

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1966

УДК 62—505.5

Г. Е. КОЛОСОВ

СИНТЕЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАЗЛИЧНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Методами динамического программирования [1] решаются задачи синтеза автоматических систем слежения за блуждающей координатой, оптимальных по разным критериям. Приводятся некоторые результаты численного решения, позволяющие произвести сравнение этих систем.

Введение и постановка задачи

При решении различных статистических задач теории оптимального управления критерием качества чаще всего является величина среднего значения некоторой функции, называемой обычно функцией штрафа. Однако требования, предъявляемые к оптимальной системе, могут быть сформулированы и с несколько иных позиций. В качестве примера можно указать задачи, связанные с достижением границ. Ниже последовательно излагаются различные варианты требований, которым должны удовлетворять соответствующие оптимальные системы.

Предположим, что поведение неизменяемой s -части системы (рис. 1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u), \quad (1)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор «выходных» фазовых координат, $u = (u_1, \dots, u_r)$ — вектор управляющих воздействий, а функция f является заданной вектор-функцией своих аргументов. Допустим, что на изменение вектора u наложено ограничение

$$u \in U, \quad (2)$$

где U — замкнутое множество r -мерного пространства. Пусть, кроме того, изменение вектора «входных» координат определяется системой m флуктуационных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, \xi), \quad (3)$$

где $\xi = \xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ — m -мерный случайный процесс с известными статистическими характеристиками, а φ — известная вектор-функ-

ция. Будем считать также, что в $(n+m)$ -мерном пространстве координат (x, y) задана некоторая функция штрафа $C(x, y)$. Рассмотрим три постановки задачи.

1. Оптимальная система должна выбирать в каждый момент времени $\tau \geq t_0$ управляющее воздействие u_τ таким образом, чтобы среднее значение интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} C(x_\tau, y_\tau) d\tau \quad (4)$$

было минимальным.

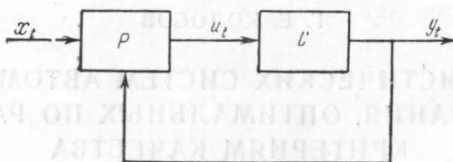


Рис. 1

2. Определим замкнутую область L_k пространства (x, y) из условия, что для всех $x, y \in L_k$ выполняется

$$C(x, y) \leq k. \quad (5)$$

Если в начальный момент времени изображающая точка (x, y) находится внутри L_k , то по истечении некоторого промежутка времени из-за наличия случайного воздействия ξ она достигает границы L_k . Допустимые (т. е. удовлетворяющие (2)) управляющие воздействия u необходимо выбирать таким образом, чтобы максимизировать среднее значение времени достижения изображающей точкой границы L_k .

3. Рассмотрим поведение системы на фиксированном отрезке времени $[0, T]$. Из всех допустимых управляющих функций $u(t)$ нужно выбирать такие, которые минимизировали бы среднее значение следующей величины:

$$\max_{0 < t \leq T} C(x_t, y_t). \quad (6)$$

При такой постановке задачи соответствующая оптимальная система обеспечивает наилучший по сравнению с другой системой результат только лишь в наихудшем случае.

Для фактического решения задачи часто бывает удобна несколько иная формулировка.

3'. Не фиксируя явно времени наблюдения, требуем, чтобы оптимальная система минимизировала

$$\max_{\tau \geq t} C(x_\tau, y_\tau) e^{-\beta(\tau-t)}. \quad (7)$$

Такое математическое видоизменение задачи 3 сохраняет все ее характерные черты. Действительно, как видно из (7), время наблюдения самой функции $C(x, y)$ фактически ограничено, причем масштаб времени определяется величиной β . Именно для малых β соответствующее время велико, а для больших β мало.

Выше рассматривалась произвольная функция штрафа $C(x, y)$. Если же возьмем в качестве $C(x, y)$ такую функцию, которая была бы всюду неотрицательна и не убывала при увеличении модуля рассогласования $z = x - y$, то в этом случае требования 1, 2, 3 и 3' определяют различные варианты оптимальных систем слежения за блуждающей координатой.

Как уже указывалось, задачи типа 1 являются наиболее распространенными, и в настоящее время уже имеется значительное число работ, посвященных их решению. Что касается задач типа 2, 3 и 3', то они рассмотрены гораздо меньше, хотя различные авторы неоднократно указывали на целесообразность их решения (см. [1, 2, 3]). В частности, задача о минимизации модуля максимального отклонения (вариант задачи 3) фигурирует в качестве проблемного вопроса в большом числе работ Беллмана.

В настоящей работе основное внимание сосредоточено на решении задач 2, 3 и 3'.

Вывод уравнений Беллмана

Мы будем решать задачу синтеза оптимальной системы, в которой используется принцип обратной связи (см. рис. 1). Иными словами, мы должны указать способ конструирования блока регулятора P , который на основании измерения входных величин x и выходных координат y выдавал бы в каждый момент времени необходимое значение управления u (удовлетворяющее (2)). В дальнейшем будем предполагать, что вектор входных данных $x = x(t)$, определяемый (3), представляет из себя m -мерный марковский процесс (более подробно вопрос о возможности замены реального процесса процессом Маркова обсуждается в [4]). В этом случае искомая оптимальная синтезирующая функция будет зависеть от мгновенных значений координат $u = u(x_t, y_t)$. Эту функцию можно найти, пользуясь принципами динамического программирования [1]. Методика решения задач оптимального управления, основанная на использовании динамического программирования, достаточно хорошо известна. Поэтому на ней более подробно останавливаться не будем.

Задача 1. Эта задача подробно рассматривается в [5], тем не менее вкратце изложим вывод основного уравнения, имея в виду сравнить его с соответствующими уравнениями задач 2, 3 и 3'.

Рассмотрим функцию потерь $S_0(x_t, y_t, t)$, которая по определению равна

$$S_0(x_t, y_t, t) = M \left\{ \min_{u_\tau \in U} \int_t^{T_0} C(x_\tau, y_\tau) d\tau \right\}, \quad (8)$$

где $M \{ \dots \}$ — символ среднего значения, а T_0 — время окончания работы системы, которое пока фиксируется. Принцип оптимальности Беллмана позволяет записать

$$S_0(x_t, y_t, t) = M \left\{ \min_{u_\tau} \left[\int_t^{t+\Delta} C(x_\tau, y_\tau) d\tau + S_0(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}, t + \Delta) \right] \right\}. \quad (9)$$

Для получения дифференциального уравнения для функции S_0 необходимо воспользоваться выражениями для приращений координат x и y . Из уравнений (1) следует, что для малых Δ можно записать

$$y_{t+\Delta} - y_t = f(y_t, u_t) \Delta + 0(\Delta), \quad (10)$$

где $0(\Delta)$ обозначает члены более высокого порядка малости по Δ . Кроме того, из уравнений (3) можно получить

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} M \left\{ \frac{x_{t+\Delta}^i - x_t^i}{\Delta} \middle| x_t \right\} = a_i(x_t), \quad (11)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} M \left\{ \frac{(x_{t+\Delta}^i - x_t^i)(x_{t+\Delta}^j - x_t^j)}{\Delta} \middle| x_t \right\} = B_{ij}(x_t)$$

($i, j = 1, 2, \dots, m$).

В (11) x_t^i и x_t^j представляют собой соответственно i -тый и j -тый компонент вектора входных величин. При этом величины a_i и B_{ij} определяются видом вектор-функции $\varphi(x, \xi) = [\varphi_1(x, \xi), \dots, \varphi_m(x, \xi)]$, а также матрицей взаимных корреляционных функций случайного процесса ξ

$$a_i = \langle \varphi_i \rangle + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^0 K \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \varphi_{j\tau} \right] d\tau, \quad (12)$$

$$B_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} K[\varphi_i, \varphi_{j\tau}] d\tau.$$

Вывод формул (12) можно найти в [4], § 4, п. 9.

Пользуясь формулами (10) и (11), из уравнения (9) можно получить дифференциальное уравнение Беллмана

$$LS_0 + \min_{u \in U} (f(y, u) \text{grad}_y S_0) = - \frac{\partial S_0}{\partial t} - C(x, y), \quad (13)$$

где оператор L имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (14)$$

Уравнение (13) получено путем разложения функции $S_0(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}t + \Delta)$ в ряд Тейлора по степеням приращений $(x_{t+\Delta} - x_t)$, $(y_{t+\Delta} - y_t)$ и Δ с последующим усреднением и переходом к пределу при $\Delta \rightarrow 0$.

В стационарном случае (см. [5]), соответствующем минимизации среднего значения выражения (4), уравнение Беллмана для соответствующей функции потерь $S = S(x, y)$ не содержит производной по времени. В этом случае вместо (13) имеем

$$LS + \min_{u \in U} (f(y, u) \text{grad}_y S) = \gamma - C(x, y), \quad (15)$$

где γ — средняя установившаяся ошибка системы в единицу времени. Для получения единственного решения уравнения (15) к нему нужно добавить те или иные граничные условия для функции $S(x, y)$, вытекающие из существа конкретной задачи.

Задача 2. Пусть $W(t, x_0, y_0)$ — вероятность того, что за время $t - t_0$ изображающая точка (x, y) не достигнет границы области L_h , оп-

ределяемой (5). Тогда среднее время достижения границ $T_{\text{дос}}$ будет равно (см. [4])

$$T_{\text{дос}} = T_{\text{дос}}(x_0, y_0) = - \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) dW(t, x_0, y_0) = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x_0, y_0) dt. \quad (16)$$

Введем обозначение:

$$\mathcal{M}(x, y) = \max_{\substack{u_{\tau} \\ t \leq \tau < \infty}} \left\{ \int_t^{\infty} W(\tau, x, y) d\tau \right\}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что $\mathcal{M}(x, y)$ есть максимальное среднее время достижения границ, которое является функцией начальных координат x и y (функция $\mathcal{M}(x, y)$ является функцией потерь для задачи 2).

Из принципа оптимальности получаем

$$\mathcal{M}(x_t, y_t) = \max_{\substack{u_{\tau} \\ t \leq \tau \leq t+\Delta}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} W(\tau, x, y) d\tau + \mathcal{M}(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}) \right\}. \quad (18)$$

Для достаточно малых Δ функцию $\mathcal{M}(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta})$, как и в предыдущем случае, можно разложить в ряд Тейлора по степеням малых приращений $(x_{t+\Delta} - x_t)$ и $(y_{t+\Delta} - y_t)$. Если воспользоваться формулами (10) и (11), а также учесть, что при $\Delta \rightarrow 0$ вероятность $W(\tau, x, y)$ для всех (x, y) , лежащих внутри L_h , равна единице, то из (18) можно получить в пределе при $\Delta \rightarrow 0$

$$L\mathcal{M} + \max_{u \in U} (f(y, u) \text{grad}_y \mathcal{M}) = -1, \quad (19)$$

где оператор L определяется формулой (14).

Заметим, что из «физического» смысла функции $\mathcal{M}(x, y)$ следует, что в граничных точках области L_h должно выполняться условие

$$\mathcal{M}(x, y)|_{\text{на границе } L_h} = 0. \quad (20)$$

Задача 3. Функцию потерь для этого случая естественно определить следующим образом:

$$F_0(x_t, y_t, t) = \mathcal{M} \left\{ \min_{\substack{u_{\tau} \\ t \leq \tau \leq T}} [\max_{t \leq \tau \leq T} C(x_{\tau}, y_{\tau})] \right\}. \quad (21)$$

Заметим, что F_0 явно зависит от времени t ввиду того, что мы фиксируем время окончания наблюдения T .

Принцип оптимальности дает в этом случае следующее функциональное соотношение:

$$F_0(x_t, y_t, t) = \max \left\{ C(x_t, y_t) + 0(\Delta), \right. \\ \left. M \left[\min_{\substack{u_{\tau} \\ t \leq \tau \leq t+\Delta}} F_0(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}, t + \Delta) \right] \right\}. \quad (22)$$

Из (22) можно заключить, что либо

$$F_0(x_t, y_t, t) = C(x_t, y_t), \quad (23)$$

либо $F_0(x_t, y_t, t)$ удовлетворяет

$$F_0(x_t, y_t, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathcal{M} \left\{ \min_{\substack{u_{\tau} \\ t \leq \tau \leq t+\Delta}} F_0(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}, t + \Delta) \right\}, \quad (24)$$

когда определяемая из (24) функция равна $F_0(x_t, y_t, t) > C(x_t, y_t)$. Уравнение (24) можно записать более подробно. Совершенно аналогично случаям 1 и 2 разлагая в ряд функцию $F_0(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}, t+\Delta)$ в (24), усредняя и переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ с учетом (10) и (11), получим уравнение для $F_0(x, y, t)$

$$LF_0 + \min_{u \in U} (f(y, u) \text{grad}_y F_0) = -\frac{\partial F_0}{\partial t}, \quad (25)$$

если $F_0 > C(x, y)$; $F_0 = C(x, y)$ в остальных случаях.

Однозначную разрешимость уравнению (25) дают условие

$$F_0(T) = C(x_T, y_T), \quad (26)$$

а также условия сопряжения функции F_0 на границе области перехода от одного уравнения к другому в формуле (25).

Задача 3'. Функция потерь

$$F(x_t, y_t) = \mathcal{M} \left\{ \min_{\substack{u_\tau \\ \tau \geq t}} [\max_{\tau \geq t} C(x_\tau, y_\tau) e^{-\beta(\tau-t)}] \right\}. \quad (27)$$

В отличие от (21) уже не будет явно зависеть от времени, так как в этом случае конец наблюдения не фиксируется. Аналогично (22) получаем

$$F(x_t, y_t) = \max \{ C(x_t, y_t) + 0(\Delta), \mathcal{M} \left\{ \min_{t \leq \tau < t+\Delta} [\min_{\tau \geq t+\Delta} (\max_{\tau \geq t+\Delta} C(x_\tau, y_\tau) e^{-\beta(\tau-t)})] \right\} \}. \quad (28)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (28), можно записать, используя (27), следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \left\{ \min_{\tau \geq t+\Delta} (\max_{\tau \geq t+\Delta} C(x_\tau, y_\tau) e^{-\beta(\tau-t)}) \right\} = \\ & = e^{-\beta\Delta} \mathcal{M} \left\{ \min_{\tau \geq t+\Delta} (\max_{\tau \geq t+\Delta} C(x_\tau, y_\tau) e^{-\beta(\tau-t-\Delta)}) \right\} = e^{-\beta\Delta} F(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}). \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогично уравнению (24), для функции $F(x_t, y_t)$ можно записать

$$F(x_t, y_t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathcal{M} \left\{ \min_{\substack{u_\tau \\ t \leq \tau < t+\Delta}} F(x_{t+\Delta}, y_{t+\Delta}) e^{-\beta\Delta} \right\}. \quad (30)$$

Из (28) и (30) нетрудно получить следующее дифференциальное уравнение Беллмана для функции $F(x, y)$:

$$LF + \min_{u \in U} (f(y, u) \text{grad}_y F) = \beta F, \quad (31)$$

если $F_0 > c(x, y)$; $F_0 = c(x, y)$ в остальных случаях.

Таким образом, мы получили уравнения Беллмана для всех четырех задач. Из этих уравнений видно, что их решение эквивалентно решению задачи синтеза оптимального регулятора, так как соответствующая оптимальная синтезирующая функция определяется без труда одновременно с решением уравнений (15), (19), (25) и (31).

Решение задачи синтеза в одномерном случае

Итак, проблема была сформулирована в общем виде. Однако фактическое ее решение может быть получено лишь в некоторых простых случаях.

В качестве примера рассмотрим систему первого порядка, для ко-

торой уравнение (1) имеет вид

$$\dot{y} = u, \quad (32)$$

а условие (2) превращается в

$$|u| \leq k. \quad (33)$$

Пусть входной сигнал x является диффузионным марковским процессом, определяемым флуктуационным уравнением

$$\dot{x} = a + \xi, \quad (34)$$

где $a = \text{const}$, а случайная функция $\xi(t)$ имеет характер белого шума с нулевым средним значением и коэффициентом интенсивности B :

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = B \delta(\tau). \quad (35)$$

Будем решать задачу об оптимальном слежении за блуждающей координатой. В этом случае, как отмечалось выше, $c(x, y) = c(x-y) = c(z)$. Для определенности функцию штрафа будем брать равной модулю ошибки

$$c(x, y) = c(x-y) = c(z) = |z|. \quad (36)$$

Пользуясь результатами предыдущего пункта, нетрудно получить уравнения Беллмана для всех четырех постановок задачи в данном конкретном случае. Действительно, если воспользоваться вытекающим из (34) и (35) выражением для оператора

$$L = \frac{B}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial x}, \quad (37)$$

то при учете (32) и (33) получим:

$$\frac{B}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + a \frac{\partial S}{\partial x} - k \left| \frac{\partial S}{\partial y} \right| = \gamma - c(x, y) \quad (\text{задача 1}), \quad (38)$$

$$\frac{B}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + a \frac{\partial M}{\partial x} + k \left| \frac{\partial M}{\partial y} \right| = -1 \quad (\text{задача 2}), \quad (39)$$

$$\frac{B}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + a \frac{\partial F_0}{\partial x} - k \left| \frac{\partial F_0}{\partial y} \right| = -\frac{\partial F_0}{\partial t}, \quad (40)$$

если $F_0 > C(x, y)$; $F_0 = C(x, y)$ в остальных случаях (задача 3).

$$\frac{B}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + a \frac{\partial F}{\partial x} - k \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| = \beta F, \quad (41)$$

если $F > C(x, y)$; $F = C(x, y)$, в остальных случаях (задача 3').

Для рассматриваемой ниже задачи об оптимальном слежении, для которой функция штрафа определяется (36), можно избавиться от частных производных в уравнениях (38), (39) и (41), так как в этом случае соответствующие функции потерь будут зависеть не от x и y по отдельности, а от одной величины $z = x - y$ (в уравнении (40) при этом уменьшится число переменных). Соответствующие уравнения в полных производных будут по мере надобности выписываться в дальнейшем.

Как отмечалось, решение задачи об оптимальном управлении дает оптимальная синтезирующая функция. Найдем эту функцию $u = u(z)$, для данной конкретной задачи и для различных критериев оптимальности. Как видно из уравнений Беллмана (38)–(41), оптимальный регулятор P в этом случае должен представлять из себя реле, подающее на вход системы либо $+k$, либо $-k$ в зависимости от значения рассо-

гласования $z=x-y$. Иными словами, оптимальное управление имеет вид

$$u(z) = -k \operatorname{sign}(z - z_\Gamma), \quad (42)$$

где z_Γ — точка переключения, которая для разных критериев оптимальности определяется из условий: $\frac{dS}{dz} = 0$, $\frac{dM}{dz} = 0$, $\frac{\partial F_0}{\partial z} = 0$ или $\frac{dF}{dz} = 0$. Таким образом, задача будет решена, если мы найдем соответствующие точки переключения z_Γ .

Будем решать уравнения Беллмана. Начнем с (38). Его решение с учетом (36) имеется в [5], где найдено уравнение для нахождения точки переключения z_Γ^A в виде

$$\int_0^\infty \left[c \left(z_\Gamma^A + \frac{B\eta}{2(k-a)} \right) - c \left(z_\Gamma^A - \frac{B\eta}{2(k+a)} \right) \right] e^{-\eta} d\eta = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) при учете, что $c(z) = |z|$, дает следующее выражение для точки переключения:

$$z_\Gamma^A = \frac{B}{2(k-a)} \ln \left(1 + \frac{a}{k} \right). \quad (44)$$

Перейдем к уравнению (39). Для следящей системы оно имеет вид

$$\frac{B}{2} \frac{d^2 M}{dz^2} + a \frac{dM}{dz} + k \left| \frac{dM}{dz} \right| = -1. \quad (39')$$

При этом функция штрафа (36) дает для области L_k вид отрезка оси z , симметричного относительно точки $z=0$. Однако мы решим несколько более общую задачу, когда отрезок $[l_1, l_2]$ оси z , внутри которого необходимо поддерживать рассогласование, расположен произвольным образом на оси z . Условие (20) в этом случае дает следующие два граничных условия:

$$M(l_1) = 0, \quad M(l_2) = 0, \quad (20')$$

которые вместе с уравнением (39') позволяют решить задачу синтеза.

Решим уравнение (39') с учетом (20'). Точка переключения z_Γ^B разбивает отрезок $[l_1, l_2]$ на две области: область $[l_1, z_\Gamma^B]$, где уравнение (39') имеет вид

$$\frac{B}{2} \frac{d^2 M_1}{dz^2} + (a+k) \frac{dM_1}{dz} = -1, \quad (45)$$

и область $[z_\Gamma^B, l_2]$, в которой (39') преобразуется:

$$\frac{B}{2} \frac{d^2 M_2}{dz^2} + (a-k) \frac{dM_2}{dz} = -1. \quad (46)$$

Функции $M_1(z)$ и $M_2(z)$ могут быть найдены при использовании граничных условий (20') и из определения точки переключения

$$\frac{dM_1}{dz} \Big|_{z_\Gamma^B} = \frac{dM_2}{dz} \Big|_{z_\Gamma^B} = 0, \quad (47)$$

а сама точка переключения находится из условия непрерывности функции $M(z)$

$$M_1(z_\Gamma^B) = M_2(z_\Gamma^B). \quad (48)$$

Из (45) — (48) получаем следующее уравнение для определения точки переключения z_{Γ}^B :

$$2kz_{\Gamma}^B = (a+k)l_2 - (a-k)l_1 + \frac{B}{2} \left(\frac{a-k}{a+k} - \frac{a+k}{a-k} \right) + \\ + \frac{B}{2} \left[\frac{a+k}{a-k} e^{\frac{2(a-k)(z_{\Gamma}^B - l_2)}{B}} - \frac{a-k}{a+k} e^{\frac{2(a+k)(z_{\Gamma}^B - l_1)}{B}} \right]. \quad (49)$$

В случае $a=0$ из (49) легко получить

$$z_{\Gamma}^B = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad (50)$$

т. е. вполне естественный результат, который можно было бы предсказать, не решая уравнения Беллмана. Из (49), кроме того, можно получить приближенное выражение для случая $a \ll k$ и $-l_1 = l_2 = l$:

$$z_{\Gamma}^B \cong \frac{aB}{k^2} + \frac{al}{k} \frac{1 + e^{\frac{2kl}{B}}}{1 - e^{\frac{2kl}{B}}}. \quad (51)$$

В остальных случаях z_{Γ}^B находится путем численного решения уравнения (49).

Перейдем к решению уравнения (41), которое в случае (36) имеет вид

$$\frac{B}{2} \frac{d^2F}{dz^2} + a \frac{dF}{dz} - k \left| \frac{dF}{dz} \right| = \beta F, \quad (41')$$

если $F > |z|$; $F = |z|$ в остальных случаях.

Следует различать две области оси z : область R_1 , где $F(z) > |z|$, и область R_2 , где $F(z) = |z|$. Из рассматриваемой системы ясно, что если для какого-нибудь z^* имеет место $F(z^*) = |z^*|$, то $F = |z|$ для любого z , расположенного по отношению к z^* в сторону увеличения $|z|$. Другими словами, область R_2 простирается от $-\infty$ до z' и от z'' до $+\infty$. Между граничными точками z' и z'' выполняется

$$\frac{B}{2} \frac{d^2F}{dz^2} + a \frac{dF}{dz} - k \left| \frac{dF}{dz} \right| = \beta F. \quad (52)$$

Далее, отрезок $[z', z'']$ разбивается точкой переключения z_{Γ}^B на две части: $z' \leq z \leq z_{\Gamma}^B$, где уравнение (52) имеет вид

$$\frac{B}{2} \frac{d^2F_1}{dz^2} + (a+k) \frac{dF_1}{dz} - \beta F_1 = 0, \quad (53)$$

и

$z_{\Gamma}^B \leq z \leq z''$, где справедливо

$$\frac{B}{2} \frac{d^2F_2}{dz^2} + (a-k) \frac{dF_2}{dz} - \beta F_2 = 0. \quad (54)$$

Таким образом, неизвестными в этом случае являются 7 величин z', z'', z_{Γ}^B и четыре постоянные интегрирования уравнений (53) и (54). Они

определяются из следующих семи условий:

$$\begin{aligned}
 F_1(z') &= |z| = -z', \\
 \frac{dF_1}{dz} \Big|_{z_\Gamma^B} &= \frac{dF_2}{dz} \Big|_{z_\Gamma^B} = 0, \\
 F_2(z'') &= z'', \\
 \frac{dF_1}{dz} \Big|_{z'} &= -1, \quad \frac{dF_2}{dz} \Big|_{z''} = 1, \\
 F_1(z_\Gamma^B) &= F_2(z_\Gamma^B).
 \end{aligned} \tag{55}$$

Решая (53) и (54) с учетом (55), можно получить следующие три уравнения для определения z' , z'' и z_Γ^B :

$$z' = \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(z_\Gamma^B - z')}} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)(z_\Gamma^B - z')} - 1}, \tag{56}$$

$$z'' = \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{1 - e^{(\mu_1 + \mu_2)(z_\Gamma^B - z')}} + \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{e^{-(\mu_1 + \mu_2)(z_\Gamma^B - z')} - 1}, \tag{57}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{1}{e^{\lambda_2(z_\Gamma^B - z')} - e^{-\lambda_1(z_\Gamma^B - z')}} = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \frac{1}{e^{-\mu_1(z_\Gamma^B - z')} - e^{\mu_2(z_\Gamma^B - z')}}. \tag{58}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{-(a+k) + \sqrt{(a+k)^2 + 2\beta B}}{B}, \quad \mu_1 = \frac{-(a-k) + \sqrt{(a-k)^2 + 2\beta B}}{B}, \\
 \lambda_2 &= \frac{a+k + \sqrt{(a+k)^2 + 2\beta B}}{B}, \quad \mu_2 = \frac{a-k + \sqrt{(a-k)^2 + 2\beta B}}{B}.
 \end{aligned} \tag{59}$$

Некоторые сравнительные результаты

Задачи 1, 2 и 3 были подробно рассмотрены применительно к системе первого порядка. Так как точка переключения z_Γ^A в системе 1 является постоянной величиной при фиксированных a , k и B (см. (44)), то наибольший интерес представляет сравнение систем, оптимальных по критериям 2 и 3. Из чисто качественного рассмотрения назначения обеих систем можно предположить, что время достижения точкой z границы отрезка $[l_1, l_2]$ в задаче 2 должно быть близко к времени наблюдения T в задаче 3 (можно считать, что $T = \frac{c}{\beta}$, где c — некоторая константа), а сам отрезок $[l_1, l_2]$ должен мало отличаться от области R_1 , где выполняется уравнение (52). Таким образом, если мы имеем системы,

оптимальные по критерию 2 и по критерию 3 с одинаковыми временами или отрезками, то можно предполагать, что и устройства самих систем близки друг другу. Иными словами, такие системы должны иметь мало отличающиеся точки переключения.

Для проверки высказанного предположения было проведено численное решение уравнений (49) и (56) — (58). Результаты расчетов представлены графически на рис. 2. Укажем коротко последовательность расчетов и способ построения графиков рис. 2.

Постоянные, входящие в уравнения (32) — (35), были заданы следующим образом:

$$k = 1, \quad a = 0,5, \quad B = 2. \quad (60)$$

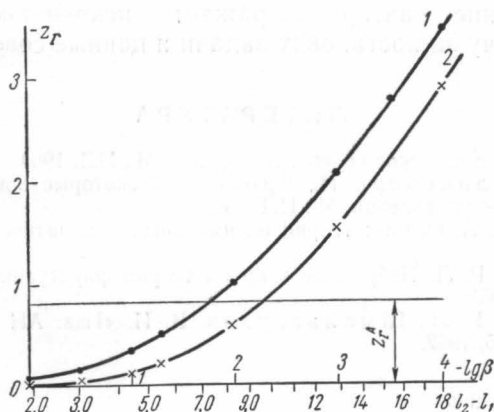


Рис. 2

Задаваясь различными значениями β (от $\beta=1$ до $\beta=10^{-4}$), из уравнений (56) — (58) были найдены соответствующие им значения z_{Γ}^B , z' и z'' . Зависимость $z_{\Gamma}^B = z_{\Gamma}^B(\beta)$ приведена на кривой 1. Полученный набор значений z' , z'' использовался в качестве границ отрезка $[l_1, l_2]$, и из уравнения (49) находились соответствующие точки переключения z_{Γ}^B . Таким путем строилась кривая 2, изображающая зависимость $z_{\Gamma}^B = z_{\Gamma}^B(\beta)$. На рис. 2 видно, точки переключения в обеих оптимальных системах действительно близки друг другу (расстояния между z_{Γ}^B и z_{Γ}^B всегда значительно меньше соответствующих отрезков $[z', z'']$). Остальные результаты расчета приводятся в таблицах.

Система 1

l_1	-0,89	-1,13	-1,35	-1,94	-2,39	-3,63	-5,84	-8,45
l_2	1,02	1,47	1,68	2,47	3,07	4,64	7,1	9,61
M_0	0,59	1,16	1,93	5,26	9,9	40	2,75	1,964
z_{Γ}^B	-0,025	-0,027	-0,031	-0,11	-0,21	-0,59	-1,53	-2,85

Система 3

β	1	0,5	0,3	0,1	0,05	0,01	10^{-3}	10^{-4}
z'	-0,89	-1,13	-1,35	-1,94	-2,39	-3,63	-5,84	-8,45
z''	1,02	1,47	1,68	2,47	3,07	4,64	7,1	9,61
z_{Γ}^B	-0,08	-0,11	-0,16	-0,35	-0,50	-1,01	-2,05	-3,39

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Р. Л. Стратоновичу за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
2. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., ИЛ, 1962.
3. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
5. Стратонович Р. Л., Шмальгаузен В. И. «Изв. АН СССР», энергетика и автоматика, № 5, 1962.

Поступила в редакцию
30. 6 1964 г.

Кафедра
общей физики для мехмата.

10,0	1,7	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
10,0	1,7	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
10,0	1,7	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
10,0	1,7	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0