Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1—1966 г.

УДК 539.124.143 : 621.384.6.01

И. М. ТЕРНОВ, В. Г. БАГРОВ, В. Ч. ЖУКОВСКИЙ

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА, ОБЛАДАЮЩЕГО ВАКУУМНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ

Найдены решения уравнения Дирака для электрона, обладающего вакуумным магнитным моментом и движущегося в постоянном и однородном магнитном поле. Полученные точные решения применяются к рассмотрению задачи о синхротронном излучении.

Волновая функция электрона, обладающего вакуумным магнитным моментом

Как известно (см., например, [1]), уравнение Дирака с учетом вакуумного магнитного момента электрона [2] при движении электрона во внешнем магнитном поле имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi,\ \hat{H} = c\,(\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 m_0 c^2 + \frac{\alpha}{2\pi}\mu_0\rho_3(\vec{\sigma}\vec{H}). \tag{1}$$

Здесь

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e_0}{c}\vec{A},\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A},\ \alpha = \frac{e_0^2}{\hbar c},\ \mu_0 = \frac{e_0\hbar}{2m_0c},$$

а $e = -e_0$ и m_0 — заряд и масса электрона. Это уравнение включает вакуумный магнитный момент электрона с точностью до $e_0^2/\hbar c$ и применимо для любых значений энергии электрона, включая ультрарелятивистскую область [3].

В случае постоянного и однородного магнитного поля, направленного по оси z цилиндрической системы координат (r, φ, z):

$$A_x = -\frac{1}{2}yH,\ A_y = \frac{1}{2}xH,\ A_z = 0,\ H_z = H$$

волновая функция электрона, являющаяся собственной функцией оператора Гамильтона (1), а также коммутирующих с ним операторов проекции импульса на направление поля $\hat{p}_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ и полного момента $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\hbar}{2}\sigma_3$, может быть представлена в виде

$$\psi_{1,3} = e^{-icKt} \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f_{1,3}(r),$$

$$\psi_{2,4} = e^{-icKt} \frac{e^{ik_3 z}}{\sqrt{L}} \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}} f_{2,4}(r), \qquad (2)$$

где радиальные функции $f_i(r)$ оказываются связанными с функциями Лагерра

$$I_{n,s}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{n!\, s!}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^{\frac{n-s}{2}} Q_s^{n-s}(\rho)$$

соотношением

$$f_{1,2,3,4}(r) = \sqrt{2\gamma} \begin{Bmatrix} c_1 I_{n-1,s}(\gamma r^2) \\ ic_2 I_{n,s}(\gamma r^2) \\ c_3 I_{n-1,s}(\gamma r^2) \\ ic_4 I_{n,s}(\gamma r^2) \end{Bmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь $Q_s^l(\rho)$ — полином Лагерра (см. [1]), l — орбитальное, s — радиальное и $n=l+s$ — главное квантовые числа, k_3 — собственное значение оператора проекции импульса на направление магнитного поля, $\gamma = {}^{e_0 H}/2\hbar c$, а $E = chK$ — энергия электрона.

Для определения коэффициентов c_i, характеризующих спиновое состояние электрона, необходимо ввести четвертый оператор, коммутирующий с гамильтонианом (1) (интеграл движения) и обладающий необходимыми свойствами релятивистской ковариантности. В качестве такого оператора наиболее целесообразно взять тензор поляризации

$$\Pi_{\mu\nu} = \int \psi^+ F_{\mu\nu 4} \psi\, d^3x, \quad F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2}(\widehat{P}_\lambda \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu}\widehat{P}_\lambda),$$

где

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3\sigma_1 & \rho_3\sigma_2 & \rho_3\sigma_3 \\ i\rho_2\sigma_1 & i\rho_2\sigma_2 & i\rho_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

тензор магнитного и электрического моментов электрона, а $\widehat{P}_\lambda = \left\{\widehat{\vec{P}},\ i\frac{\widehat{H}}{c}\right\}$ — четырехмерный импульс (см. [4, 5]). Π_{12} составляющая этого тензора:

$$\Pi_{12} = m_0 c\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{P}]_3 + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mu_0 H}{c}\ ; \qquad (4)$$

коммутирует с гамильтонианом $\widehat{\mathscr{H}}$ (1), является интегралом движения и характеризует поляризацию спина электрона по отношению к направлению магнитного поля. Заметим, что проекция спина электрона на направление движения — $(\vec{\sigma}\vec{P})$ (см. [4, 5]) не коммутирует с гамильтонианом (1) и не является интегралом движения *.

---

* Действительно, построим функцию

$$\Psi(t) = A\psi(1)\, e^{-icK_1 t} + B\psi(-1)\, e^{-icK_{-1} t}$$

так, чтобы в начальный момент времени было

$$(\vec{\sigma}\vec{P})\,\Psi(0) = \hbar\lambda\Psi(0)$$

Подчиняя волновую функцию ψ требованию быть собственной функцией оператора поляризации (4) и оператора гамильтона (1) и решая совместно систему двух уравнений

$$\Pi_{12}\psi = \hbar\zeta k\psi, \quad \hat{\mathscr{H}}\psi = chk\psi,$$

находим, что коэффициенты c_i имеют следующие значения:

$$c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\zeta\frac{k_0}{k}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}}+\zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\zeta\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\zeta\frac{k_0}{k}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}}-\zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right), \quad (5)$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\zeta\frac{k_0}{k}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}}-\zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right),$$

$$c_4 = \frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\zeta\frac{k_0}{K}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}}+\zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right).$$

При этом энергия электрона оказывается равной

$$E = c\hbar K = c\hbar\sqrt{k_3^2 + \left(\sqrt{k_0^2+4\gamma n} + \xi\mu H\right)^2} \quad (6)$$

($k_0 = m_0c/\hbar$, $\mu = \alpha\mu_0/2\pi c\hbar$, $n = l + s = 0, 1, 2 \ldots$ главное квантовое число), $k = \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n}$, а собственные значения $\zeta = \pm 1$ характеризуют поляризацию спина электрона по отношению к направлению магнитного поля $\zeta = 1$ по полю, $\zeta = -1$ — против поля. Заметим, что в отличие от [5] энергия электрона (6) зависит от ориентации спина (снимается спиновое вырождение). Таким образом, волновая функция, определенная формулами (2), (3), (5), является точным решением уравнения Дирака (1) и учитывает спиновые состояния электрона.

Особенности синхротронного излучения

Применим полученные результаты к исследованию интенсивности поляризованного излучения, испускаемого электроном в магнитном поле.

(индексы 1 и —1 соответствуют $\zeta = \pm 1$). Определяя A и B, найдем среднее от $(\vec{\sigma}\vec{P})$ по функциям $\Psi(t)$ (см. [3])

$$\langle(\vec{\sigma}\vec{P})\rangle = \lambda\frac{1}{(1-\beta)_3^2\beta^2}(1-\beta^2)\beta_3^2 + (\beta^2-\beta_3^2)\cos\omega t),$$

где

$$\omega = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{e_0H}{m_0c}\sqrt{1-\beta_3^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \beta_3 = \frac{v_z}{c},$$

$$\lambda = \zeta^1\sqrt{k_3^2+4\gamma n}, \quad \zeta^1 = \pm 1.$$

В случае движения вдоль поля ($4\gamma n = 0$) получаем

$$\langle(\vec{\sigma}\vec{P})\rangle = -\hbar k_3,$$

т. е. $(\vec{\sigma}\vec{P})$ остается интегралом движения, совпадая с поперечной поляризацией, причем спин электрона ориентирован против поля.

Как известно (см. [6]), интенсивность излучения при спонтанных переходах электрона из состояния n, s, k_3, ζ в состояние $n'=n-\nu$, s', k_3', ζ'

$$W_i = \frac{ce_0^2}{2\pi}\sum_{\nu}\int d^3\varkappa\delta(K-K'-\varkappa)S_i \tag{7}$$

связана с величинами S_i, характеризующими поляризацию излучаемых фотонов. В частности, для σ- и π-компонентов линейной поляризации излучения имеем (см. [5, 6])

$$S_\sigma = |\overline{B}_1|^2,$$

$$S_{\text{II}} = |\overline{B}_2|^2\cos^2\theta + |\overline{B}_3|^2\sin^2\theta - (\overline{B}_2\overline{B}_3^+ + \overline{B}_2^+\overline{B}_3)\sin\theta\cos\theta.$$

Здесь $\vec{\varkappa} = \{\varkappa\sin\Theta\cos\varphi', \varkappa\sin\Theta\sin\varphi', \varkappa\cos\Theta\}$ — волновой вектор фотона; сумма в формуле (7) предполагает суммирование по всем конечным состояниям электрона, а матричные элементы вектора $\vec{B}$

$$\vec{\overline{B}} = \int \psi^+ e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}}\vec{B}\psi\, d^3x,$$

в отличие от [5, 6], учитывают дополнительное взаимодействие вакуумного магнитного и электрического моментов с вторично квантованным полем излучения.

Действительно, для потенциала взаимодействия $U^{\text{вз}} = U + U^+$ имеем

$$U = \frac{e}{L^{3/2}}\sum_{\vec{\varkappa}}\sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}}\, e^{-ic\varkappa t + i\vec{\varkappa}\vec{r}}(\vec{B}\vec{a}),$$

где

$$\vec{B} = \vec{\alpha} + i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\mu_0}{e}\varkappa(\rho_3[\vec{\sigma}\vec{\varkappa}_0] + \rho_2\vec{\sigma}). \tag{8}$$

Здесь $\vec{\varkappa}_0 = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}$. При этом по-прежнему матричные элементы $\vec{\overline{B}}$ оказываются связанными с функциями Лагерра $I_{nn'}(x)$ (см. [5, 6]), где

$$x = \frac{\varkappa^2\sin^2\theta}{4\gamma},$$

а частота излучения $\varkappa$ определяется из закона сохранения энергии (7) $\varkappa = K - K'$.

С целью упрощения начальный импульс электрона вдоль поля приравнен нулю ($k_\beta = 0$), при этом $k_3' = -\varkappa\cos\Theta$. Заметим также, что суммирование по $\nu = n - n'$ (имея в виду квазинепрерывность спектра излучения) можно заменить интегрированием, при этом целесообразно ввести эффективный «номер» гармоники ν' (см. [5])

$$\nu = \nu'\left(1 - \frac{\nu'}{4n}\beta^2\sin^2\theta\right).$$

Исследование интенсивности излучения будем проводить в предположении ультрарелятивистского движения электрона, когда $\varepsilon_0 = 1-\beta^2 \ll 1$, $\beta = v/c$.

Учитывая также, что исходное уравнение Дирака включает взаимодействие вакуумного магнитного момента электрона с внешним полем лишь с точностью до членов порядка $\alpha = e_0^2/\hbar c$, получаем помимо малого параметра $\varepsilon_0 \ll 1$ также малую величину $\mu H = \alpha\mu_0 H/2\pi ch$.

Все дальнейшие расчеты будем вести в виде разложений по ε_0 и μH с сохранением членов не старше линейных (см. также [5]).

Как известно [1], функция Лагерра $I_{nn'}(x)$ и ее производная $I'_{nn'}(x)$ могут быть аппроксимированы цилиндрическими функциями K равномерно во всей области спектра

$$I_{nn'}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{1/2} K_{1/3}(z),$$

$$I'_{nn'}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right) \frac{\sqrt{x_0(x_1 - x_0)}}{2x_0} K_{2/3}(z).$$

Здесь $z = \frac{\sqrt{x_0(x_1 - x_0)}}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}$, $x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2$, $x_1 = (\sqrt{n} + \sqrt{n'})^2$, а x определен формулой (8).

В отличие от результатов работы [5], учет вакуумного магнитного момента электрона приводит к следующему выражению для функций Лагерра и их производных:

$$I_{nn'}(x) = \frac{(1 + \zeta y)^{1/2}}{\pi\sqrt{3}}\left\{\varepsilon^{1/2} K_{1/3}(z) + \zeta \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 - \xi\zeta}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0^{1/2}} K_{2/3}(z)\right\} \tag{9}$$

$$I'_{nn'}(x) = \frac{(1 + \zeta y)^{3/2}}{\xi y \pi\sqrt{3}}\left\{\varepsilon K_{2/3}(z) + \zeta \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1 - \xi\zeta'}{2} \frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon_0^{1/2}} K_{1/3}(z)\right\}. \tag{10}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$y = \frac{2}{3} \frac{\nu'}{1 - \frac{\nu'}{2n}} \varepsilon_0^{3/2}, \quad \varepsilon_0 = 1 - \beta^2, \quad \varepsilon = 1 - \beta^2 \sin^2\theta,$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} y,$$

а ξ — характерный параметр (см. [5])

$$\xi = \frac{1}{\frac{4}{3} n \varepsilon_0^{3/2}} = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{m_0 c R}\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2,$$

где $R = \sqrt{\frac{n}{\gamma}}$ — радиус устойчивой орбиты электрона. Заметим, что добавочные члены в формулах (9) и (10), пропорциональные постоянной тонкой структуре $\alpha = \frac{e_0^2}{\hbar c}$, содержат взаимодействие вакуумного момента с магнитным полем. В этом нетрудно убедиться простой проверкой следующего тождества:

$$\frac{\mu H}{k_0 \sqrt{\varepsilon_0}\, \xi} = \frac{\alpha}{6\pi},$$

с помощью которого (9) и (10) преобразовались к наиболее удобному для расчета виду.

В результате довольно несложных преобразований интенсивность излучения можно привести к следующему виду:

$$W_i = W_i^0 + W_i^{\text{вак}},$$

при этом (см. [5])

$$W_i^0 = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\frac{e_0^2 c}{R^2}\frac{1}{\varepsilon_0^2}\int\limits_0^\infty \frac{y\,dy}{(1+\xi y)^4} F_i(y),$$

где

$$F_\sigma^{\uparrow\uparrow} = \left(1+\frac{1}{2}\zeta y\right)^2\left[\int\limits_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + K_{2/3}(y)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\xi^2 y^2\int\limits_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx - \zeta(2+\xi y)\,\xi y K_{1/3}(y),$$

$$F_\pi^{\uparrow\uparrow} = \left(1+\frac{1}{2}\xi y\right)^2\left[\int\limits_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx - K_{2/3}(y)\right],$$

$$F_\sigma^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{4}\xi^2 y^2\left[\int\limits_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx - K_{2/3}(y)\right],$$

$$F_\pi^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{4}\xi^2 y^2\left[\int\limits_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + K_{2/3}(y) + \right.$$

$$\left. + 2\int\limits_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx + 4\zeta K_{1/3}(y)\right].$$

Здесь ($\uparrow\uparrow$) обозначены переходы без изменения ориентации спина и ($\downarrow\uparrow$) переходы с изменением ориентации спина.

Вакуумные добавки к интенсивности излучения определяются выражениями:

$$W_i^{\text{вак}} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{64\pi}W^{\text{кл}}\int\limits_0^\infty \frac{y\,dy}{(1+\xi y)^4}F_i^{\text{вак}}(y),$$

здесь имеем

$$F_\sigma^{\uparrow\uparrow\text{вак}} = \xi\,[-6\zeta y(2+\zeta y)K_{1/3}(y) + 15\xi y^2\cdot K_{2/3}(y) - (8\zeta + 4\zeta\xi y + 9\xi y^2)\times$$
$$\times\int\limits_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx\,]. \qquad (11)$$

$$F_\sigma^{\uparrow\downarrow(\text{вак})} = -6\zeta^2 y^2\left[K_{2/3}(y) - \int\limits_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx\right]. \qquad (12)$$

$$F_\pi^{\uparrow\uparrow\text{вак}} = -4\zeta\xi(2+\xi y)\int\limits_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx. \qquad (13)$$

$$F_\pi^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = 0, \qquad (14)$$

где

$$W^{\text{кл}} = \frac{8}{27}\frac{e_0^2 m^2 c^3}{\hbar^2}\xi^2 = \frac{2}{3}\frac{e_0^2 c}{R^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4.$$

В случае $\xi \ll 1$ $\left(E \ll E_{1/2} = m_0c^2\left(\frac{mcR}{\hbar}\right)^{1/2}\right)$ из (11)—(14) следует, что

$$W_\sigma^{\uparrow\uparrow\text{вак}} = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{2}{3}\zeta\xi W^{\text{кл}},$$

$$W_\sigma^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\xi^2}{9}W^{\text{кл}},$$

$$W_\pi^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = -\frac{\alpha}{2\pi}\zeta\frac{\xi}{6}W^{\text{кл}}, \quad W_\pi^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = 0.$$

Таким образом, учет взаимодействия электрона с вакуумом приводит к поправкам $\sim\alpha$, причем физическая картина переворота спина не претерпевает изменения (см. [5]). Излучение, связанное с переворотом спина, зависит от начальной ориентации спина. При этом изменение поляризации спина электрона происходит таким образом, что спин электрона стремится ориентироваться против поля [7]. Вакуумный магнитный момент способствует упорядочению ориентации спина электрона при излучении, хотя по абсолютной величине добавки, вносимые вакуумным моментом, малы.

В случае очень больших энергий электрона, когда

$$E \gg E_{1/2} \quad \text{или} \quad \xi \gg 1,$$

получаем

$$W_\sigma^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = W_\pi^{\uparrow\downarrow\text{вак}} = -\zeta\alpha\frac{9}{64\pi 2^{2/3}\Gamma(2/3)}\xi^{1/3}W^{\text{глоб}},$$

где

$$W^{\text{глоб}} = \frac{32}{243}2^{2/3}\Gamma(2/3)\frac{e_0^2m^2c^2}{h^2}\xi^{2/3} = \frac{8}{27}\frac{e_0^2c}{R^2}\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{2^{2/3}\Gamma(2/3)}{\xi^{4/3}}.$$

Отсюда следует, что в области высоких энергий учет вакуумного магнитного момента приводит к существенному изменению характера излучения: интенсивность излучения растет пропорционально ξ, а не $\xi^{2/3}$, как это имеет место в теории без учета вакуумного взаимодействия. Заметим, что абсолютная величина этой поправки становится существенной лишь при энергиях, удовлетворяющих соотношению

$$E \sim m_0c^2\left(\frac{m_0cR}{\alpha^3\hbar}\right)^{1/2}.$$

Справедливость примененных методов расчета в этих условиях становится дискуссионной.

Авторы выражают признательность проф. А. А. Соколову и Б. А. Лысову за дискуссию результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
2. Schwinger T. Phys. Rev., **73**, 416, 1948.
3. Тернов И. М., Туманов В. С. «Изв. вузов», сер. физическая, № 1, 155, 1960.
4. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.
5. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. ЖЭТФ, **46**, 374, 1964.
6. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, **31**, 473, 1956.
7. Тернов И. М., Лоскутов Ю. М., Коровина Л. И. ЖЭТФ, **41**, 1294, 1961.

Поступила в редакцию
25. 7 1964 г.

Кафедра
теоретической физики