Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1965

539.12.072

И. Е. МАРЦИНКЕВИЧ

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С УСТОЙЧИВЫМИ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Рассматривается модель нелинейного скалярного поля, в которой частицеподобные решения получаются простым интегрированием, причем эта модель удовлетворяет условию устойчивости. Из дополнительного условия нормировки «заряда» на единицу получается спектр масс.

В нелинейной полевой теории элементарных частиц исследовался ряд упрощенных моделей, для которых существуют частицеподобные решения (т. е. такие решения, которые монотонно убывают при $r \to \infty$ и не имеют особенностей в нуле). В [1] подробно исследовалась модель кубической нелинейности и для получения окончательных выводов было использовано дополнительное условие $\varepsilon = E = M$. Однако, как показал Рыбаков [3], при такой нелинейности частицеподобные решения не являются устойчивыми. В работе [2] рассматривалась ступенчатая нелинейность и было использовано условие нормировки «заряда» на единицу. Но такая нелинейность также не удовлетворяет критерию устойчивости Рыбакова.

В данной работе предлагается новая упрощенная модель нелинейного комплексного скалярного поля, описываемого лагранжианом

$$L = -\frac{1}{2}\left\{\nabla\psi^*\nabla\psi + \frac{\partial\psi^*}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_0} - m^2\left[\psi^*\psi + F(\psi^*\psi)\right]\right\}, \qquad (1)$$

где m — параметр, имеющий размерность обратной длины, $F(\psi^*\psi)$ — нелинейная функция. (Здесь используется система единиц, в которой $c = h = 1$).

Используя (1), получаем уравнения поля

$$\nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} - m^2\left[1 + F'(\psi^*\psi)\right]\psi = 0,$$

$$\nabla^2\psi^* - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_0^2} - m^2\left[1 + F'(\psi^*\psi)\right]\psi^* = 0, \qquad (2)$$

где

$$F'(v) = \frac{dF(v)}{dv}.$$

Стационарные сферически-симметричные решения ищем в виде

$$\psi = u(r)\, e^{-i\varepsilon t}, \quad \psi^{*} = u(r)\, e^{i\varepsilon t},$$

где ε — параметр, пропорциональный частоте.

Уравнения (2) перепишем в виде

$$\nabla^2 u + [\varepsilon^2 - m^2 - m^2 F'(u^2)]\, u = 0. \tag{3}$$

Выберем следующую нелинейную функцию:

$$F(v) = \begin{cases} -a^2 v, & v > v_0, \\ -dv + \frac{2}{3} c v^{3/2} - \frac{b}{2} v^2, & v < v_0. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнение (3) для $v > v_0$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d^2}{dr^2}(ru) + (\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2)\, u = 0. \tag{5}$$

Если $\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2 > 0$, то его решением будет

$$u_{\mathrm{I}}(r) = A \frac{\sin \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2}\, r}{r}. \tag{5'}$$

Уравнение для $v < v_0$:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(ru) + (\varepsilon^2 - m^2 + dm^2 - m^2 cu + bm^2 u^2)\, u = 0. \tag{6}$$

Решение ищем в виде $u(r) = B \dfrac{r_0^2}{r_0^2 + r^2}$. Чтобы эта функция удовлетворяла уравнению, необходимо положить

$$d = \frac{m^2 - \varepsilon^2}{m^2}, \quad B = \frac{4c}{b}, \quad r_0^2 = \frac{b}{2m^2 c^2}.$$

Следует отметить, что вопрос о существовании другого решения уравнения (6) остается нерешенным.

Итак

$$u_{\mathrm{II}}(r) = \frac{2}{m^2 c} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2m^2 c^2} + r^2}.$$

Функции $u_{\mathrm{I}}(r)$ и $u_{\mathrm{II}}(r)$ должны удовлетворять условиям сшивания при некотором значении $r = R_0$, таком, что $u_0 = u(R_0)$.

Равенство функции при $r = R_0 : u_{\mathrm{I}}(R_0) = u_{\mathrm{II}}(R_0) = u_0$,

$$u_{\mathrm{I}}(R_0) = A \frac{\sin \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2}\, R_0}{R_0} = u_0, \tag{7}$$

$$u_{\mathrm{II}}(R_0) = \frac{2}{m^2 c} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2m^2 c^2} + R_0^2} = u_0. \tag{8}$$

Из (8) находим $b = \dfrac{4c}{u_0} - 2m^2 c^2 R_0^2$.

Равенство производных при $r = R_0$

$$\frac{1}{R_0} - \frac{2R_0 m^2 c}{\frac{b}{2c} + R_0^2 m^2 c} = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2} R_0. \quad (9)$$

Введем $x = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 + m^2 a^2} R_0$, тогда равенство (9) примет вид

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - R_0^2 m^2 c u_0}. \quad (10)$$

Корни этого уравнения дают те значения ε, при которых возможно частицеподобное решение при данном $F(u^2)$. В этом смысле ε называется собственным значением уравнения (3). Найдем корни уравнения (10) графически.

Положим $\frac{1}{u_0} \approx R_0^2 m^2 c$, тогда в знаменателе $y = \frac{x}{1 - \mathrm{const}}$ стоит малая величина. Поэтому угол наклона прямой к оси x близок к $\frac{\pi}{2}$. При этом корнями уравнений (10) являются $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, отсюда

$$\varepsilon_n^2 = \frac{\pi^2}{4R_0^2}(2n+1)^2 + m^2 - m^2 a^2, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad (11)$$

Так как $x_0 = \frac{\pi}{2}$, то из (7) находим $A = u_0 R_0$. Потребуем, чтобы ε_n было действительным при всех значениях n, начиная с нуля. Для этого необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\pi^2}{4R_0^2} > m^2 a^2 - m^2.$$

Найдем связь между ε и E.

$$E = \int T_{00}\, dv = \frac{1}{2} \int \left\{ \nabla\psi^* \, \nabla\psi - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + m^2 [\psi^* \psi + F(\psi^* \psi)] \right\} dv.$$

Интегрируя по частям и используя уравнения поля, получим

$$E = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial\psi^*}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_0} - \psi^* \frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} + m^2 [F(\psi^* \psi) - \psi^* \psi F'(\psi^* \psi)] \right\} dv,$$

или

$$E = 4\pi\varepsilon^2 \int_0^\infty u^2 r^2\, dr + 2m^2 \pi \int_0^\infty [F(u^2) - u^2 F'(u^2)]\, r^2\, dr. \quad (12)$$

Используем дополнительное условие нормировки «заряда»

$$Q = \frac{i}{2} \int \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_0} \psi - \frac{\partial\psi}{\partial x_0} \psi^* \right) dv = 4\pi\varepsilon \int_0^\infty u^2 r^2\, dr = 1. \quad (13)$$

Тогда (12) примет вид

$$E = \varepsilon + 2m^2\pi \int_0^\infty [F(u^2) - u^2 F'(u^2) r^2\, dr. \quad (14)$$

Вычислим второй член в выражении (14).

Так как

$$F(u^2) - u^2 F(u^2) = \begin{cases} 0 & u > u_0, \\ \frac{b}{2} u^4 - \frac{1}{3} c u^3 & u < u_0, \end{cases}$$

то

$$2m^2 \pi \int_0^\infty [F(u^2) - u^2 F'(u^2)] r^2 dr = 2m^2 \pi \int_{R_0}^\infty \left(\frac{b}{2} u^4 - \frac{1}{3} c u^3 \right) r^2 dr =$$

$$= \frac{\pi m^2 r_0^6 A^3}{16} (Ab + 4c) \left(\frac{\pi}{2r_0^3} - \frac{2R_0}{(r_0^2 + R_0^2)^2} - \frac{R_0}{r_0^2 (r_0^2 + R_0^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^3} \operatorname{arctg} \frac{R_0}{r_0} \right) - \frac{\pi m^2 c r_0^4 A^3}{3} \left(\frac{\pi}{2r_0} - \frac{R_0}{r_0^2 + R_0^2} - \frac{1}{r_0} \operatorname{arctg} \frac{R_0}{r_0} \right) -$$

$$- \frac{\pi m^2 b A^4 r_0^8 R_0}{6 (R_0^2 + r_0^2)^3} \equiv f(R_0, m^2, c, u_0),$$

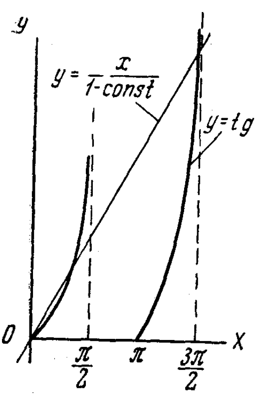

Рис. 1

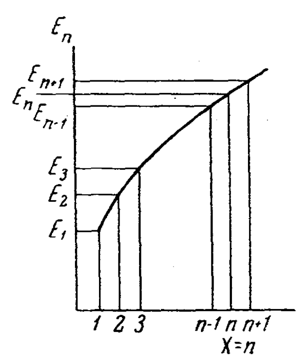

Рис. 2

где A, r_0^2, b были определены выше. Окончательно получаем

$$M = E_n = \varepsilon_n + f(R_0, m^2, c, u_0) = \sqrt{\frac{\pi}{4R_0^2} (2n+1)^2 + m^2 (1 - a^2)} +$$

$$+ f(R_0, m^2, u_0). \tag{15}$$

На рис. 2 изображен полученный спектр масс. Видно, что с ростом n уровни сближаются, становясь при больших n почти эквидистантными.

Рассмотрим вопрос об устойчивости полученного решения по отношению к малым возмущениям в начальный момент времени. В случае комплексного скалярного поля с произвольной нелинейностью $F(u^2)$

необходимое условие устойчивости, как показано Рыбаковым в [3], выглядит следующим образом:

$$\int F''(u^2)\,u^4\,dv < 0. \qquad (16)$$

Для нашей нелинейности область от 0 до u_0 (в этой области $F''=0$) не дает вклада в интеграл (16). Пусть $u_п = \frac{c}{2b}$ — точка перегиба функции $F(u^2)$. Можно так подобрать параметры модели, что вклад в интеграл области от u_0 до $u_п$, где $F''>0$ будет меньше, чем области правее u, где $F''<0$, или так, что точка $u_п$ будет находиться левее точки u_0. Так что в обоих случаях неравенство (16) будет справедливо.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за предоставление темы и постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазко В. Б., Лерюст Д., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, 35, 452, 1958.
2. Шушурин С. Ф. НДВШ, сер. физ.-мат. наук, 5, 1958.
3. Рыбаков Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1963.

Поступила в редакцию
8. 6 1964 г.

Кафедра
общей физики
для мехмата