Здесь верхний знак относится к электрону, а нижний к позитрону.

Производя расчет для вероятности квантовых переходов с обращением спина [4], найдем, что вероятность имеет вид

$$w^{\uparrow\downarrow}_{э/п} = w^0\left(1 \pm \zeta \frac{8\sqrt{3}}{15}\right). \tag{8}$$

Здесь верхний знак относится к электрону, а нижний к позитрону. В случае $\zeta=1$ спин обеих частиц направлен по внешнему магнитному полю, при $\zeta=-1$ — против поля

$$w^0 = \frac{5\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{\hbar}{m_0 cR}\cdot\frac{e_0^2}{m_0 cR^2}\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^5. \tag{9}$$

Таким образом, при одновременном движении в магнитном поле поляризованных по спину электронов и позитронов с одинаковой энергией через достаточно большой промежуток времени $t>\tau=(2w^0)^{-1}$ спины частиц должны стать ориентированными противоположно друг другу.

Авторы выражают признательность проф. А. А. Соколову за дискуссию результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 153, 1052, 1963.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 31, 473, 1956.
3. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. ЖЭТФ, 46, 374, 1964.
4. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 62, 1964.

Поступила в редакцию
20. 4 1965 г.

Кафедра
теоретической физики

519.919

В. М. ВОЛОСОВ, Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К РАСЧЕТУ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. В работах [1, 2] дано обоснование метода усреднения для систем с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t),\ x(t-\tau),\ t).$$

Аналогичные системы без запаздывания называются системами в стандартной форме [4]. Здесь и далее τ — фиксированная неотрицательная величина.

В настоящей заметке метод усреднения разрабатывается для систем вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau)),$$

$$\dot{\psi}(t) = \omega[x(t),\ x(t-\tau)] + \varepsilon Y[x(t),\ x(t-\tau)\ \psi(t),\ \psi(t-\tau)). \tag{1}$$

Рассматриваются решения, удовлетворяющие на начальном множестве условию $x(t)=a(t)$, $\psi(t)=b(t)$ на $-\tau\leqslant t\leqslant 0$. Здесь $x(t)$—n-мерная векторная функция, $\psi(t)$ — скалярная функция (вращающаяся фаза), ε — малый параметр. Системы типа (1), не содержащие запаздывания, называются системами с быстро вращающейся фазой [3—5]. Метод усреднения состоит в отыскании некоторой замены переменных, исключающей быстрые движения из правых частей и позволяющей рассматривать вместо исходной системы более простую, так называемую усредненную систему, решение которой оказывается близким к решению исходной на всем рассматриваемом промежутке времени. В настоящей заметке получены усредненные уравнения первого приближения по степеням параметра ε для системы (1) и проведено обоснование применимости метода усреднения к системе (1).

Основные результаты. Теорема. Пусть функции $X(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t-\tau))$, $\psi(t)$, $\psi(t-\tau)$ определены в области $x(t)$, $x(t-\tau)\in D_0$; $|\psi(t)|$, $|\varphi(t-\tau)|<\infty$; $|\varepsilon|\leqslant K$, где D_0 — некоторая область n-мерного пространства $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, K — некоторая постоянная, равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица с постоянной λ по всем аргументам, кроме аргумента $\psi(t)$ функции X. Функция

$\omega[x(t),\ x(t-\tau)]$ определена в D_0 и равномерно ограничена вместе с первыми производными, также удовлетворяющими условию Липшица.

В некоторой области D переменных ξ и θ при $|\psi_0| < \infty$ равномерно по отношению к ξ, θ и ψ_0 существуют не зависящие от ψ_0 пределы — средние значения

$$\overline{X}(\xi,\ \theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\psi_0}^{T+\psi_0} X(\xi,\ \xi,\ \psi,\ \psi-\theta)\,d\psi,$$

$$\overline{Y}(\xi,\ \theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\psi_0}^{T+\psi_0} Y(\xi,\ \xi,\ \psi,\ \psi-\theta)\,d\psi.$$

Существует единственное решение усредненной системы

$$\begin{gathered} \dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi,\ \theta), \\ \dot{\theta} = \varepsilon\tau\left(\frac{\partial\omega(\xi,\ \xi)}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\omega(\xi,\ \xi)}{\partial\xi_2}\right)\overline{X}(\xi,\ \theta), \\ \xi(0) = a(0), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\theta(0) = \int\limits_0^{\tau} \omega[a(0),\ a(t-\tau)]\,dt + \int\limits_{\tau}^{2\tau} \{\omega[a(0),\ a(0)] - \omega[a(0),\ a(t-2\tau)]\}\,dt,$$

принадлежащее D вместе с некоторой своей окрестностью и определенное при $|\varepsilon| \leqslant K$ в промежутке $t \in \left[0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$, где L — произвольное фиксированное положительное число.

На сегменте $\left[0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$ существует решение системы (1), лежащее в области $x(t),\ x(t-\tau) \in D_0$, причем точки $(\xi,\ \theta)$ при $\xi = x(t)$, $\xi = x(t-\tau)$, $\theta = \psi(t) - \psi(t-\tau)$ принадлежат области D.

Тогда для сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ равномерно для всех $t \in \left[0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$ $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, где x — решение системы (1), а ξ — решение системы (2).

Доказательство этой теоремы, полное изложение которого мы здесь не приводим, основывается на следующих соображениях.

Уравнения с запаздыванием содержат в правых частях X и Y наряду с фазой $\psi(t)$ также и $\psi(t-\tau)$. Влияние запаздывания в рассматриваемом приближении оказывается удобным учесть с помощью введения еще одной медленно меняющейся величины $\alpha = \psi(t) - \psi(t-\tau)$, определенной для $t \geqslant 0$. Начиная с третьего шага $(t \geqslant 2\tau)$ производная α будет иметь порядок $0(\varepsilon)$ в силу первых n уравнений. Вводя α, перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \varepsilon X(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t) - \alpha(t)), \\ \dot{\alpha}(t) = \omega[x(t),\ x(t-\tau)] - \omega[x(t-\tau),\ x(t-2\tau)] + \\ + \varepsilon[Y(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t) - \alpha(t)) - Y(x(t-\tau),\ x(t-2\tau),\ \psi(t) - \\ - \alpha(t),\ \psi(t) - \alpha(t) - \alpha(t-\tau))], \\ \dot{\psi}(t) = \omega(x(t),\ x(t-\tau)) + \varepsilon Y(x(t),\ x(t-\tau),\ \psi(t),\ \psi(t) - \alpha(t)), \\ x(t) = a(t),\quad \psi(t) = b(t) \quad \text{на} \quad [-\tau,\ 0]. \end{gathered} \tag{3}$$

По поводу начальных условий для α необходимо отметить следующее. Второе уравнение системы (3) определено для $t \geqslant 2\tau$. На первых двух шагах мы можем определить α с точностью до членов порядка $0(\varepsilon)$, интегрируя третье уравнение и полагая для всех $0 \leqslant t \leqslant 2\tau$ $x(t) = a(0)$.

В первом приближении для медленных переменных $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ вводится замена переменных

$$\begin{gathered} x_0 = \xi + \varepsilon u(\xi,\ \psi,\ \theta), \\ \alpha_0 = \theta + \varepsilon w(\xi,\ \psi,\ \theta), \end{gathered}$$

где ξ и θ — решения усредненной системы (2), а u и w — функции, имеющие вид интегралов от функций с нулевым средним значением. Например, функция $u(\xi, \psi, \theta)$ имеет вид:

$$u(\xi, \psi, \theta) = \frac{1}{\omega(\xi, \xi)} \int\limits_D \Delta(s - s')\,ds' \int\limits_0^{\psi} \{X(\xi', \xi', \psi, \psi - \theta') - \overline{X}(\xi', \theta')\}\,d\psi,$$

где s — вектор $\{\xi, \theta\}$, $\Delta(s)$ — «сглаживающая» функция типа

$$\Delta(s) = \begin{cases} Cl^{-N/2}(\varepsilon) \exp\left(\dfrac{s^2}{s^2 - l(\varepsilon)}\right) & \text{для} \quad |s| \leqslant l^{1/2}(\varepsilon) \\ 0 & \text{для} \quad |s| \geqslant l^{1/2}(\varepsilon) \end{cases},$$

где $l(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $N = n + 1$ — размерность вектора s, C — нормирующий множитель, выбираемый из условия равенства единице интеграла от функции $\Delta(s)$ по всему пространству. Функция $\Delta(s)$ введена лишь для ослабления требований к правым частям (от них требуется лишь удовлетворение условиям Липшица). На всем промежутке $\left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ функции u и w удовлетворяют оценкам типа:

$$|\varepsilon u| \leqslant cl(\varepsilon), \quad \left|\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial s_i}\right| \leqslant Cl^{1/2}(\varepsilon), \quad \left|\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \psi} \omega(\xi, \xi) - \varepsilon(X - \overline{X})\right| \leqslant C\varepsilon l^{1/2}(\varepsilon).$$

Для всех $2\tau \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}$ X_0 и α_0 удовлетворяют уравнениям, правые части которых отличаются от правых частей соответствующих уравнений системы (3) на величины порядка $O(\varepsilon)$. Приближенно полученные «начальные данные» для x_0 и α_0 в точке 2τ отличаются от истинных значений x и α в той же точке на величины порядка $O(1)$ (в силу оценок для функций u и w). На всем промежутке $\left[2\tau, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ величина $\delta = |x - x_0| + |\alpha - \alpha_0|$ удовлетворяет дифференциальному неравенству типа неравенства Гронуолла, откуда требуемый результат $\left(\text{для всех } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}\right)$ будет следовать для величины $|x - \xi|$ в силу оценок функции u и медленности x и ξ для всех $t \geqslant 0$.

Практический интерес к исследованию систем типа (1) обусловлен тем, что к ним редуцируются многие задачи о колебательных и вращательных режимах в системах с одной степенью свободы, параметры которых зависят от медленно меняющихся переменных x, описываемых уравнениями вида

$$\frac{d}{dx}\left[m(x)\frac{dy}{dx}\right] + Q(x, y) = \varepsilon f[x(t), x(t - \tau), y(t), y(t - \tau), \dot{y}(t), \dot{y}(t - \tau)], \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X[x(t), x(t - \tau), y(t), \dot{y}(t)].$$

Системы вида (4) при отсутствии запаздывания в правых частях изучались в [4—8].

В заключение заметим, что аналогичным образом могут быть рассмотрены высшие приближения метода усреднения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай. Revue de math. pures et appl., 4, No. 3, 1959.
2. Рубаник В. П. «Научн. ежегодн. Черновиц. ун-та за 1959 г.», 1960.
3. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн.», 7, 1955.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1955.
5. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6, 108, 1962.
6. Волосов В. М. «Журн. вычисл. мат. и мат. физ.», 3, № 1, 1963.
7. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, 151, № 6, 1963.
8. Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1965.

Поступила в редакцию
28. 6 1965 г.

Кафедра
математики