Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1965

538.56 : 530.145

Ю. П. РЫБАКОВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Доказывается, что в классической теории нелинейного спинорного поля, использующей нелинейность, не зависящую от производных, не могут существовать устойчивые стационарные состояния.

Введение

В последнее время к нелинейному спинорному полю проявляется все больший интерес, связанный прежде всего с попытками Гейзенберга достичь единого описания всех элементарных частиц при помощи одного нелинейного уравнения [1]. Интерес к 4-спинорам обусловлен в основном их фундаментальным характером как величин, преобразующихся по простейшему неприводимому представлению полной группы Лоренца, что позволяет надеяться, что и уравнение для этих величин тоже будет простейшим. Вместе с тем ясно, что спиноры (своеобразные полувекторы) являются вспомогательными величинами, использование которых связано именно с критерием простоты [2, 3], тогда как реальные наблюдаемые величины получаются как их билинейные или еще более сложные комбинации.

Известно, что линейное лоренц-ковариантное спинорное уравнение имеет вид уравнения Дирака [4], и поэтому простейшее нелинейное обобщение его будет состоять в добавлении к кинематической части уравнения Дирака нелинейных членов, не зависящих от производных.

Согласно теореме переместительности Фирца [5] в классической теории (только которую и будем рассматривать, поставив цель выяснить ее возможности) существуют лишь два независимых инварианта: $s=(\bar{\psi}\psi)^2>0$ и $p=(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2<0$. Остальные же инварианты выражаются через них следующим образом:

$$V=\sum_{\mu=1}^{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2=s-p,\quad A=\sum_{\mu}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2=-V,$$

$$T=\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi]^2=-2(s+p).$$

Поэтому, не привлекая добавочных групповых соображений, плотность лагранжиана нелинейного спинорного поля можно выбрать следующей:

$$L = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma_\mu \psi - \bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi\right] - \mu\bar{\psi}\psi - F(s, p), \quad (1)$$

где F — некоторая дифференцируемая дважды функция, μ — обратная фундаментальная длина. В дальнейшем будем исследовать стационарные состояния такого поля, имеющие вид

$$\psi_0 = \chi_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t}.$$

К этим состояниям предъявляются следующие физические требования: 1) регулярность (отсутствие особых точек), 2) достаточная гладкость, 3) квадратичная интегрируемость во всем пространстве, приводящая к конечности энергии поля. Состояния такого типа можно назвать частицеподобными [6—8], поскольку они представляют собой полевые образования, локализованные в достаточно малой области пространства и по многим своим свойствам похожие на частицы [9]. Так как в ряде простейших случаев существование таких решений доказано [7, 8], то можно допустить, что при некоторых ограничениях на функцию F они будут существовать и в нашем случае (причем нелинейность можно выбрать и так, что состояния будут иметь только положительную энергию [8]).

Данная работа посвящена доказательству неустойчивости упомянутых решений по отношению к малым возмущениям поля в начальный момент времени. Чтобы сформулировать понятия устойчивого и неустойчивого состояний, необходимо определить метрическое расстояние в пространстве возмущений, или меру отклонения от невозмущенного состояния. В качестве таковой можно взять, например,

$$\rho(t) = q^{1/2} = \left[\int d\tau \{\xi^+\xi\}\right]^{1/2},$$

где

$$\xi(\vec{r}, t) = (\psi - \psi_0)\, e^{i\omega t},$$

$d\tau$ — элемент 3-объема.

Пусть отклонение поля в начальный момент есть ξ_0, а метрическое расстояние — ρ_0, тогда состояние ψ_0 называется устойчивым по Ляпунову, если по любому достаточно малому числу $\varepsilon > 0$ можно указать такую величину $\delta > 0$, что при $\rho_0 < \delta$ будет $\rho(t) < \varepsilon$ при любом $t > 0$ [10]. В противном случае состояние ψ_0 неустойчиво, т. е. для заданного ε не существует такого δ, что при $\rho_0 < \delta$ будет $\rho < \varepsilon$ для всех $t > 0$. Иными словами, какое бы $\delta > 0$ ни было предложено, всегда можно указать такое начальное возмущение, удовлетворяющее условию $\rho_0 < \delta$, что неравенство $\rho < \varepsilon$ будет обязательно нарушено для некоторого $t > 0$.

Доказательство неустойчивости

Единственная цель всех дальнейших рассуждений — показать, что для полевой системы, заданной плотностью лангранжиана (1), выполняются все условия 2-й теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости [11], которая может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что:

1) для некоторого допускающего бесконечно малый высший предел функционала $\dot{V}[\xi]$ существует область, где $V\dot{V}>0\left(\text{здесь } \dot{V}\equiv\frac{dV}{dt}\right)$, и

2) для некоторых значений величин ξ, численно сколь угодно малых, в этой области ($V\dot{V}>0$) возможно выделить подобласть, где некоторый функционал $W[\xi]>0$, а на границе ее ($W=0$) значения полной производной по времени $\dot{W}$ суть одного какого-либо определенного знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Смысл этой теоремы становится особенно понятным, если воспользоваться наглядными геометрическими представлениями Пуанкаре. Но сначала напомним, что Четаев называет функционал V допускающим бесконечно малый высший предел, если для всякого $l>0$ найдется такое $\lambda>0$, что при $t\geqslant 0$ и $\rho<\lambda$ будет выполняться неравенство $|V|<l$.

Для разъяснения смысла теоремы воспользуемся до некоторой степени условным чертежом. Именно проведем в метрическом пространстве возмущений две сферы радиусами $\rho=\varepsilon$ и $\rho=\delta<\varepsilon$ с центрами в исследуемом стационарном состоянии $\xi=0$. Также условно изобразим две области $V\dot{V}>0$ и $W>0$, причем последняя из них должна лежать внутри первой. Тогда доказательство неустойчивости состояния $\xi=0$ состоит в том, чтобы внутри δ-сферы найти такое начальное возмущение, чтобы оно с течением времени вышло за пределы ε-сферы. Условия теоремы Четаева как раз и обеспечивают существование такого начального возмущения (впрочем, второе положение теоремы имеет много других формулировок). Действительно, если $\dot{W}>0$ при $W=0$, то начальное возмущение, удовлетворяющее условиям $W_0>0$; $V_0>0$ и $\dot{V}_0>0$, будет как угодно долго оставаться в области $W>0$, в которой $\dot{V}>0$. Но последнее приводит к росту V и поэтому к выходу возмущения за пределы ε-сферы. В том же случае, когда $\dot{W}<0$ при $W=0$, возмущение выходит из области $W>0$, как только оно подойдет к ее границе. Но поскольку существуют возмущения, выходящие из области $W>0$ как «слева», так и «справа» от области пересечения сферы $\rho=\varepsilon$ с $W>0$, то существуют и промежуточные начальные условия, при которых возмущение выйдет из области $W>0$ лишь после того, как оно пересечет ε-сферу, что и доказывает неустойчивость. Конечно, этими наглядными представлениями нельзя заменить строгое аналитическое доказательство теоремы Четаева, приведенное, например, в его монографии [11].

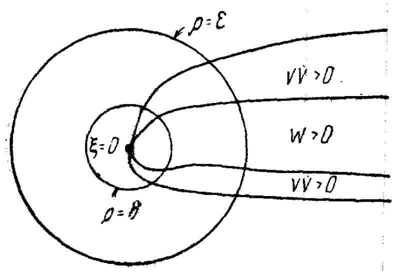

Рис. 1

Прежде чем применять эту теорему, нам нужно получить уравнения движения для возмущений ξ, что проще всего сделать путем разложения полного действия S вблизи состояния ψ_0. Тогда плотность лагранжиана возмущенного движения $\widetilde{L}$, квадратичная по ξ, находится из соотношения $\frac{1}{2}\delta^2 S=\widetilde{S}=\int dx\widetilde{L}$, откуда получим, что

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}[(\partial_\mu\bar{\xi})\gamma_\mu\xi-\bar{\xi}\gamma_\mu\partial_\mu\xi]-\bar{\xi}(\mu-\omega\gamma_4)\xi-2F''_{s_0}s_0(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)^2-$$

$$-4F''_{s_0p_0}\sqrt{s_0p_0}(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}_0\gamma_5\chi_0)-2F''_{p_0}p_0(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)^2-$$

$$-F'_{s_0}[(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)^2+2(\bar{\chi}_0\chi_0)(\bar{\xi}\xi)]-F'_{p_0}[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)^2+2(\bar{\chi}_0\gamma_5\chi_0)(\bar{\xi}\gamma_5\xi)],$$

где

$$s_0=(\bar{\chi}_0\chi_0)^2,\ p_0=(\bar{\chi}_0\gamma_5\gamma_0)^2,\ \sqrt{s_0p_0}=(\bar{\chi}_0\chi_d)(\bar{\lambda}_0\gamma_5\lambda_0).$$

Варьируя $\widetilde{S}$ по ξ и $\bar{\xi}$, найдем следующие уравнения движения:

$$\dot{\xi}=-i\gamma_4\{\vec{D}_0\xi+A(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)\chi_0+B(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)\gamma_5\chi_0+$$
$$+C[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)\chi_0+(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)\gamma_5\chi_0]\},\tag{2}$$
$$\dot{\xi}^+=i\{\xi^+\overleftarrow{D}_0\gamma_4+A(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)\bar{\chi}_0+B(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)\bar{\chi}_0\gamma_5+$$
$$+C[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)\bar{\chi}_0+(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)\bar{\chi}_0\gamma_5]\},$$

где введены операторы

$$\vec{D}_0=\vec{\gamma}\vec{\nabla}+\mu-\omega\gamma_4+2F'_{s_0}(\bar{\chi}_0\chi_0)+2F'_{p_0}(\bar{\chi}_0\gamma_5\chi_0)\gamma_5,$$

и

$$\overleftarrow{D}_0=\vec{\gamma}\overleftarrow{\nabla}+\mu-\omega\gamma_4+2F'_{s_0}(\bar{\chi}_0\chi_0)-2F'_{p_0}(\bar{\chi}_0\gamma_5\chi_0)\gamma_5,$$

удовлетворяющие соотношениям $\vec{D}_0\chi_0=0$ и $\chi_0^+\overleftarrow{D}_0=0$, а также использованы обозначения:

$$A=A^+=(4F''_{s_0}s_0+2F'_{s_0}),\ B=B^+=(4F''_{p_d}p_0+2F'_{p_0}),$$
$$C=-C^+=4F''_{s_0p_0}\sqrt{s_0p_0}.$$

В дальнейшем нам понадобятся первые две производные по времени от функционала $q=\int d\tau\,\{\xi^+\xi\}$, которые имеют следующий вид:

$$\dot{q}=i\int d\tau\,\{A[(\bar{\chi}_0\xi)^2-(\bar{\xi}\chi_0)^2]+B[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi)^2-(\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)^2]+$$
$$+2C[(\bar{\chi}_0\xi)(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi)-(\bar{\xi}\chi_0)(\bar{\xi}\gamma_5\chi_0]\},$$
$$\ddot{q}=2\int d\tau\,\{A[(\bar{\chi}_0\xi)(\chi_0^+\vec{D}_0\xi)+(\bar{\xi}\chi_0)(\xi^+\overleftarrow{D}_0\chi_0)]+$$
$$+B[(\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)(\xi^+\overleftarrow{D}_0\gamma_5\chi_0)-(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi)(\chi_0^+\gamma_5\vec{D}_0\xi)]+$$
$$+C[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi)(\chi_0^+\overleftarrow{D}_0\xi)-(\bar{\chi}_0\xi)(\chi_0^+\gamma_5\vec{D}_d\xi)+(\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)(\xi^+\overleftarrow{D}_d\chi_0)+$$
$$+(\bar{\xi}\chi_0)(\xi^+\overleftarrow{D}_0\gamma_5\chi_0)]+(\chi_0^+\gamma_5\chi_0)(AB-2C^2)[(\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)(\bar{\chi}_0\xi)-(\bar{\xi}\chi_0)(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi)]+$$
$$+(\chi_0^+\chi_0)[A(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)+C(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)]^2-$$
$$-(\chi_0^+\chi_0)[B(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)+C(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)]^2\}.$$

Здесь $\dot{q}$ является знакопеременным функционалом; что же касается $\ddot{q}$, то существует область возмущений, в которой он положительно определен. Эта область имеет вид достаточно узкой «полосы» вблизи «луча» $\xi=c\chi_0$, где c — действительная постоянная. В самом деле, если $\xi=c\chi_0$, то в выражении для $\ddot{q}$ отличными от нуля будут лишь два последних слагаемых, которые без сомнения положительны. Преобладающая роль этих двух членов будет сохраняться и внутри некоторой области вблизи данного «луча». Это обстоятельство является весьма существенным в дальнейшем доказательстве.

Попытаемся выделить область $\ddot{q}>0$ с помощью некоторого функционального неравенства, для чего рассмотрим функционал

$$Д=\int d\tau\,\{(\xi^{+}\overleftarrow{D}_0)(\overrightarrow{D}_0\xi)\},$$

нулевая точка которого совпадает с «плоскостью» $\xi=c_1\chi_0$, где c_1 — комплексная постоянная. Поэтому с помощью неравенства $Д<\beta q$, где β — достаточно малое положительное число, мы сможем выделить некоторую область вблизи «плоскости» $\xi=c_1\chi_0$. Однако если $\operatorname{Re} c_1=0$, то $\ddot{q}\,\{\xi=c_1\chi_0\}=0$, и поэтому этот случай необходимо как-то исключить. Это можно сделать путем выбора соответствующих начальных условий для возмущения ξ. В самом деле, $\xi=c_1\chi_0$ при $\operatorname{Re} c_1=0$ является точным решением уравнений движения (2), и поэтому в силу теоремы единственности выбор начального возмущения ξ_0 вблизи $\xi=c\chi_0$, т. е. при малом $Im c_1$, гарантирует нам исключение случая $\operatorname{Re} c_1=0$.

Следовательно, при указанных начальных условиях всегда можно найти такое β, что для возмущения в области $Д<\beta q$ будет иметь место неравенство $\ddot{q}>0$.

Постараемся удовлетворить условиям теоремы Четаева о неустойчивости с помощью функционала $V=q$. Тогда область $V\dot{V}>0$ определится неравенством $\dot{q}>0$. В качестве подобласти $W>0$ можно было бы взять, например, $\beta\dot{q}-\dot{Д}>0$. Однако убедиться в том, что $\beta\ddot{q}-\ddot{Д}>0$ на границе $Д=\beta\dot{q}$, не представляется возможным из-за сложности функционалов. Но при рассмотрении функционала

$$\begin{aligned}\dot{Д}=i\int d\tau\,\{&A(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)\,[\bar{\chi}_0(\overrightarrow{d}_0\xi)-(\xi^{+}\overleftarrow{d}_0)\gamma_4\chi_0]+\\&+B(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)\,[\bar{\chi}_0\gamma_5(\overrightarrow{d}_0\xi)-(\xi^{+}\overleftarrow{d}_0)\gamma_4\gamma_5\chi_0]+\\&+C\,[(\bar{\chi}_0\gamma_5\xi+\bar{\xi}\gamma_5\chi_0)(\bar{\chi}_0(\overrightarrow{d}_0\xi)-(\xi^{+}\overleftarrow{d}_0)\gamma_4\chi_0)+\\&+(\bar{\chi}_0\xi+\bar{\xi}\chi_0)(\bar{\chi}_0\gamma_5(\overrightarrow{d}_0\xi)-(\xi^{+}\overleftarrow{d}_0)\gamma_4\gamma_5\chi_0)]\},\end{aligned}$$

где $\overrightarrow{d}_0=\gamma_4\overrightarrow{D}_0\gamma_4\overrightarrow{D}_0$ и $\overleftarrow{d}_0=\overleftarrow{D}_0\gamma_4\overleftarrow{D}_0\gamma_4$, можно заметить, что вблизи $Д=0$ должно быть и $\dot{Д}\approx 0$, в то время как $\ddot{q}>0$. Отсюда в силу непрерывной зависимости этих функционалов от ξ следует, что существует такая верхняя граница для $Д$, которую обозначим через $\beta\alpha|\tilde{\mathscr{E}}|$, где $\tilde{\mathscr{E}}$ — интеграл энергии, что при $Д<\beta\alpha|\tilde{\mathscr{E}}|$ должно быть $\beta\ddot{q}-|\dot{Д}|>0$ для некоторых начальных условий, оговоренных выше, и, конечно, таких, что $\tilde{\mathscr{E}}\neq 0$. При этом очевидно, что число α должно выбираться в зависимости от предлагаемого δ (для опровержения устойчивости).

Используя это обстоятельство, выберем

$$W=\beta(|\tilde{\mathscr{E}}|\alpha-\dot{q})-Д.$$

Тогда в области $W>0$ при начальных условиях $\dot{q}>0$ и упомянутых выше также должно иметь место неравенство $|\dot{Д}|<\beta\ddot{q}$. Следовательно, на границе $W=0$ будет $\dot{W}=-\beta\ddot{q}-\dot{Д}<0$, т. е. условия теоремы Четаева выполнены.

Тем самым мы приходим к заключению, что существует такая ε-окрестность исследуемых стационарных состояний, за пределы которой обязательно выйдет возмущение, удовлетворяющее определенным начальным условиям внутри любой как угодно малой δ-окрестности. Интересно, что система наиболее «болезненно» реагирует на возмущения, подобные ей самой, т. е. $\xi = c\chi_0$.

Обсуждение

Проведенный анализ показывает, что при рассмотрении классических нелинейных спинорных полей вряд ли можно избавиться от неустойчивости, причиной которой в конечном счете является знакопеременность энергии поля при обязательном влиянии самодействия (так, линейное поле тривиально устойчиво, так как $\dot{q}=0$). В пользу этого утверждения можно привести следующие достаточно общие соображения. Обратим внимание на то, что условия теоремы Ляпунова об устойчивости являются не только достаточными, но и необходимыми [10, 11], а это означает, что, если движение устойчиво, то обязательно существует знакоопределенный интеграл движения (случай $\dot{V}<0$ исключается в силу обратимости исходных уравнений во времени). Все это говорит о необходимости рассмотрения теории, в которой выполнялось бы усиленное условие Лежандра, т. е. квадратичная форма, составленная из производных от поля, входящих в исследуемые функционалы, должна быть положительно определенной. Однако даже для спинорных полей, описываемых уравнениями второго порядка, например с $L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\,\partial_\mu\psi - F(s,\, p)$, это не имеет места. Поэтому надеяться получить в этой схеме стабильные фермионы (электрон и протон) можно либо путем использования связи с некоторыми устойчивыми полями бозонного типа, либо путем рассмотрения последовательно квантовой теории. Полученный результат в какой-то степени перекликается с тем фактом, что при описании распадных свойств элементарных частиц (слабых взаимодействий) используется четырехфермионное взаимодействие, структура которого похожа на рассмотренные нелинейности.

В заключение приношу благодарность проф. Я. П. Терлецкому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелинейная квантовая теория поля. Под ред. Д. Д. Иваненко. М., ИЛ, 1959.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехтеориздат, 1957.
3. De Broglie L. Theorie general des particules à Spin. Paris, 1954.
4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
5. Мэтьюс П. Релятивистская квантовая теория взаимодействия элементарных частиц. М., ИЛ, 1959.
6. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, 35, 452, 1958.
7. Finkelstein R., Levier R. L., Ruderman M. Phys. Rev., 83, 326, 1951 (см. также [1], статья 9).
8. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaus P. Phys. Rev., 103, 1571, 1956 (см. также [1], статья 10).
9. Finkelstein R. J. Phys. Rev., 75, 1079, 1949.
10. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во МГУ, 1957, § 9.
11. Четаев Н. Т. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию
8. 7 1964 г.

Кафедра
теоретической физики