_2 = S_1 \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{S_3}{S_1} A_{62}^2 \right). \quad (9)$$

Следствием этого является то обстоятельство, что при выборе достаточно малого коэффициента усиления выполняются условия медленности изменения амплитуд и фаз и исходная система дифференциальных уравнений может быть значительно упрощена. Напомним, что при установлении первого колебательного компонента условия медленности изменения амплитуд и фаз для второго колебательного компонента не выполнялись даже при значительном преобладании амплитуд  $A_{k1}$  в начальных условиях.

Упрощенные выражения (4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \dot{A}_{61} \left[ 1 - \frac{3S_3}{S_1} \left( \frac{1}{2} A_{62}^2 - A_{61} A_{62} \frac{\dot{A}_{62}}{A_{61}} \right) \right], \\ P_{21} &= A_{61} \dot{\theta}_{61} \left( 1 - \frac{3S_3}{S_1} \cdot \frac{1}{2} A_{62}^2 \right), \\ P_{12} &= \dot{A}_{62} \left( 1 - \frac{3S_3}{S_1} \cdot \frac{3}{4} A_{62}^2 \right), \\ P_{22} &= A_{62} \dot{\theta}_{62} \left( 1 - \frac{3S_3}{S_1} \cdot \frac{1}{4} A_{62}^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Результаты решения задачи об установлении второго колебательного компонента представлены на рис. 4, а для амплитуд и рис. 4, б для производных фаз (частот) при движении системы к стационарному режиму.



Поведение системы при малых амплитудах, пока задачу можно считать линейной, рассмотрено ранее.

С увеличением амплитуды второго колебательного компонента до значений, при которых начинают сказываться нелинейные эффекты, рост амплитуд колебательных компонентов замедляется. Но поскольку средняя крутизна  $\bar{S}_1$  (9) уменьшается быстрее, чем  $\bar{S}_2$ , замедление роста первого колебательного компонента оказывается более значительным. При некотором значении амплитуды  $A_{12}$  производная  $\dot{A}_{11}$  обращается в нуль, после чего начинается затухание амплитуды первого колебательного компонента, ускоряющееся по мере роста  $A_{12}$ .

Изменения частот в процессе установления колебаний оказываются незначительными. При выбранном коэффициенте усиления  $K=1,1$  эти изменения не превышают 0,01%, однако быстро растут с ростом коэффициенты усиления (достигая 0,1% при  $K=1,5$ ).

Рассмотрим подробнее характер изменения частот колебательных компонентов в процессе установления. Для этого запишем выражение  $\ddot{\theta}_{11}$  и  $\ddot{\theta}_{12}$  (3), преобразовав их:

$$\ddot{\theta}_{11} = \frac{1}{A_{11}} \left\{ \left[ -A_{11}\dot{\theta}_{11} - 2\dot{A}_{11}\dot{\theta}_{11} + \frac{1}{2} A_{21} \sin(\theta_{21} - \theta_{11}) \right] - \left[ S_1 \sqrt{\frac{L}{C}} A_{61}\dot{\theta}_{61} \left( 1 - \frac{3S_3}{S_1} \cdot \frac{1}{2} A_{62}^2 \right) \right] \right\}, \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_{12} = \frac{1}{A_{12}} \left\{ \left[ -A_{12}\dot{\theta}_{12} - 2\dot{A}_{12}\dot{\theta}_{12} + \frac{1}{2} A_{22} \sin(\theta_{22} - \theta_{12}) \right] - \left[ S_1 \sqrt{\frac{L}{C}} A_{62}\dot{\theta}_{62} \left( 1 - \frac{3S_3}{S_1} \cdot \frac{1}{4} A_{62}^2 \right) \right] \right\}. \quad (12)$$

В каждом из этих выражений линейные члены, стоящие в первой квадратной скобке ( $\ddot{\theta}_{11л}$ ,  $\ddot{\theta}_{12л}$ ), зависят только от амплитуд (и их производных) на начальных звеньях линии задержки ( $k=1, 2$ ). Выражения, записанные во вторых квадратных скобках ( $\ddot{\theta}_{11н}$ ,  $\ddot{\theta}_{12н}$ ), зависят только от амплитуд на конечных звеньях линии ( $k=6$ ) и включают нелинейные члены.

На линейном участке, когда все  $A_{km}$  растут по экспоненциальному закону, величины  $\dot{\theta}_{1m}=0$ . Частоты возбуждения  $\eta_m = \dot{\theta}_{km}$  зависят от коэффициента усиления и оказываются тем большими, чем выше  $K$  [4].

Рассмотрим сначала движение  $\dot{\theta}_{12}$  к установившемуся значению. С возникновением нелинейного взаимодействия закон нарастания амплитуды  $A_{62}$  становится отличным от экспоненциального. Поскольку амплитуда  $A_{12}$  опережает в развитии амплитуду  $A_{62}$  (рис. 4, а), отклонения кривой  $A_{12}$  от экспоненты в любой момент времени оказываются большими, чем для кривой  $A_{62}$ . При этом  $|\dot{\theta}_{12н}| > |\dot{\theta}_{12л}|$ . А так как  $\dot{\theta}_{12н} > 0$ , то вторая производная  $\ddot{\theta}_{12}$  становится отрицательной. Максимальное значение  $|\ddot{\theta}_{12}|$  достигается в том случае, когда скорости изменения величин  $A_{12}$  и  $A_{62}$  становятся равными. При этом  $\dot{\theta}_{12}$  проходит значение, соответствующее установившемуся, так как равенство производных  $\dot{A}_{12}$  и  $\dot{A}_{62}$  эквивалентно равенству единице коэффициента усиления.

При дальнейшем увеличении  $A_{62}$  производная  $\dot{A}_{12}$  оказывается меньше  $\dot{A}_{62}$ . В результате  $|\ddot{\theta}_{12}|$  уменьшается. Частота  $\dot{\theta}_{12}$  достигает мини-

мальной величины и затем стремится к установившемуся значению, соответствующему выполнению условия баланса амплитуд ( $K=1$ ).

Частота первого колебательного компонента  $\theta_{11}$  аналогичным образом начинает уменьшаться с возникновением нелинейного воздействия (уменьшением коэффициента усиления). Однако, в связи с тем что амплитуды  $A_{11}$  и  $A_{61}$  после достижения некоторого максимального значения начинают уменьшаться, величина  $\theta_{11}$ , достигнув минимума, проходит далее значение  $\theta_{11}$ , соответствующее  $K=1$ , и стремится к некоторому предельному значению. Последнее однозначно связано с величиной коэффициента затухания, установившегося для первого колебательного компонента под действием второго.

II. Начальные условия для амплитуд выбраны таким образом, чтобы при возникновении

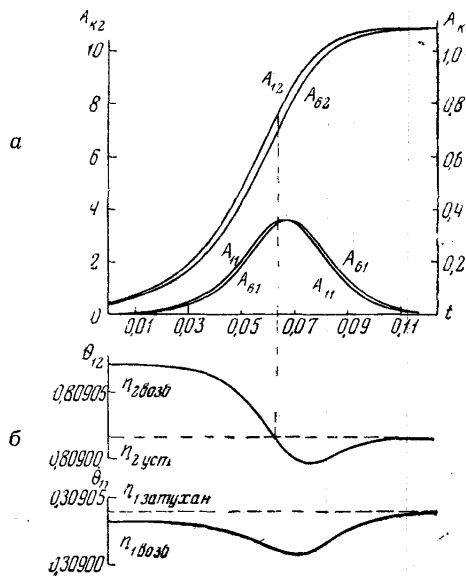


Рис. 4

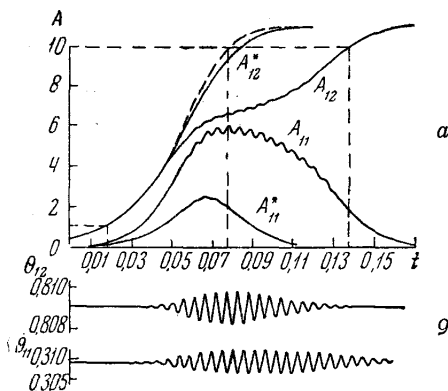


Рис. 5

нелинейного взаимодействия амплитуда второго колебательного компонента лишь незначительно превосходила амплитуду первого.

При соизмеримых амплитудах влияние колебательных компонентов оказывается взаимным. В этом случае необходимо решать систему (3) с нелинейными коэффициентами (4). Присутствие в (4) членов с  $\sin \Delta\theta$  и  $\cos \Delta\theta$  приводит к появлению модуляции амплитуд и фаз с разностной частотой  $3\eta_1 - \eta_2$ . В большей степени нелинейное взаимодействие сказывается на первом колебательном компоненте особенно при прохождении значений  $A_{61} \approx 0$ . В этом случае уменьшается влияние члена  $A_{62}^2 A_{61}$ , выделяются модуляционные члены.

В выражениях  $P_{21}$  и  $P_{22}$  (4) коэффициенты при  $\sin \Delta\theta$  и  $\cos \Delta\theta$  при любых  $A_{61} < A_{62}$  оказываются меньше соответствующих коэффициентов в  $P_{11}$  и  $P_{12}$ . В результате вторые колебательные компоненты в процессе установления в меньшей степени промодулированы разностной частотой.

На рис. 5, а, б приведены графики установления амплитуд и производных фаз при двух различных соотношениях между амплитудами колебательных компонентов в начальных условиях. Из рис. 5, а следует, что процесс установления  $A_{k2}$  затягивается по мере увеличения начальных значений  $A_{k1}$  (для сравнения пунктиром проведена кривая установления амплитуды  $A_{62}$  при  $A_{61} \ll A_{62}$ ). Так, для второго варианта воздей-

стве первого колебательного компонента, достигающего максимальной амплитуды, превышающей половину установившейся амплитуды  $A_{62}$ , увеличивает время установления  $A_{62}$  примерно вдвое (по уровню от 0,1 до 0,9 стационарной амплитуды; сравнение с пунктирной кривой).

Установление частот (рис. 5, б) носит колебательный характер, причем амплитуды колебаний значительно превосходят разность между частотой возбуждения и установившимся значением частоты и оказываются тем больше, чем сильнее взаимодействие на нелинейности. Как и следовало ожидать, большим колебаниям подвержена частота первого колебательного компонента.

### Выводы

Рассмотрены процессы установления колебаний в автоколебательной системе с искусственной линией задержки в качестве цепи обратной связи при различных соотношениях между амплитудами колебательных компонентов в начальных условиях.

В случае преобладания начальных амплитуд для первого колебательного компонента, для которого условия регенерации выполнены наилучшим образом, полученные результаты полностью совпадают с качественными соображениями об установлении колебаний [4] для системы с мягким возбуждением. Подробно рассмотрен процесс взаимодействия колебательных компонентов на нелинейности, переход от второго колебательного компонента к третьей гармонике первого колебательного компонента.

Исследован процесс установления второго колебательного компонента, когда в начальных условиях обеспечено значительное преобладание амплитуды второго колебательного компонента. Проанализированы графики установления амплитуд и частот колебательных компонентов.

Приведены результаты, полученные при рассмотрении нелинейного взаимодействия колебательных компонентов с соизмеримыми амплитудами для случаев установления как первого, так и второго колебательных компонентов.

Автор высказывает искреннюю признательность проф. В. В. Мигулину за руководство настоящей работой и канд. физ.-мат. наук Ю. М. Азьяну за обсуждение полученных результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Cunningham W. J. Journal of Franklin Inst., 261, No. 5, 495—507, 1956.
2. Гоноровский И. С. «Радиотехника», 14, № 1, 25, 1959.
3. Гужов В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 1964.
4. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», 1, № 4, 418, 1956.

Поступила в редакцию  
6. 6 1964 г.

Кафедра  
физики колебаний