При увеличении амплитуды внешнего воздействия резонансные амплитуды также увеличиваются, что видно из рис. 3.

Наблюдалось изменение формы вынужденных колебаний в образце при изменении частоты внешней силы. Вдали от резонансных частот форма колебаний была близка к гармонической. При приближении к резонансу форма колебаний искажалась. При резонансе вблизи 150 *Кгц* наблюдались колебания, соответствующие сумме колебаний с частотами, близкими к 150 *Кгц* и 300 *Кгц*. По-видимому, в момент резонанса кроме колебаний с частотой вынуждающей силы (150 *Кгц*) возникают колебания с частотой, близкой к 300 *Кгц*. При частоте внешней силы 300 *Кгц* колебания в образце оставались синусоидальными. Форма колебаний вблизи резонансов искажалась также и за счет нелинейности характеристики, особенно влияющей на форму колебаний при больших амплитудах колебаний.

Проводилось качественное наблюдение изменения разности фаз между током и напряжением на образце при изменении частоты внешнего воздействия. Вблизи частот внешней силы, равных 150 *Кгц* и 300 *Кгц* разность фаз резко изменялась.

Травление образцов влияло на положение максимумов и минимумов. Например, после травления образцов германия n-типа в перекиси водорода иногда наблюдалось полное исчезновение острых максимумов, иногда — исчезновение максимумов на одних частотах и уменьшение максимумов на других. После травления в перекиси водорода образцов германия p-типа продолжали наблюдаться максимумы на прямой ветви и минимумы на обратной, но частоты их оказались несколько смещенными. Иногда наблюдалось появление новых максимумов. Травление не влияло на размытый максимум.

Обнаруженные резонансные свойства образцов германия с точечными контактами представляют интерес как с точки зрения физических процессов, происходящих в области контакта, так и с точки зрения возможных практических применений этих свойств. Особый интерес представляет наличие острых резонансов в сочетании с отрицательным сопротивлением образца. Дальнейшее изучение описанных явлений может дать дополнительные сведения о физических свойствах и природе процессов, происходящих в образцах полупроводника n- и p-типа с точечными контактами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cardona M., Ruppel W. J. Appl. Phys., **31**, 1826, 1960.
2. Kikuchi M., J. Phys. Soc. Jap., **17**, 240, 1962.
3. Муравский Б. С. «Физика твердого тела», **4**, 2485, 1960.
4. Kikuchi M. Jap. J. Appl. Phys., **2**, 31, 1963.
5. Андронов Ю. П., Анупыльд А. Ю., Губанков В. Н., Ястребцева Т. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 83, 1964.

Поступила в редакцию
3. 4 1965 г.

Кафедра
физики колебаний

539.124.6

И. М. ТЕРНОВ, Р. А. РЗАЕВ

ОСОБЕННОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЗИТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящей работе исследуются поляризационные свойства излучения, испускаемого позитронами с ориентированным спином при их движении в однородном магнитном поле. Для решения этой задачи следует воспользоваться волновыми функциями позитрона, удовлетворяющими уравнению Дирака

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-c\vec{\alpha}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e_0}{c}A\right)-\rho_3 m_0c^2\right\}\psi^{\text{п}}=0. \qquad (1)$$

Для разделения решений уравнения Дирака по спиновым состояниям мы подчиняли волновую функцию требованию быть собственной функцией оператора тензора поляризации [1]

$$\Pi_{12}\psi^{\text{п}} = (m_0 c\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{P}]_z)\psi^{\text{п}} = \hbar k\zeta\psi^{\text{п}}, \tag{2}$$

где $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e_0}{c} A$, $k = \sqrt{\vec{K}^2 - k_3^2}$, $K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 4\gamma n}$, $\gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar}$, а $\zeta = \pm 1$ соответствует состояниям поляризации спина позитрона: $\zeta = -1$ по полю, $\zeta = 1$ против поля (магнитное поле направлено по оси z).

Решение уравнения Дирака совместно с (2) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$\psi^{\text{п}}_{nsk_3\zeta} = e^{-ickt} \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} \cdot \frac{e^{-i\left(l - \frac{1}{2}\right)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f(r, \zeta), \tag{3}$$

где радиальные функции f равны

$$f_1 = C_1 I_{ns}(\rho) e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \qquad f_3 = C_3 I_{ns}(\rho) e^{-i\frac{\varphi}{2}},$$
$$f_2 = iC_2 I_{n-1,s}(\rho) e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \qquad f_4 = iC_4 I_{n-1,s}(\rho) e^{-i\frac{\varphi}{2}}. \tag{4}$$

Здесь $\rho = \gamma r^2$, I_{ns} — функции Лагерра (см [1,3]), $n = l + s$ — главное, l — орбитальное и s — радиальное квантовые числа. Спиновые коэффициенты C_μ принимают вид

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \alpha A, \qquad C_2 = -\frac{\zeta}{2\sqrt{2}} \beta B, \qquad C_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \alpha B,$$

$$C_4 = \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} \beta A, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sqrt{1 \pm \zeta \frac{k_0}{K}}, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \frac{k_3}{k}} \pm \zeta \sqrt{1 - \frac{k_3}{k}}^{\,*}.$$

Следуя методу расчета [2, 3, 4] рассмотрим поляризационные свойства спонтанного излучения. В классическом приближении формула Шотта для интенсивности излучения [2] принимает вид

$$W = \frac{ce^2\beta^2}{2\pi R^2} \nu^2 \{\beta\lambda_2 J_\nu(\nu\beta\sin\theta) - \lambda_3 \operatorname{ctg}\theta J_\nu(\nu\beta\sin\theta)\}^2. \tag{6}$$

Напомним, что [2] для электронов поляризационные компоненты излучения имели вид $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, σ — компонент и $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, λ — компонент линейной поляризации; $\lambda_2 = -\lambda_3 = \frac{1}{a}$ — правая круговая и $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{a}$ — левая круговая поляризация. В случае излучения позитрона линейные компоненты в классическом приближении не меняются, однако круговая поляризация меняет знак: $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует правой, а $\lambda_2 = -\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — левой круговой поляризации фотонов.

Таким образом, в верхней полуплоскости $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$ электрон излучает право-поляризованный свет, а позитрон лево-поляризованный. В нижней полуплоскости знаки поляризации изменяются на противоположные.

Заметим, что в квантовом приближении компоненты линейной поляризации в членах, зависящих от спина, также меняют знаки. Так, σ-компонент имеет вид [3] (переходы без обращения спина)

$$W_2^{\uparrow\uparrow} = W^{\text{кл}} \left\{ \frac{7}{8} - \left(\frac{25\sqrt{3}}{12} \pm \zeta \right) \frac{3}{2} \cdot \frac{\hbar}{m_0 cR} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 + \ldots \right\}. \tag{7}$$

* Волновая функция позитрона может быть получена также действием оператора зарядового сопряжения $\hat{C} = -i\alpha_2\rho_3$ на электронную функцию [1, 2, 3] $\psi^{\text{п}} = \hat{C}\psi^{*\,\text{эл}}(-k_1 - k_3, -\varsigma)$. При этом после комплексного сопряжения в электронной функции следует изменить знак энергии — импульса вдоль поля, а также собственного значения тензора поляризации ς. В случае продольной поляризации знак ς сохраняется без изменений.

Здесь верхний знак относится к электрону, а нижний к позитрону.

Производя расчет для вероятности квантовых переходов с обращением спина [4], найдем, что вероятность имеет вид

$$w^{\uparrow\downarrow}_{\text{э/п}} = w^0\left(1 \pm \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15}\right). \tag{8}$$

Здесь верхний знак относится к электрону, а нижний к позитрону. В случае $\zeta=1$ спин обеих частиц направлен по внешнему магнитному полю, при $\zeta=-1$ — против поля

$$w^0 = \frac{5\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{\hbar}{m_0 cR}\cdot\frac{e_0^2}{m_0 cR^2}\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^5. \tag{9}$$

Таким образом, при одновременном движении в магнитном поле поляризованных по спину электронов и позитронов с одинаковой энергией через достаточно большой промежуток времени $t>\tau=(2w^0)^{-1}$ спины частиц должны стать ориентированными противоположно друг другу.

Авторы выражают признательность проф. А. А. Соколову за дискуссию результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, **31**, 473, 1956.
3. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. ЖЭТФ, **46**, 374, 1964.
4. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 62, 1964.

Поступила в редакцию
20. 4 1965 г.

Кафедра
теоретической физики

519.919

В. М. ВОЛОСОВ, Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К РАСЧЕТУ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. В работах [1, 2] дано обоснование метода усреднения для систем с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t),\ x(t-\tau),\ t).$$

Аналогичные системы без запаздывания называются системами в стандартной форме [4]. Здесь и далее τ — фиксированная неотрицательная величина.

В настоящей заметке метод усреднения разрабатывается для систем вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau)),\\ \dot{\psi}(t) = \omega[x(t),\ x(t-\tau)] + \varepsilon Y[x(t),\ x(t-\tau)\ \psi(t),\ \psi(t-\tau)).\end{gathered} \tag{1}$$

Рассматриваются решения, удовлетворяющие на начальном множестве условию $x(t)=a(t)$, $\psi(t)=b(t)$ на $-\tau\leqslant t\leqslant 0$. Здесь $x(t)$—n-мерная векторная функция, $\psi(t)$— скалярная функция (вращающаяся фаза), ε — малый параметр. Системы типа (1), не содержащие запаздывания, называются системами с быстро вращающейся фазой [3—5]. Метод усреднения состоит в отыскании некоторой замены переменных, исключающей быстрые движения из правых частей и позволяющей рассматривать вместо исходной системы более простую, так называемую усредненную систему, решение которой оказывается близким к решению исходной на всем рассматриваемом промежутке времени. В настоящей заметке получены усредненные уравнения первого приближения по степеням параметра ε для системы (1) и проведено обоснование применимости метода усреднения к системе (1).

Основные результаты. Теорема. Пусть функции $X(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau))$, $\psi(t)$, $\psi(t-\tau)$ определены в области $x(t)$, $x(t-\tau)\in D_0$; $|\psi(t)|$, $|\varphi(t-\tau)|<\infty$; $|\varepsilon|\leqslant K$, где D_0 — некоторая область n-мерного пространства $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, K — некоторая постоянная, равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ по всем аргументам, кроме аргумента $\psi(t)$ функции X. Функция